Colección Ciencias y Humanidades

Aritmética

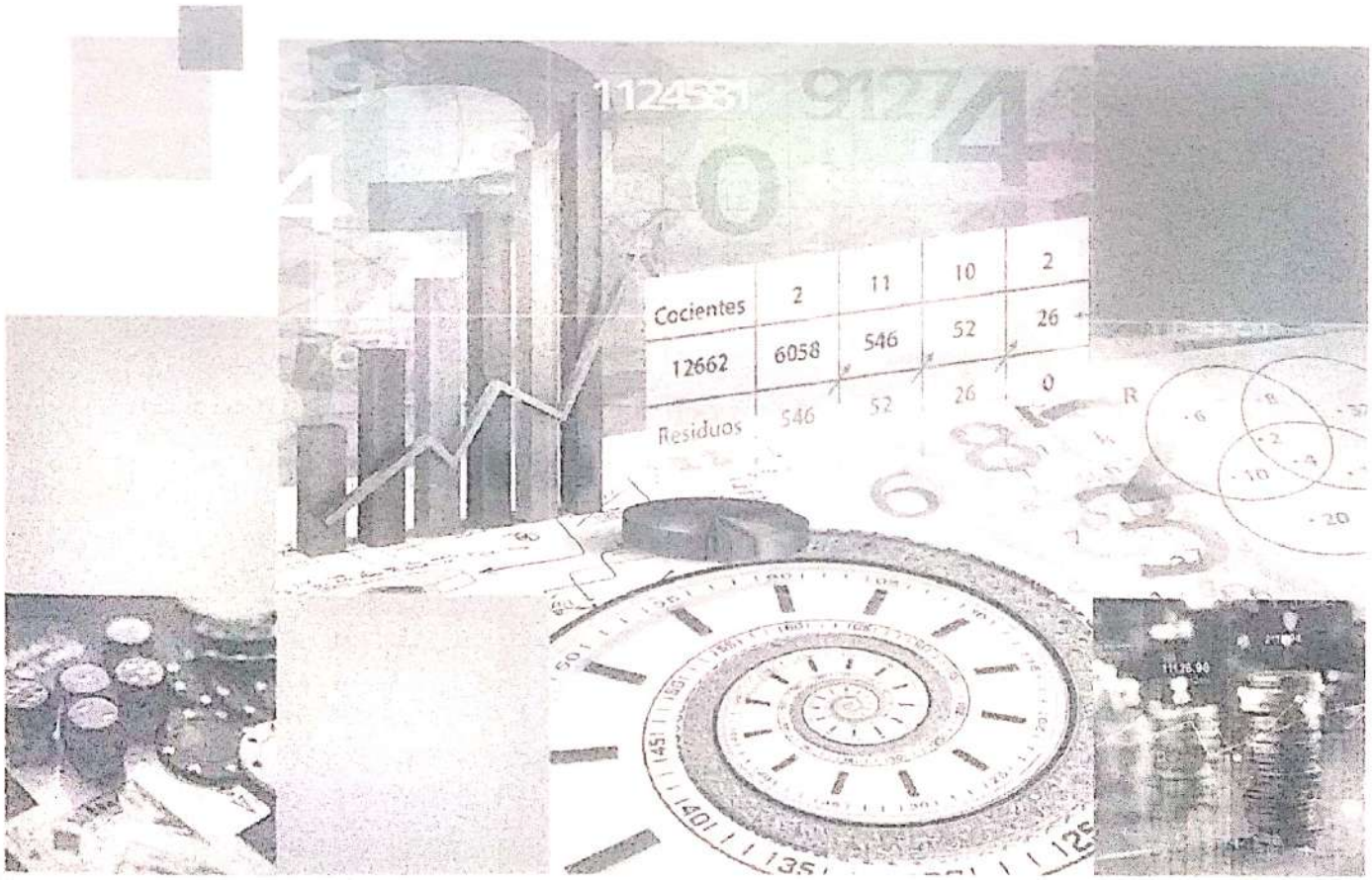
Análisis razonado del número y sus aplicaciones

Lumbreras Editores

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Aritmética

Análisis razonado del número y sus aplicaciones



Lumbreras Editores

BIBLIOTECA NACIONAL DEL PERÚ
Centro Bibliográfico Nacional

513 A2

Aritmética : análisis razonado del número y sus aplicaciones / [Ángel Felipe Martin Sánchez Oré, Arturo Sánchez Vásquez, Juan Arsenio Esqueche Paiconcial ... [et al.].-- 1a ed.-- Lima : Asociación Fondo de Investigadores y Editores : Lumbreras Editores, 2020.
879 p. : il., retrs. ; 22 cm.-- (Ciencias y humanidades)

Bibliografías: p. 877-879.
D.L. 2020-00901
ISBN 978-612-307-949-9

1. Aritmética - Estudio y enseñanza 2. Aritmética - Problemas, ejercicios, etc. I. Sánchez Oré, Ángel Felipe Martin, 1972- II. Sánchez Vásquez, Arturo III. Esqueche Paiconcial, Juan, 1979- IV. Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Lima) V. Serie

BNP: 2020-003

Aritmética: análisis razonado del número y sus aplicaciones

Autor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Editor: Asociación Fondo de Investigadores y Editores
Diseño y diagramación: Asociación Fondo de Investigadores y Editores

© **Asociación Fondo de Investigadores y Editores**
Av. Alfonso Ugarte N.° 1426, Breña. Lima-Perú. Telefax: 01-332 3786
Para su sello editorial **Lumbreras Editores**
Página web: www.elumbreras.com.pe
Primera edición: marzo de 2020
Tiraje: 6000 ejemplares
ISBN: 978-612-307-949-9
Registro del proyecto editorial N.° 31501052000059
"Hecho el depósito legal en la Biblioteca Nacional del Perú" N.° 2020-00901
Prohibida su reproducción total o parcial. Derechos reservados D. LEG. N.° 822

Distribución y ventas al por mayor y menor
Teléfono: Lima y provincia: 01-332 3786
ventas@elumbreras.com.pe

Esta obra se terminó de imprimir en los talleres gráficos de la Asociación Fondo de Investigadores y Editores en el mes de marzo de 2020.
Calle Las Herramientas N.° 1865 / Av. Alfonso Ugarte N.° 1426, Lima-Perú.
Teléfono: 01-336 5889

Índice

Presentación 11
Introducción 13

Reseña histórica

Historia de la aritmética 18
- Proceso evolutivo de la aritmética 18
- Necesidad de ampliar el conjunto numérico 19
- Del número al numeral 19
- Sistema de numeración 22

Protagonistas de la aritmética y sus aportes a través de la historia 29
- Orígenes de la aritmética 29
- Origen del conjunto de los números irracionales 31
- Matemáticos árabes y su trascendencia 32
- La matemática en la Edad Media 34
- Los avances matemáticos del siglo XVI 34
- Teoría actual de los números 35
- Logros alcanzados desde el siglo XIX hasta la actualidad 40

Lógica proposicional

Definición 46
Enunciado 46
- Enunciado cerrado, proposición lógica o proposición 46
- Enunciado abierto o cuasiproposición 48

Clasificación de las proposiciones 49
- Proposición simple o atómica 49
- Proposición compuesta o molecular 49

Análisis de las proposiciones compuestas básicas 50
- Negación 50
- Conjunción 51
- Disyunción débil o inclusiva 52
- Disyunción fuerte o exclusiva 52
- Condicional 53
- Bicondicional 55

Circuitos lógicos 57
- Circuito en serie 57
- Circuito en paralelo 57

Esquema molecular 57
Evaluación de esquemas moleculares 58
Formalización de un esquema molecular 59
Clasificación de los esquemas moleculares 60
- Tautología (T) 60
- Contradicción (⊥) 61
- Contingencia (Q) 61

Relaciones entre esquemas moleculares 61
- Implicación lógica (⇒) 61
- Equivalencia lógica (⇔) 61

Leyes de la lógica proposicional 62
Biografía: Augustus De Morgan 64
Problemas resueltos 65
Test 73
Problemas propuestos 74

Teoría de conjuntos

Nociones básicas 82
Diagramas de conjuntos 83
- Diagrama de Venn-Euler 83
- Diagrama de Lewis Carroll 85

Relación de pertenencia 85
Cardinal de un conjunto 86
Cuantificadores 87
- Cuantificador universal 87
- Cuantificador existencial 87
- Negación de los cuantificadores 88

Determinación de un conjunto 89
- Por extensión 89
- Por comprensión 89

Tipos de conjuntos 91
- Conjuntos finitos 91
- Conjuntos infinitos 91

Relaciones entre conjuntos 91
- Relación de inclusión 91
- Diagrama lineal 92
- Relación de comparabilidad 93
- Relación de igualdad 93
- Conjuntos disjuntos 93
- Conjuntos equipotentes 94

Conjuntos especiales 95
- Conjunto vacío 95
- Conjunto unitario 95
- Conjunto universal 96
- Conjunto de conjuntos 96
- Conjunto potencia 96
- Par ordenado 97

Operaciones entre conjuntos 98
Complemento 98
Intersección....98
Unión o reunión 99
Diferencia 99
Diferencia simétrica 100
Producto cartesiano....101
Leyes del álgebra de conjuntos 104
Para un conjunto....104
Para dos conjuntos....104
Para tres conjuntos....105
Lectura: Acerca de la historia de la teoría de conjuntos 109
Problemas resueltos 110
Test 119
Problemas propuestos 120

NUMERACIÓN

Definición 128
Nociones previas 128
Número 128
Numeral....128
Cifra....128
Numeración romana 128
Sistema posicional de numeración 129
Principios fundamentales 129
Representación literal de los números....134
Numeral capicúa 135
Escritura y lectura de un número en el sistema decimal....137
Reglas para escribir un número 138
Reglas para leer un número 138
Descomposición polinómica 139
Descomposición cifra por cifra....139
Descomposición por bloques 139
Paridad de un numeral 139
Para una base par....139
Para una base impar....140
Métodos para expresar un numeral en otros sistemas de numeración diferentes al que se encuentra escrito....142
De base diferente de diez a base diez 142
De base diez a base diferente de diez 143
Propiedades....145
Del numeral de cifras máximas 145
De las bases sucesivas....146
Intervalo en el cual se encuentran los numerales con cierto número de cifras....147
Casos especiales de cambio de base 148
Lectura: La numeración antigua egipcia 152
Problemas resueltos 153
Test 161
Problemas propuestos 162

OPERACIONES BÁSICAS EN EL CONJUNTO $\mathbb{Z}^+$

Nociones previas 170
Relaciones binarias de un mismo conjunto....170
Operaciones binarias....170
Adición 170
Propiedades de la adición en $\mathbb{Z}_0^+$ 172
La adición en otros sistemas de numeración....173
Sustracción 174
Propiedades de la sustracción 175
La sustracción en otros sistemas de numeración 178
Complemento aritmético (CA) 180
Multiplicación 183
Propiedades de la multiplicación en $\mathbb{N}$ 184
Multiplicación en otros sistemas de numeración 185
Multiplicación donde uno de los factores es un numeral de cifras máximas....187
División....188
Clases de división....188
Alteraciones de la división inexacta 190
Determinación *a priori* de la cantidad de cifras de un producto y un cociente 192
Con respecto al producto de dos números 192
Con respecto al cociente de la división de dos números 193
Lectura: Matemáticas en el Imperio incaico....194
Problemas resueltos 195
Test 203
Problemas propuestos 204

SUCESIONES Y SERIES

Sucesiones....212
Definición 212
Tipos de sucesiones 212
Sucesión literal....212
Sucesión gráfica 212
Sucesión numérica 213
Métodos de representación de las sucesiones 213
Método analítico 213
Método recurrente 213
Método descriptivo 214
Representación gráfica de una sucesión....215
Operaciones con sucesiones 216
Adición y sustracción 216
Multiplicación 216
Multiplicación por un escalar....216
División....216

Clasificación de las sucesiones 217
De acuerdo al número de términos 217
De acuerdo con la relación entre sus términos 217
Sucesiones polinomiales 218
Sucesión polinomial de primer orden (sucesión lineal) 219
Sucesión polinomial de segundo orden (sucesión cuadrática) 222
Término enésimo de una sucesión polinomial de un orden cualquiera 225
Sucesión geométrica o progresión geométrica 226
Series 227
Definición 227
Notación sigma 227
Propiedades 227
Sumatorias notables 228
Suma de los *n* primeros números naturales 228
Suma de los *n* primeros números cuadrados perfectos 228
Suma de los *n* primeros números cubos perfectos 228
Sumatorias notables adicionales 229
Suma de los *n* primeros números pares 229
Suma de los *n* primeros números impares 230
Suma de los *n* primeros productos de dos consecutivos 230
Suma de los *n* primeros productos de tres consecutivos 230
Suma para una progresión geométrica finita 231
Suma de las potencias consecutivas de un entero 232
Suma para una progresión geométrica infinita 232
Suma de los términos de una sucesión aritmética 233
Suma de los términos de una sucesión de segundo orden 234
Conteo de cifras usadas en una sucesión natural 235
Lectura: Sucesión de Fibonacci 238
Problemas resueltos 239
Test 247
Problemas propuestos 248

TEORÍA DE DIVISIBILIDAD

Definición 256
Divisibilidad 256
Multiplicidad 256
Representación de los no múltiplos de un número entero positivo 261
Principios fundamentales de divisibilidad 262
Respecto a las operaciones básicas con múltiplos de un mismo módulo 262
Respecto a los divisores de un módulo 266
Cuando un número es múltiplo de varios módulos 267
Respecto a múltiplos de alguna potencia de la base de un número 270
Principio de Arquímedes 271
Ecuaciones diofánticas lineales 274
Congruencias 276
Definición 276
Restos potenciales 277
Criterios de divisibilidad 280
Criterio de divisibilidad por 2^n o 5^n 282
Criterio de divisibilidad por 9 o 3 284
Criterio de divisibilidad por 11 286
Criterio de divisibilidad por 7 287
Criterio de divisibilidad por 13 287
Criterio de divisibilidad por $(n^K \pm 1)$ 288
Biografía: Carl Friedrich Gauss: El príncipe de las matemáticas 292
Problemas resueltos 293
Test 301
Problemas propuestos 302

ESTUDIO DE LOS DIVISORES ENTEROS POSITIVOS DE UN NÚMERO

Clasificación de los números enteros positivos 310
Clasificación según la cantidad de divisores enteros positivos 310
Propiedades de los números primos 311
Método para determinar si un número es primo o compuesto 314
La criba de Eratóstenes 315
Teorema fundamental de la aritmética 316
Descomposición canónica (D. C.) 317
Clasificación de los números enteros positivos en grupo de dos o más números 319
Números primos entre sí (PESI) 319
números primos entre sí 2 a 2 (PESI 2 a 2) 322
Estudio de los divisores enteros positivos de *N* 323
Cantidad de divisores de *N*, CD(*N*) 324
Suma de divisores de *N*, SD(*N*) 329
Suma de las inversas de los divisores de *N*, SID(*N*) 332
Producto de los divisores de *N*, PD(*N*) 335
Descomposición canónica del factorial de un número entero positivo 338
Fórmula de Polignac 339
Cantidad de formas de descomponer un número entero positivo *N* como el producto de dos de sus divisores, *F*(*N*) 340

Función de Euler o indicador de un número entero positivo 342
Propiedades de la función de Euler 344
Complementos del estudio de los divisores enteros positivos de un número 347
Teorema de Euler 347
Teorema de Fermat 347
Teorema de Wilson 348
Números perfectos 349
Números abundantes 350
Números defectuosos 350
Números amigos 350
Números primos gemelos 351
Conjetura de Goldbach 351
Números primos de Mersenne 352
Lectura: Los números primos en la criptografía 354
Problemas resueltos 355
Test 363
Problemas propuestos 364

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Máximo común divisor (MCD) 372
Definición 372
Identidad de Étienne Bézout 375
Algoritmo de Euclides (divisiones sucesivas) 376
Propiedades del MCD 378
Mínimo común múltiplo (MCM) 380
Definición 380
Propiedades del MCM 382
Métodos para calcular el MCD y el MCM 383
Por descomposición conjunta 383
Por descomposición canónica 384
Propiedades que relacionan el MCM y el MCD 385
Para dos números 385
Para más de dos números 387
Lectura: La obra de Euclides 392
Problemas resueltos 393
Test 401
Problemas propuestos 402

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN $\mathbb{Z}^+$

Potenciación 410
Definición 410
Teorema fundamental de la potenciación 410
Potencia perfecta de grado 2 (cuadrado perfecto, k^2) 412
Propiedades 413
Potencia perfecta de grado 3 (cubo perfecto, k^3) 414
Criterios de inclusión y exclusión para cuadrados y cubos perfectos 416
Según su última cifra 416
Por terminación en cifras ceros 417
Por su terminación en la cifra 5 418
Por criterios de divisiblidad 420
Radicación 423
Definición 423
Raíz cuadrada entera ($\sqrt{\ }$) 423
Raíz cuadrada exacta 423
Raíz cuadrada inexacta 424
Regla para extraer la raíz cuadrada de un número 427
Raíz cúbica entera ($\sqrt[3]{\ }$) 428
Raíz cúbica exacta 429
Raíz cúbica inexacta 430
Raíz cuadrada y cúbica con cierta aproximación 432
Para raíz cuadrada 432
Para raíz cúbica 433
Lectura: Los números grandes 434
Problemas resueltos 435
Test 443
Problemas propuestos 444

NÚMEROS RACIONALES

Introducción a los números racionales ($\mathbb{Q}$) 452
Clase de equivalencia 452
Representante canónico de una clase de equivalencia 453
Conjunto de los racionales 453
Densidad de un conjunto 454
Números fraccionarios 455
Fracción 456
Representación gráfica de una fracción 456
Simplificación de una fracción 458
Fracción de fracción 458
Clasificación de las fracciones 459
Comparación de fracciones 462
Operaciones con fracciones 464
Propiedades de las fracciones 466
Números decimales 470
Descomposición polinómica 471
Clasificación de los números decimales (avales) 471
Cambio de base de números avales 477
Fracciones continuas 481
Fracción continua simple finita (FCSF) 482
Fracción continua simple infinita (FCSI) 484
Convergentes de una fracción continua simple 488
Biografía: Srinivasa Ramanujan 491
Problemas resueltos 492
Test 501
Problemas propuestos 502

Razones y Proporciones

Razones 510
Definición 510
Clases de razones 510
Razón aritmética 510
Razón geométrica 511
Razón armónica 514
Aplicaciones de las razones 516
En problemas de edades 516
En problemas de móviles 517
En problemas de mezclas homogéneas 518
Serie de razones geométricas equivalentes (SRGE) 520
Propiedades de la SRGE 523
Serie de razones geométricas equivalentes continuas 526
Proporciones 528
Definición 528
Clases de proporciones 528
Proporción aritmética 528
Proporción geométrica 529
Proporción armónica 531
Lectura: El problema del joyero 534
Problemas resueltos 535
Test 543
Problemas propuestos 544

Magnitudes proporcionales

Definiciones previas 552
Magnitud 552
Cantidad 552
Relación entre magnitudes 553
Magnitudes directamente proporcionales 553
Magnitudes inversamente proporcionales 558
Propiedades de las magnitudes proporcionales 563
Aplicaciones de las magnitudes 566
Reparto proporcional 566
Sistemas de engranaje 569
Regla de compañía 571
Problemas relacionados con obras 574
Lectura: ¿Qué es la magnitud? 576
Problemas resueltos 577
Test 585
Problemas propuestos 586

Tanto por cuanto

Definición 594
Casos particulares 595
Tanto por mil (‰) 595
Partes por millón (ppm) 595
Tanto por ciento (%) 596
Regla del tanto por ciento 596
El tanto por ciento que representa una cantidad con respecto de otra 597
Equivalencias del tanto por ciento en fracciones 598
Operaciones con el tanto por ciento 599
Problemas sobre variación porcentual (Δ%) 602
Descuentos y aumentos sucesivos 604
Descuentos sucesivos 604
Aumentos sucesivos 605
Aplicaciones comerciales del tanto por ciento 607
Lectura: ¿Cuánta agua hay en el planeta? 610
Problemas resueltos 611
Test 619
Problemas propuestos 620

Regla de interés

Elementos de la regla de interés 628
Capital (C) 628
Tiempo (t) 628
Tasa de interés (r%) 629
Interés (I) 630
Monto (M) 630
Clases de interés 630
Interés simple 630
Interés compuesto 634
Interés continuo 639
Lectura: Fondo de Seguro de Depósitos (FSD) 642
Problemas resueltos 643
Test 651
Problemas propuestos 652

Regla de descuento

Aplicación comercial de la regla de descuento 660
Elementos de la regla de descuento 661
Valor nominal (V_n) 661
Valor actual (V_a) 661
Descuento (D) 661
Tiempo de descuento (t) 661
Tasa de descuento (r%) 661
Clases de descuento 661
Descuento comercial (D_c) 661
Descuento racional (D_r) 662
Propiedades 662
Respecto a los valores actuales 662
Respecto a los descuentos y valores actuales 662
Respecto a los descuentos 662
Respecto al valor nominal 663
Respecto al descuento racional 663
Respecto a la relación de los descuentos 663
Respecto a la relación de los valores actuales 663
Cambio de letras 666
Vencimiento común 666
Lectura: El descuento de pagarés 674
Problemas resueltos 675
Test 683
Problemas propuestos 684

PROMEDIOS

Definición 692
Promedios importantes....692
Promedio aritmético o media aritmética $(\overline{MA})$ ...692
Promedio geométrico o media geométrica $(\overline{MG})$...699
Promedio armónico o media armónica $(\overline{MH})$...700
Propiedades de los promedios estudiados 701
Para un conjunto de dos o más datos 701
Solo para dos datos (*a* y *b*) 702
Lectura: ¿Qué es el índice de precios al consumidor (IPC)? 704
Problemas resueltos 705
Test 713
Problemas propuestos 714

REGLA DE MEZCLA

Definición 722
Mezcla 722
Precio medio (P_m) 722
Mezcla alcohólica 729
Grado o pureza de un alcohol (°) 730
Grado medio (G_m) 731
Aleación 734
Lectura: Aleación y metales del siglo XX 740
Problemas resueltos 741
Test 749
Problemas propuestos 750

INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

¿Qué es la estadística? 758
Clases de estadística 759
Estadística descriptiva 759
Estadística inferencial 759
Conceptos de términos usados en estadística 759
Población 759
Muestra 760
Variable 760
Dato 761
Investigación estadística 762
Etapas de la investigación estadística 762
Recolección de datos 764
Técnicas de recolección de datos 764
Organización y presentación de los datos 769
Cuadro estadístico 769
Tabla estadística 773
Elementos de una tabla de frecuencias 780
Representación gráfica 783
Medidas de posición 785
Media aritmética $(\overline{MA}; \bar{x})$ 785
Mediana (*Me*) 787
Moda (*Mo*) 789
Relación entre moda, media y mediana 794
Medidas de dispersión 795
Varianza y desviación estándar para datos no agrupados 795
Cálculo de la varianza y la desviación estándar para datos agrupados 797
Coeficiente de variación (CV) 799
Lectura: Breve historia de la estadística 800
Problemas resueltos 801
Test 809
Problemas propuestos 810

ANÁLISIS COMBINATORIO

Definición 818
Principios fundamentales de conteo 818
Principio de adición 818
Principio de multiplicación 819
Factorial de un número 821
Permutación 822
Permutación lineal 822
Permutación circular 823
Permutación con elementos repetidos 826
Combinaciones 828
Combinación con repetición 829
Lectura: Historia de la combinatoria 830
Problemas resueltos 831
Test 839
Problemas propuestos 840

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Conceptos importantes 848
Experimento aleatorio (ε) 848
Espacio muestral (Ω) 848
Evento 849
Operaciones con eventos 850
Eventos mutuamente excluyentes o disjuntos 850
Definición clásica de probabilidad 851
Propiedades de las probabilidades 852
Probabilidad condicional 854
Función de probabilidad 855
Definición 855
Variable aleatoria 856
Esperanza matemática 858
Varianza de una variable aleatoria discreta 859
Biografía: Fibonacci 860
Problemas resueltos 861
Test 869
Problemas propuestos 870
Claves 875
Bibliografía 877

Presentación

La Asociación Fondo de Investigadores y Editores (Afined), a través de su sello Lumbreras Editores, se complace en presentar su nueva publicación ***Aritmética: análisis razonado del número y sus aplicaciones***, la cual forma parte de la colección Ciencias y Humanidades.

Esta publicación constituye un nuevo aporte al desarrollo de la educación en nuestra sociedad, en tiempos donde el avance tecnológico y el uso de los nuevos medios van generando cambios rápidamente, y donde el acceso y el aprovechamiento de estos resultan desiguales en nuestro país. Por ello la importancia de estas publicaciones, que además tienen el respaldo del trabajo serio y orientado al servicio y a la formación integral de los estudiantes.

Conscientes de esta realidad, nuestra editorial –con presencia en distintos lugares del Perú– presenta esta colección, la cual es fruto del trabajo organizado y en conjunto con las distintas planas de profesores del Instituto de Ciencias y Humanidades, promotor de las academias Aduni y César Vallejo, cuya experiencia y dedicación en la formación de jóvenes estudiantes se ven reflejadas a lo largo de las siguientes páginas.

El esfuerzo de las distintas planas está enfocado, además de la enseñanza y la formación integral, en la investigación, tanto en matemáticas como en ciencias naturales y humanidades. Agradecemos el trabajo y la dedicación de los docentes, quienes finalmente canalizan y orientan el contenido de cada obra con el fin de alcanzar el máximo nivel y calidad, y hacer entendible aquello que a veces resulta complicado para el estudiante, no solo de los niveles secundario y preuniversitario, sino también de los primeros ciclos de la universidad. De esta manera, destacamos el trabajo profesional realizado por Ángel Felipe Martin Sánchez Oré, Arturo Sánchez Vásquez, Juan Arsenio Esqueche Paiconcial, Raúl Flores Rivero, Henrry Orlando Castañeda Palacios, Ramiro Fortunato Díaz Vásquez y William Nilthon Huamán Arotoma, profesores de la plana de Aritmética, quienes asumieron el proceso de sistematización del presente texto debido a su experiencia tanto en la docencia como en la elaboración de materiales educativos.

Finalmente, queremos resaltar el compromiso de nuestra institución de continuar aportando con nuevas publicaciones que contribuyan a mejorar la calidad de la labor educativa, además de incentivar el trabajo de investigación y humanístico, el cual creemos que debe estar siempre cerca de las grandes mayorías.

Asociación Fondo de Investigadores y Editores

Introducción

La aritmética estudia principalmente las características, propiedades y relaciones que se dan entre los números; este concepto ha ido evolucionando hasta la actualidad, siendo utilizado por todas las culturas no solo como proceso de conteo o de cuantificación, sino como parte cotidiana en el desarrollo del hombre y su interrelación con la realidad, en diversos niveles sociales, financieros, económicos, etc.

El libro *Aritmética: análisis razonado del número* surge con el objetivo de que el estudiante aprenda a interpretar, analizar y elaborar estrategias adecuadas para resolver cualquier tipo de problema matemático, por ello los contenidos han sido desarrollados con rigor conceptual y de forma didáctica. Cada concepto teórico está apoyado en demostraciones y propiedades que sustentan y facilitan su entendimiento.

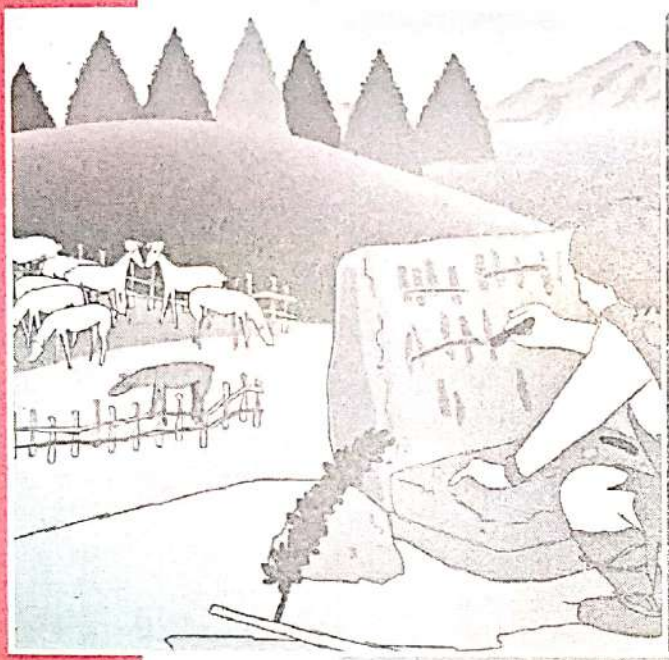
El libro presenta 21 capítulos que abordan los diferentes campos de la aritmética. Parte de una breve reseña histórica, su evolución en el proceso social de la humanidad, para luego mostrar los temas que corresponden a la lógica proposicional y teoría de conjuntos, continuando con la teoría de números, en sus diversos conceptos, seguido de la aritmética razonada, la aritmética comercial y la aritmética financiera, para concluir con una introducción a la estadística, el análisis combinatorio e introducción a las probabilidades.

El texto ha sido concebido para estudiantes del nivel preuniversitario, pero también resultará beneficioso para estudiantes universitarios de los primeros ciclos, debido a que presenta información fundamental de los cursos de dichos ciclos, como lógica proposicional, teoría de conjuntos, entre otros.

Finalmente, manifestamos nuestro agradecimiento a la Asociación Fondo de Investigadores y Editores por la confianza depositada en nosotros, a nuestras familias por su apoyo y comprensión, a los estudiantes, a los compañeros profesores de la plana de Aritmética y a toda la comunidad educativa porque mediante sus preguntas y sugerencias nos estimulan a continuar investigando y trabajando por la educación integral de nuestro país.

Capítulo

1



Reseña histórica

Juan Esqueche Paiconcial

CAPÍTULO I

RESEÑA HISTÓRICA

Objetivos

- Reconocer el desarrollo histórico de la aritmética.
- Comprender la evolución de la aritmética en el proceso económico-social de la humanidad.
- Reconocer la importancia del aporte de algunos matemáticos notables.

Introducción

Etimológicamente, se afirma que la palabra *aritmética* proviene de la fusión de dos vocablos griegos: *arithmo*, que significa 'número', y *et-ica* (son interfijo y sufijo, respectivamente), que significa 'tratado' o 'estudio'. En tal sentido, podemos asumir que *aritmética* significa 'tratado o estudio de los números'. No obstante, algunos afirman que proviene de *aritmo*, que significa 'número' o 'conteo', y *tékhne*, que significa 'arte'; por consiguiente, también podríamos afirmar que *aritmética* se interpreta como el 'arte del contar'.

La aritmética se vincula con las relaciones entre números, aunque las relaciones entre números resulten formas abstractas de las relaciones cuantitativas reales entre los conjuntos de objetos. Por esta razón, se puede indicar que la aritmética es la ciencia dedicada a las relaciones cuantitativas reales, consideradas también de manera abstracta, es decir, en forma pura.

Del sencillo proceso de contar los objetos uno por uno, pasamos a la noción sobre el proceso ilimitado de formación de los números; la sucesión de los números se piensa ya como prolongación ilimitada, y con ello entra el infinito a la matemática. Los teoremas generales exigen demostrarse por medio de razonamientos generales que partan de la propia ley de formación de la serie numérica. Aquí se revela una profunda particularidad de la matemática.

De esta forma, la aritmética se convierte en la **teoría de los números**. Esta se abstrae de los problemas particulares concretos para enfocarse hacia el dominio de los conceptos y razonamientos abstractos, convirtiéndose en una rama de la matemática pura. Además, este fue el momento del nacimiento de la matemática pura con todas sus particularidades (su carácter abstracto, su gran rigorismo, su amplia aplicación en otras ciencias y en la técnica, etc.). Es necesario observar que esta nació, simultáneamente, a partir de la aritmética y de la geometría.

Actualmente, el desenvolvimiento de la matemática, en conjunto, influye mayormente en el desarrollo de la aritmética y de las ciencias contiguas a ella, lo que se ha manifestado, por ejemplo, en la construcción axiomática de la aritmética, es decir, en la sistematización de la misma sobre la base de un cierto número de axiomas.

Apreciamos así que los procedimientos y métodos de cálculo utilizados en la aritmética han obtenido un amplio desarrollo y aplicación en las técnicas matemáticas modernas de cálculo.

1 ▸ HISTORIA DE LA ARITMÉTICA

1.1. PROCESO EVOLUTIVO DE LA ARITMÉTICA

La parte más difícil de escribir sobre una disciplina científica es aquella que implica sus orígenes, pues estos se encuentran siempre en la bruma de los días prehistóricos, tan llenos de conjeturas e hipótesis como de vacíos de hechos concretos y fidedignos. Solo puede afirmarse que el hombre primitivo poseía una aritmética, ya que necesitaba contar objetos o cabezas de ganado, claro que en un inicio la abstracción era desconocida por nuestros antepasados, por ejemplo, cuando contaban sus rebaños para no perder ningún animal. Esto representó el origen de la aritmética.

1.1.1. La matemática florece con el hombre

La historia de la aritmética nos remonta hasta el grado más primitivo del desarrollo de la humanidad. Desde el primer instante en que apareció el hombre, mucho antes de que aprendiera a pensar en sí mismo, a razonar o a tener siquiera el primer concepto, todo su pequeño mundo circundante le estaba hablando de matemática: la distancia de su cueva al río, el número de plantas, los grupos de animales que veía, la comparación de su velocidad para correr a la caza de su presa o para escapar de los peligros que le acechaban, el lapso entre el amanecer y el anochecer, el transcurrir incesante de los días, el crecimiento de su tribu y, en fin, todo cuanto le rodeaba.

Al observar animales, el hombre empieza a tener la necesidad de representar la cantidad que veía.

1.1.2. Primer conjunto de comparación: los dedos de las manos

No tardó mucho el hombre en darse cuenta de que en los dedos de las manos tenía un instrumento auxiliar para fijar las colecciones no muy grandes de objetos o animales. Al corresponder un dedo a cada objeto de una colección cualquiera, fue observando que esta comparación podía realizarse con cualquier conjunto de cosas, sean cuales fueran los objetos de los que estuviesen integrados. Estos cinco dedos de una mano, los diez dedos de las dos manos o los veinte dedos de las cuatro extremidades dieron origen, posteriormente, a los sistemas numéricos quinario, decimal y vigesimal, respectivamente.

Uno de los instrumentos de comparación fueron los dedos de la mano.

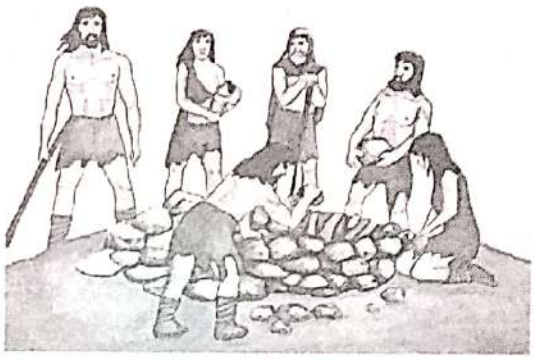
1.1.3. Los sonidos como instrumentos de conteo

Un destello de luz iluminó la mente del ser humano y le permitió a este asociar una voz o un sonido con cada dedo de su mano. Así como lo hacen los niños hoy en día, así como van separando sucesivamente un dedo a la vez que mencionan un número, cuando pasan un dedo o una piedra, el hombre fue encontrando sonidos o voces para cada una de las situaciones numéricas. Pasar a la comparación de un conjunto integrado por entes inmateriales (sonidos o voces) con otro integrado por entes materiales (dedos de las manos)abrió un nuevo horizonte para su progreso, pues era un instrumento eficaz al momento de calcular.

El hombre antiguo asignó a cada dedo un sonido particular.

1.2. NECESIDAD DE AMPLIAR EL CONJUNTO NUMÉRICO

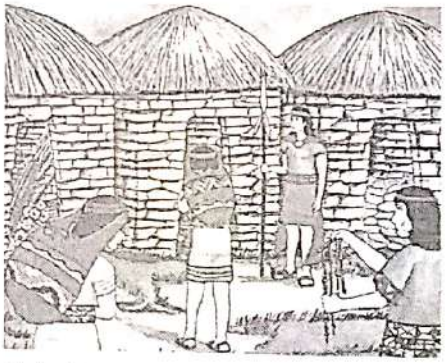
Al aumentar el campo de sus actividades o el número de integrantes de su tribu, la necesidad de cazar más animales o recoger más frutos generó, a su vez, la necesidad de comparar conjuntos cada vez más grandes y que, por lo tanto, sobrepasen al conjunto auxiliar de los dedos de las manos. Por ello ideó el empleo de piedras pequeñas: durante el pastoreo de su ganado en las montañas, por cada uno de los animales colocaba una piedrecilla en el montón que le serviría de control. Si al volver el ganado, en la tarde, a cada uno le correspondía una piedrecilla, sin que sobrase ninguna, significaba que todos los animales habían regresado. De esta manera comenzó a familiarizarse con la comparación de conjuntos cada vez más grandes, este hecho, constituyó un salto considerable en la evolución del espíritu matemático del hombre, un paso de gran trascendencia hacia la abstracción.



Al contabilizar cantidades más grandes se debía ir agregando nuevos instrumentos de conteo.

1.2.1. Surge la agricultura y, con ella, nuevas necesidades

Inicia una nueva era en la vida del hombre, acaso mucho más allá de los diez mil años atrás respecto de nuestra época, cuando después de la glaciación de Europa y de Asia aparecieron las florestas y los desiertos. La fijación del hombre a la tierra a través de la agricultura le brindó la oportunidad que su vida errante le había privado durante muchos milenios para poder construir sus viviendas y sus utensilios, para medir sus tierras y construir pequeños canales de irrigación; además, para desarrollar su imaginación y orientarla hacia el dominio de la forma y del cálculo.

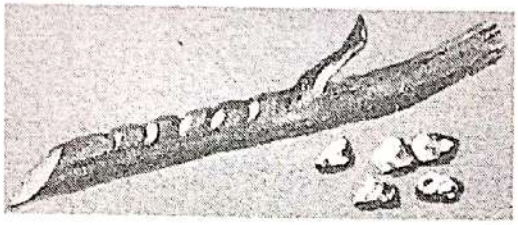


Al dedicarse a la agricultura el hombre debe implementar nuevos mecanismos de conteo y a la vez medir sus terrenos.

El girar su vida en torno al cultivo de la tierra lo obligó a construir sus viviendas permanentes; para no estar aislado y expuesto a la inclemencia del tiempo y al acecho de los animales salvajes formó las primeras aldeas. Es así que cuando la agricultura exige mayor desarrollo y las cosechas son abundantes, su capacidad de previsión lo lleva a construir graneros para guardar sus reservas, en caso de tiempos difíciles. Al finalizar el Neolítico, pudo perfeccionar los botes y los refugios porque sabía trabajar con cobre y bronce.

1.3. DEL NÚMERO AL NUMERAL

Sobre el origen de las representaciones numéricas se puede asegurar que no se remontan más allá del individuo aislado, en el seno de la especie humana. Otras condiciones previas de la aritmética son las palabras que expresan los números y los signos que lo representan, es decir, los términos numéricos y las cifras. A estos condujo especialmente la necesidad del trato con los demás hombres.



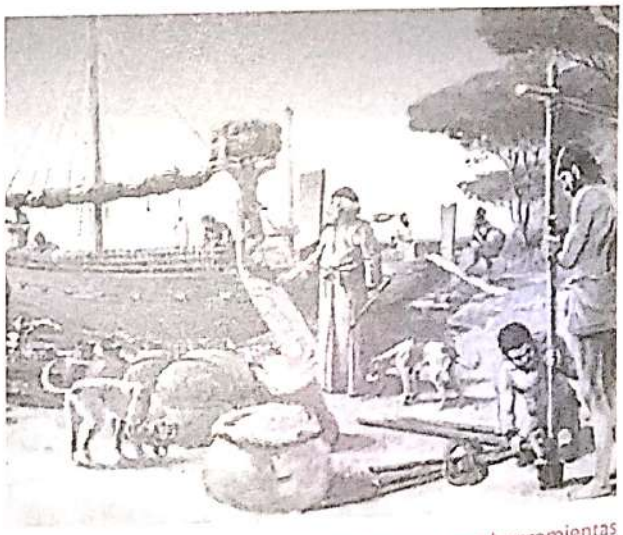
Una cantidad de objetos se puede representar de muchas formas; por ejemplo, con marcas en una rama, con piedras, etc.

Podemos encontrar sus orígenes en el hecho de que un solo objeto era representado por una sola marca, sea una raya horizontal, vertical o inclinada, es decir, también una sola piedrecilla, una muesca, un palito, un pedazo de corteza, etc.

Resulta necesario precisar los respectivos alcances de las palabras *número* y *numeral*, ya que, si bien un número es una idea, un concepto, un numeral es otra cosa: es el símbolo que nos sirve para representar esa idea, ese concepto. Para aclarar aún más que un mismo número puede estar representado por numerales distintos, según sea el sistema numérico del cual se trate.

1.3.1. El avance del comercio inspira a la numeración

La representación de los números por medio de rayas, marcas u objetos minúsculos no presentó mayores dificultades mientras fueran pequeños. Sin embargo, el crecimiento de las tribus, junto con el constante desarrollo de sus necesidades, así como el intercambio comercial con otras tribus, lo obligaron a pensar en cantidades cada vez más grandes, a comparar conjuntos cada vez mayores y, por consiguiente, a una expresión escrita y hablada cada vez más complicada y trabajosa.



El avance comercial hace posible contar con herramientas más sofisticadas para el cálculo.

Para aliviar esta dificultad, cada vez que llegaba a cierto número de objetos, prefería agruparlos en conjuntos siempre iguales, como montoncitos de corteza o piedras, atados de palitos, sean de cinco, diez o veinte unidades.

Sobre la base de estos grupos de cinco, diez o veinte objetos, le fue posible ir formando grupos cada vez más grandes, por simple agregación de unidades, primero, y de grupos, después. Decía, por ejemplo, "dos, tres, cuatro, grupos más tres objetos". Con esto se dio origen a una numeración muy primitiva, que fue un antepasado remoto de los modernos sistemas de numeración.

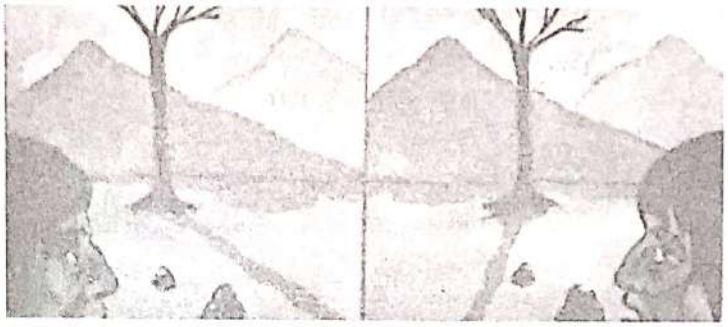
1.3.2. El número como ente abstracto

Los primeros conceptos numéricos fueron más bien cualitativos que cuantitativos. Al decir, por ejemplo, "tres patos y cinco manzanas", no podían concebir la idea de tres o de cinco, independientemente de esos patos o de esas manzanas. Tuvo que transcurrir todavía mucho tiempo para que se dieran cuenta de que un conjunto de cinco ovejas y otro de cinco perros representaban la misma pluralidad, y que tenían en común la posibilidad de ser igualados. Solo cuando tuvieron conciencia cabal de este hecho se elevó el número a la categoría de ente abstracto.

Cada sociedad representaba una cantidad de distinta forma.

1.3.3. Orientación y medición del tiempo, no simple curiosidad

La curiosidad y la necesidad estimularon continuamente al hombre; al observar, por ejemplo, la repetición periódica de ciertos fenómenos tuvo que ir descubriendo la constancia de ciertas relaciones cuantitativas, así comenzó a ampliar un tanto sus primeros rudimentos aritméticos.



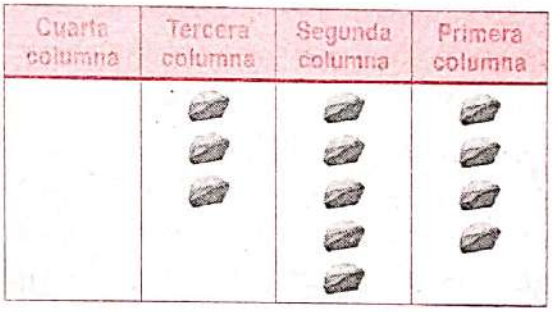
Al observar los cambios entre el día y la noche, el hombre antiguo se dio cuenta de que había cierta periodicidad.

El hecho de conocer con precisión el transcurrir del tiempo se va convirtiendo en una necesidad cada vez más imperiosa. ¿Cómo saber la época exacta de encontrar frutos en aquellos lugares que ya había explorado? En sus largos viajes nocturnos observa el crecimiento diario de la luna y luego su constante decrecer, hasta desaparecer ante sus ojos, lo que según sus cálculos se repetía cada treinta días.

Otra de las observaciones de inmensa trascendencia fue el hecho de que el sol no siempre aparece por el mismo lugar, pues a veces sale más hacia el norte y otras veces más hacia el sur de algún punto de referencia. Con el correr del tiempo pudo establecer que cada doce lunas volvía a aparecer el sol, exactamente por el mismo lugar; de esta forma desarrolló la primera noción del año de trescientos sesenta días.

1.3.4. Instrumentos de cálculo y de representación numérica

Se manifestó no solo la necesidad de representar números cada vez mayores, sino que la rapidez y exactitud en el cálculo significaron factores importantes en las operaciones comerciales. En determinado momento de la historia de la cultura surgió la idea de dar a cada piedrecilla un valor de posición; por ejemplo, cada una de las que estuviese en la primera columna valdría una unidad simple; cada una de las que estuviese en la segunda columna valdría diez; cada una de las que estuviese en la tercera columna valdría cien; en la cuarta columna mil, y así sucesivamente.

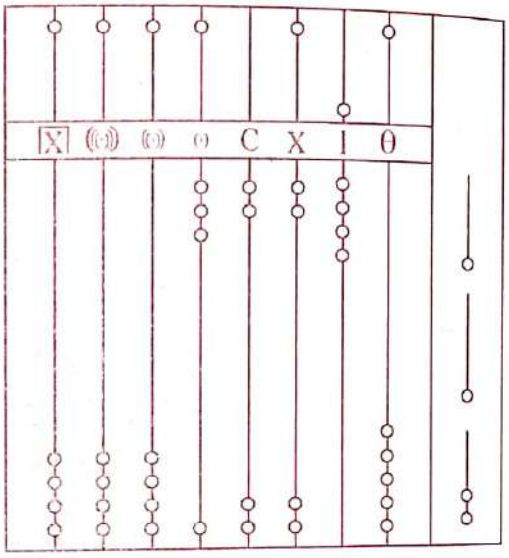


En el recuadro podemos observar, por ejemplo, el número trescientos cincuenta y cuatro formado por piedrecitas.

De esta manera, por ejemplo, el número trescientos cincuenta y cuatro está dado en la forma que se indica en el cuadro mostrado. Esta valiosa invención, tan sencilla como parece, fue el inicio de una etapa de vertiginoso progreso.

La invención del ábaco facilitó y aceleró el establecimiento del sistema decimal de numeración. La palabra latina *abacus* significa 'tablero', es por eso que al ábaco se le llama también tablero contador.

El ábaco de líneas era una especie de tablero rectangular que llevaba grabadas ocho líneas (probablemente verticales). Encima de ellas, de derecha a izquierda, se colocaba una tablilla o regleta que contenía escritos los signos que indicaban el valor de cada línea vertical. Dicha tablilla dejaba dividido el tablero en dos secciones desiguales. En la sección superior (la corta), se colocaba sobre cada línea un botón o bolita movible, y en la sección inferior (la larga), se colocaban cuatro de estos botones o bolitas en cada línea. La primera línea de la sección inferior contenía, por excepción, cinco botones o bolitas. Cada bolita de la sección superior representaba cinco veces el valor de cada una de las bolitas de la sección inferior. Si se quería representar un número con las bolitas, se corrían estas a ambos lados de la tablilla horizontal divisoria (según la significación de su valor de posición). Su empleo en el comercio generó una nueva necesidad: la de los signos operatorios.



El ábaco de líneas se usó en el Occidente cristiano de Europa hasta el siglo X.

1.4. SISTEMA DE NUMERACIÓN

Un **sistema de numeración** es un conjunto de símbolos y reglas convencionales que permiten expresar verbal y gráficamente los números. Todos los sistemas de numeración guardan ciertas características en común. El número de símbolos básicos es finito y varía desde tan pocos, como dos, hasta treinta o más en otros.

Básicamente hay tres tipos de sistemas de numeración: aditivos, multiplicativos y posicionales. Todos ellos se basan en el concepto de agrupamiento.

Los **sistemas aditivos** de numeración están caracterizados como aquellos que se basan, fundamentalmente, en el principio aditivo para obtener los números representados por un conjunto dado de símbolos. Poseen símbolos para el número uno, para la base y potencias de la base y, algunas veces, para múltiplos de potencias de la base.

Los **sistemas multiplicativos** utilizan dos clases de símbolos: unos para representar las potencias de la base y otros con una función multiplicadora. Históricamente surgen después de los sistemas aditivos y tratan de evitar la repetición de símbolos iguales, para lo cual se utiliza un signo que exprese el número de veces que se repite.

Los **sistemas posicionales** suceden y perfeccionan los multiplicativos. Estos sistemas prescinden de los símbolos que expresan las potencias de la base y utilizan solamente los símbolos que adjunten una función multiplicadora. Se llaman posicionales porque el valor de estos símbolos depende del lugar que ocupen dentro de la representación, ya que se supone que están multiplicando a las potencias de la base, puestas en un cierto orden.

Por ejemplo, en el sistema aditivo, las expresiones: Δ Δ Δ Δ * * * | | y * * Δ * Δ Δ | | Δ representan la misma cantidad.

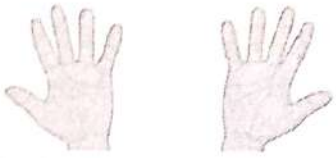
En el sistema multiplicativo, los símbolos están agrupados, pero $\overset{\Delta}{\equiv}\ \overset{*}{\equiv}\ \overset{|}{=}$ y $\overset{*}{\equiv}\ \overset{\Delta}{\equiv}\ \overset{|}{=}$ representan la misma cantidad.

El sistema posicional no solamente exige que los símbolos de las potencias estén agrupados, sino que además deben estar ordenados. Las expresiones ▤ ▤ = = y ▤ ▤ = = no representan la misma cantidad porque

- ▤ ▤ = = representa cuatro Λ, tres * y dos |
- ▤ ▤ = = representa tres Λ, cuatro * y dos |

1.4.1. Principales sistemas de numeración

Además de diferenciarse en el carácter aditivo, multiplicativo o posicional, los sistemas de numeración que las distintas culturas han ido adoptando a lo largo de la historia se han diferenciado también en la base que han utilizado en los agrupamientos.



El hombre empieza a tener como un instrumento de conteo los dedos de la mano de cinco en cinco, de diez en diez.

Las razones por las que precisamente el sistema decimal de numeración ha sido universalmente aceptado no son, ni mucho menos, de índole matemática: los diez dedos de las manos han constituido el aparato primario de cálculo que empleó el hombre desde los tiempos remotos.

En distintos periodos históricos, muchos pueblos emplearon sistemas de numeración diferentes del decimal. Por ejemplo, el sistema duodecimal fue bastante difundido. Indudablemente su origen también está ligado al cálculo por los dedos: puesto que los cuatro dedos de la mano (a excepción del pulgar) cuentan con doce falanges en total, pasando el dedo pulgar por estas falanges se puede contar de uno hasta doce. Muchos objetos (cuchillos, tenedores, platos, pañuelos, etc.) suelen contarse por docenas y no por decenas.

Las falanges de los dedos también hicieron posible otra forma de conteo.

Hoy en día, casi no se utiliza la palabra *gruesa*, que significa 'doce docenas' (o sea, la unidad de tercer orden en el sistema duodecimal), fue una palabra bastante utilizada en el mundo del comercio.

En la Babilonia antigua, existía un sistema sexagesimal muy complejo. Los historiadores discrepan en cuanto a sus orígenes. Una hipótesis señala que al fusionarse dos tribus, una de las cuales usaba el sistema senario y la otra el sistema decimal, surgió el sistema sexagesimal. Otra hipótesis es que los babilónicos consideraban el año compuesto de 360 días, lo que se relacionaba de modo natural con el número 60.

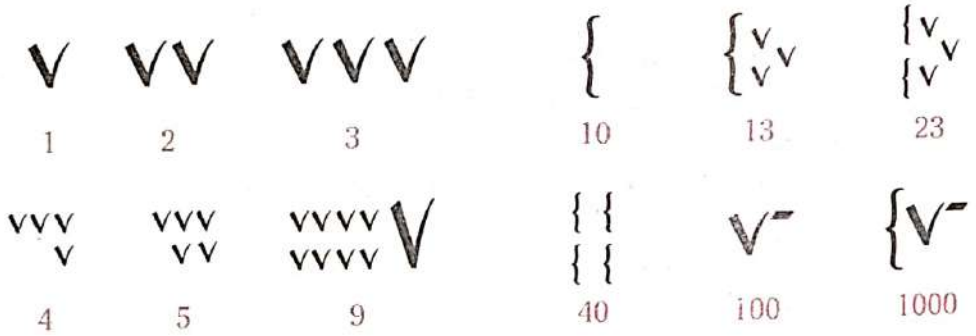
El más antiguo sistema de numeración fue el quinario, que aún se conserva en varias tribus africanas y que se expresa en las cifras romanas. Es evidente la relación de este sistema con la forma de la mano del hombre, la máquina y la computadora primaria.

Los aztecas y los mayas usaban el sistema vigesimal, quienes usaban los dedos de manos y pies para contar.

Los cuatro sistemas de numeración mencionados, duodecimal, quinario, sexagesimal y vigesimal, junto al sistema decimal, desempeñaron un papel notable en el desarrollo de la cultura humana al estar ligados –menos el sexagesimal, cuyo origen no ha sido aclarado– a una u otra forma de contar por medio de los dedos de las manos y, en algunos casos, también de los pies, es decir, son de origen anatómico al igual que el sistema decimal.

1.4.2. Sistemas de numeración de diversas culturas

Los más antiguos signos numéricos fueron indudablemente las rayas. Las rayas verticales e inclinadas, combinadas de diversos modos, fueron todavía usadas por los romanos. Los asirios empleaban como cifras lo mismo que para las letras de su alfabeto: signos en forma de cuñas (escritura cuneiforme). Los sumerios, antecesores de los caldeo-asirios y anteriores a los egipcios, constituyeron la civilización más antigua que ha dejado documentos históricos, indicadores del conocimiento que manejaron sobre un sistema numérico, hace más de 5500 años.



Principales símbolos utilizados por los sumerios

a. Sistema de numeración egipcio

Floreció hace aproximadamente 5000 años, en el fértil valle del Nilo. El hecho de que las anuales inundaciones del Nilo borraran las marcas que delimitaban las tierras de sus dueños impulsó el nacimiento y el desarrollo de la geometría como la capacidad de predecir la época casi exacta de dichas inundaciones. La construcción de las grandes pirámides necesitó de un gran avance en la ingeniería y, por consiguiente, de mucho conocimiento del cálculo.

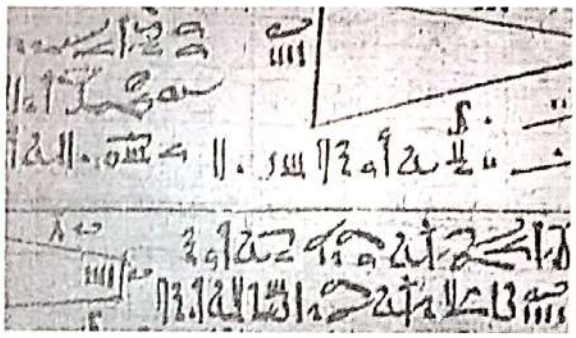
Contaba con tres clases de escritura: jeroglífica, hierática y demótica. La más extendida entre ellas era la primera. Desde el tercer milenio anterior a nuestra era usaron un sistema en base diez, utilizando los jeroglíficos del siguiente cuadro para representar los distintos órdenes de unidades.

SÍMBOLOS PRIMITIVOS EGIPCIOS			
Número	Símbolo	Descripción	Ejemplo
1 (10^0)		recta vertical	
10 (10^1)		talón (arco)	
100 (10^2)		espiral o voluta	
1000 (10^3)		flor de loto	Representa un valor de doscientos un mil ciento trece.
10 000 (10^4)		dedo señalando	
100 000 (10^5)		mustela, renacuajo	
1 000 000 (10^6)		hombre asombrado	

Este sistema de numeración egipcio es un sistema aditivo. Se usaban tantos símbolos de cada uno como fuera necesario y se podía escribir indistintamente de izquierda a derecha, al revés o de arriba abajo, cambiando la orientación de las figuras según el caso.

Papiro de Rhind

El papiro de Rhind fue copiado por el Ahmes, alrededor del año 1700 a. n. e., de un documento que correspondía a la XII dinastía, según el mismo escriba, es decir, hacia el siglo XIX a. n. e. Contiene 87 problemas que nos muestran el avance matemático de los egipcios. Con el nombre de *Regla para conocer todos los secretos*, este papiro es el más antiguo libro de matemática que se conoce; actualmente, se encuentra en el Museo Británico en Londres.



Papiro de Rhind, llamado así en honor al escocés A. Henry Rhind, que en el año 1858 lo compró a orillas del río Nilo.

Papiro de Goleníshchev

El papiro de Goleníshchev se llama también el papiro de Moscú, por hallarse en el museo de dicha ciudad; es más pequeño que el de Rhind y contiene 25 problemas.

Papiro de Moscú, comprado por Vladimir Goleníshchev en el año 1883

b. Sistema de numeración griego

Los judíos y los griegos emplearon como signos numéricos las letras de sus mismos alfabetos. El primer sistema de numeración griego se desarrolló hacia el 600 a. n. e. Se trata de un sistema de base decimal que usaba los símbolos de la figura siguiente para representar esas cantidades. Se utilizaban tantas de ellas como fuera necesario según el principio de las numeraciones aditivas.

Principales símbolos del sistema de numeración griego

Para representar la unidad y los números hasta el 4 se usaban trazos verticales. Para el 5; 10 y 100, las letras correspondientes a la inicial de la palabra cinco (pente), diez (deka) y mil (khiloi). Por este motivo se llama a este sistema acrofónico. Los símbolos de 50; 500 y 5000 se obtienen añadiendo el signo de 10; 100 y 1000 al de 5, usando un principio multiplicativo.

1	α	5	ε	9	θ	40	ν	80	η	300	τ	700	Ψ
2	β	6	ς	10	κ	50	ξ	90	θ	400	υ	800	ω
3	γ	7	ζ	20	λ	60	ο	100	ρ	500	φ	900	Γθ
4	δ	8	η	30	μ	70	π	200	σ	600	χ		

Alfabeto griego y la representación de algunos numerales

De todos los pueblos de la antigüedad, fueron los griegos quienes realizaron los aportes más valiosos en el desarrollo del concepto de número.

c. Sistema de numeración chino-japonés

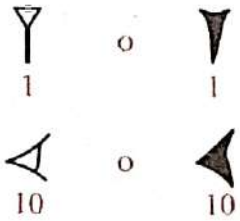
Lo idearon los chinos hace más de 6000 años y luego fue adoptado por los japoneses. La forma clásica de escritura de los números en China se empezó a usar desde el 1500 a. n. e., aproximadamente. Era un sistema decimal estricto que usaba las unidades y las distintas potencias de 10. Se le considera un sistema híbrido de numeración, ya que utiliza los siguientes ideogramas:

一	二	三	四	五	六	七	八	九	十	百	千	萬
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	100	1000	10 000

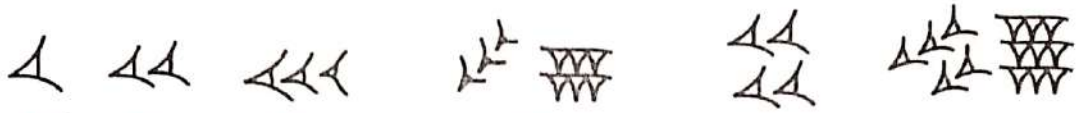
Principales símbolos del sistema chino-japonés

d. Sistema de numeración babilónico

Entre las muchas civilizaciones que florecieron en la antigua Mesopotamia, se desarrollaron distintos sistemas de numeración. Los babilonios inventaron un sistema de base 10, aditivo hasta el 60 y posicional para números superiores.



Para la unidad se usaba la marca vertical que se hacía con afilados estiletes en forma de cuña, se colocaban tantos como fuera preciso hasta llegar a 10, el cual tenía su propio signo.



10 20 30 36 40 59

Símbolos del sistema de numeración babilónico

e. Sistema de numeración romano

El sistema de numeración no era posicional, pues los números se formaban por yuxtaposición, basándose en sumas y restas. La base de su numeración era 10, aun cuando se intercalaban los números 5; 50 y 500.

El origen exacto o la razón por la cual emplearon rayas verticales para indicar el 1; 2; 3 y 4 no se conoce, pero la opinión más generalizada es que proviene de los dedos de las manos; el 5 provendría de una mano abierta, que se fue simplificando hasta quedar en forma de V; el X resultaría de la unión de dos cincos. Lo real es que emplearon también algunas letras de su alfabeto, como se puede observar a continuación:

I	II	III	IIII	V	VI	VII
1	2	3	4	5	6	7
VIII	VIIII	X	L	C	D	M
8	9	10	50	100	500	1000

Símbolos del sistema de numeración romano

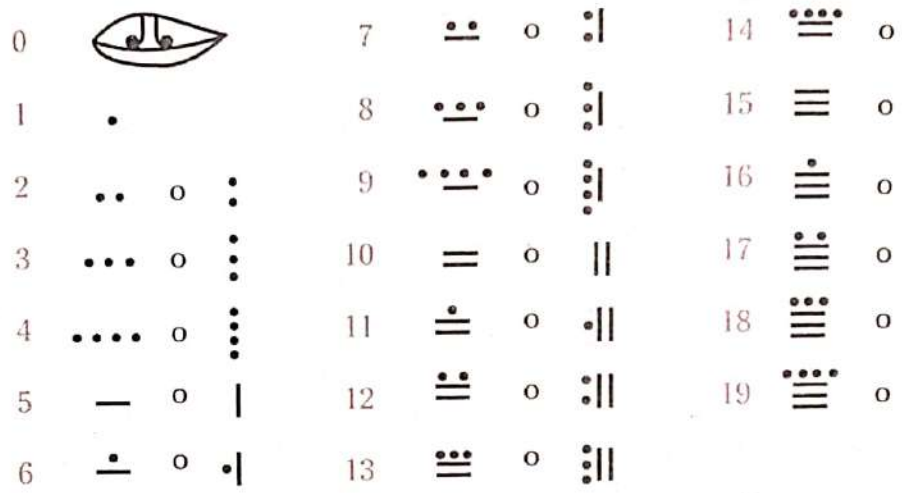
Tal como lo conocemos actualmente, las cifras del sistema romano están tomadas del alfabeto latino. Estos numerales fueron usados en los países europeos hasta el siglo XVIII. La introducción de la imprenta originó un cambio rápido en los numerales decimales (indoarábigo).

El gran inconveniente que presenta la numeración romana es su tremenda dificultad al realizar operaciones. A causa de la gran extensión alcanzada por el arte de escribir y de las dificultades del cálculo escrito con sus cifras, los romanos empleaban diversos medios auxiliares: entre estos se encuentran el **ábaco de líneas** y el **ábaco de columnas**.

f. Sistema de numeración maya

Uno de los sistemas de numeración más admirables de toda la Antigüedad fue, sin duda, el de los mayas, quienes con solo tres símbolos pudieron representar todos los números. Pero lo que le da jerarquía universal es, sobre todo, el uso que hicieron del valor de posición y, además, de la representación simbólica del cero. Resulta más admirable el hecho de que no tuvieron contacto alguno con las antiguas civilizaciones, cuyos sistemas hemos estudiado.

Con independencia de lo que sucedía en el resto del mundo, en los primeros siglos de nuestra era, los mayas desarrollaron un sistema de numeración de base veinte (fundamentalmente), con cero y en el que el valor de las cifras dependía de su posición dentro del número. Las unidades de primer orden (hasta diecinueve) estaban representadas por símbolos muy sencillos: puntos y rayas.



Símbolos del sistema de numeración maya

La numeración maya es, por tanto, un sistema posicional que se escribe de arriba abajo, empezando por el orden de magnitud mayor. Al tener cada cifra un valor relativo, según el lugar que ocupa, la presencia de un signo para el cero, que permita indicar la ausencia de unidades de algún orden, se hace imprescindible y los mayas lo usaron, aunque no parece haberles interesado el concepto de cantidad nula.

1.4.3. Sistema de numeración decimal

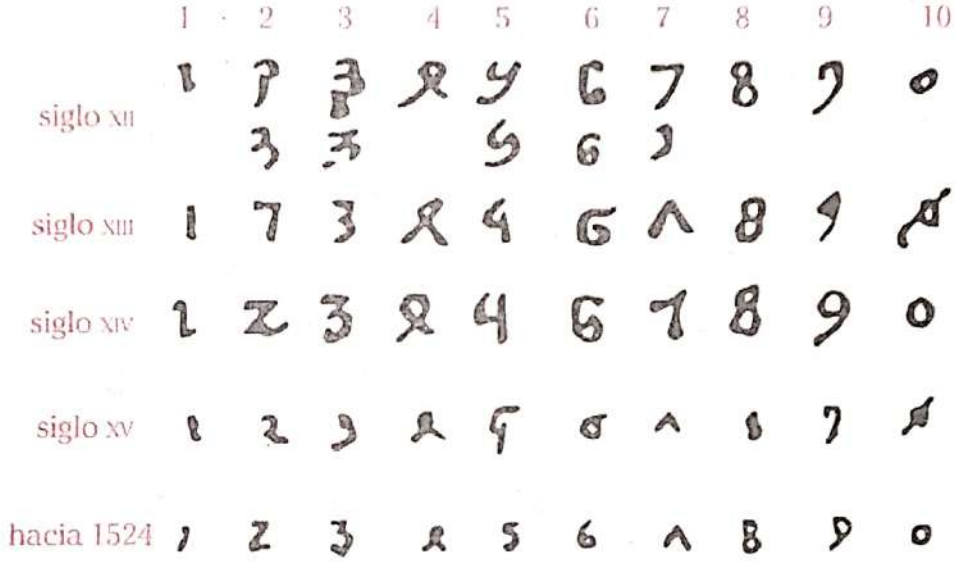
El sistema de numeración que actualmente se utiliza, prácticamente en todo el mundo, es el sistema de numeración decimal, que se caracteriza por ser un sistema posicional de base 10 y con cero.

A este sistema también se le llama indo-arábigo, ya que procede del sistema de numeración hindú que fue introducido en Europa, a través de España, por los árabes, en el siglo X, aunque estuvo prohibido hasta el siglo XV.

En el siglo III de nuestra era, se inventó el cero, piedra angular de toda la aritmética de posición. Este signo sirvió para ocupar el lugar de aquellas órdenes que carecían de unidades. Siglos después, en la India, hacia el año 500 d. n. e., se fraguaron los orígenes de nuestro sistema de numeración. El principio de posición (valor relativo de las cifras), así como las nueve cifras y el cero, aparecen en las obras del matemático hindú Brahmagupta.

También durante esta época, los matemáticos hindúes aceptaron las soluciones negativas de las ecuaciones y aceptaron como números las raíces de otros números que no podían ser expresados mediante números racionales. Una embajada hindú llevó hasta Bagdad los libros en los que se recogían estos conocimientos en el año 772. Gracias a este hecho, en la primera mitad del siglo IX

se recogen los nuevos métodos matemáticos en un tratado de Al-Khuwarizmi, que en el siglo siguiente se infiltraron lentamente en Occidente. La civilización musulmana lleva estos conocimientos a Sicilia y España, y los mercaderes árabes e italianos los adoptan, felices de no tener que llevar consigo el incómodo ábaco. Se extendió rápidamente a Italia, Francia, Inglaterra, Alemania y otros países, con el nombre de algoritmo o aritmética de los árabes.



Cambios que se fueron dando a través del tiempo con los símbolos del sistema decimal.

2 PROTAGONISTAS DE LA ARITMÉTICA Y SUS APORTES A TRAVÉS DE LA HISTORIA

Desde la Antigüedad, la matemática era considerada como la ciencia de la cantidad, referida a las magnitudes y a los números, como la aritmética. Hacia mediados del siglo XIX, la matemática empezó a considerarse como la ciencia de las relaciones, o como la ciencia que produce condiciones necesarias. Esta última noción abarca la lógica matemática o simbólica, es decir, que consiste en utilizar símbolos para generar una teoría exacta de deducción e inferencia lógica basada en definiciones, axiomas, postulados y reglas que transforman elementos primitivos en relaciones y teoremas más complejos. Trataremos la evolución de los conceptos e ideas matemáticas siguiendo su desarrollo histórico, centrándonos principalmente en la aritmética, mencionando algunos personajes y sus principales aportes.

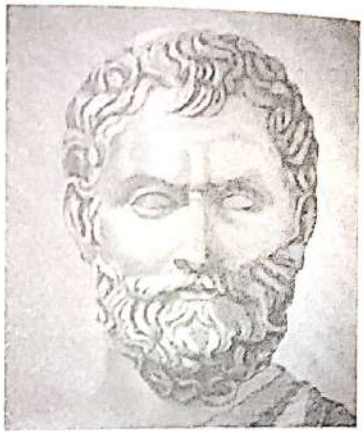
2.1. ORÍGENES DE LA ARITMÉTICA

Las primeras referencias sobre matemáticas avanzadas y organizadas datan del tercer milenio antes de nuestra era, en Babilonia y Egipto. Estas matemáticas estaban dominadas por la aritmética, con cierto interés en medidas y cálculos geométricos y sin mención de conceptos matemáticos como los axiomas o las demostraciones.

Los griegos tomaron elementos de las matemáticas de los babilonios y de los egipcios. La innovación más importante fue la invención de las matemáticas abstractas basadas en una estructura lógica de definiciones, axiomas y demostraciones.

2.1.1. Tales de Mileto (636 a.n.e. - 546 a.n.e.)

Este filósofo, astrónomo y matemático griego es conocido por su cosmología. Creía que todo en el universo derivaba del agua. Fue uno de los primeros filósofos griegos en adoptar una visión del mundo naturalista y no mitológica. A pesar de que no ha sobrevivido ninguno de sus trabajos, se le considera el fundador de la geometría griega. En astronomía, predijo con exactitud un eclipse solar en el 585 a.n.e. y aconsejó que los marinos se guiaran por la constelación de la Osa Menor, en la que figura la estrella polar. Tales forma parte de los Siete Sabios, un grupo de eruditos de la Grecia antigua que vivieron entre los siglos VI y VII a.n.e.



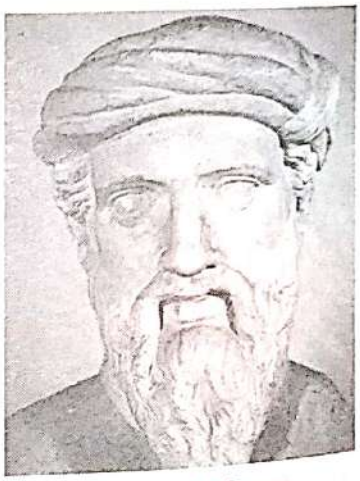
Tales de Mileto

2.1.2. Pitágoras (580 a.n.e. - 500 a.n.e)

Matemático y filósofo griego que contribuyó al desarrollo de las matemáticas modernas y de la filosofía occidental, su objetivo era explicar todos los fenómenos naturales en términos matemáticos.

Pitágoras es conocido especialmente por su fórmula acerca de las proporciones de los lados de un triángulo rectángulo. Sin embargo, otros muchos conceptos y anotaciones (como las progresiones aritméticas y geométricas, y los números cuadrados) fundamentales para las modernas matemáticas están basados en las ideas pitagóricas.

Tanto él como sus seguidores descubrieron las matemáticas de los armónicos que forman la base de la música occidental.

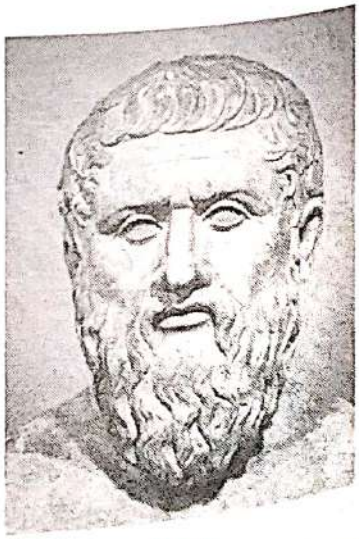


Pitágoras de Samos

2.1.3. Platón (428 a.n.e. - 348 a.n.e)

Platón estudió, primero, filosofía con su gran maestro Sócrates. Después estudió matemáticas con Arquitas de Tarento y con Teodoro de Cirene. Asimismo, viajó por Egipto, Sicilia e Italia en compañía del matemático Eudoxio. A su regreso, fundó en Atenas su famosa escuela filosófica: la Academia.

Sin lugar a dudas, Platón es mejor conocido por su obra filosófica. Sin embargo, su influencia en las matemáticas helénicas es bastante considerable. Creía que era imposible estudiar la filosofía sin el conocimiento previo de las matemáticas. Tal vez sea este el motivo por el cual hizo colocar, a la entrada de la Academia, su célebre y significativa frase: "No entres aquí si no eres geómetra". Esta y otras proposiciones, como "los números gobiernan al mundo", nos hacen ver que estaba directamente influenciado por las teorías pitagóricas.



Platón

2.1.4. Aristóteles (384 a.n.e. - 322 a.n.e.)

Aristóteles

Es considerado el creador y pionero en el estudio de la lógica; en su forma clásica, la consideraba como el arte de la argumentación correcta y verdadera. Siguiendo la definición clásica de lógica, podemos derivar que es la ciencia –o el estudio– dedicada a los razonamientos correctos.

Durante muchos siglos, se efectuó un importante desarrollo sobre los razonamientos incorrectos o falacias, emitidos muchas veces con el ánimo de confundir el razonamiento o el debate con otros interlocutores.

2.2. ORIGEN DEL CONJUNTO DE LOS NÚMEROS IRRACIONALES

A finales del siglo V a. n. e., un matemático griego descubrió que no existe una unidad de longitud capaz de medir el lado y la diagonal de un cuadrado, es decir, una de las dos cantidades es inconmensurable. Esto significa que no existen dos números naturales, m y n, cuyo cociente sea igual a la proporción entre el lado y la diagonal. Dado que los griegos solo utilizaban los números naturales (1; 2; 3...), no pudieron expresar numéricamente este cociente entre la diagonal y el lado de un cuadrado (es lo que hoy se denomina número irracional). Debido a este descubrimiento, se abandonó la teoría pitagórica de la proporción, basada en números, y se tuvo que crear una nueva teoría no numérica. Esta fue introducida en el siglo IV a.n.e. por el matemático Eudoxo de Cnido, y la solución se puede encontrar en los *Elementos* de Euclides. Eudoxo, además, descubrió un método para demostrar rigurosamente supuestos sobre áreas y volúmenes mediante aproximaciones sucesivas.

2.2.1. Euclides (300 a.n.e.)

Euclides de Alejandría

El matemático griego Euclides trabajó en Alejandría (Egipto) hace 2300 años. A pesar de que no se conocen muchos detalles de su vida, su obra más importante, *Elementos*, ha perdurado traducida. Esta serie de 13 libros contiene principios geométricos y aritméticos y teoremas que constituyeron la base de las matemáticas durante más de 2000 años.

Euclides, en el libro más famoso de la historia de las matemáticas, recoge gran parte de los conocimientos pitagóricos sobre los números y define los números primos y compuestos de forma geométrica: un número entero es compuesto cuando tiene divisores distintos de él mismo y de la unidad, es decir, cuando se puede dibujar como un rectángulo numérico.

2.2.2. Arquímedes de Siracusa (287 a.n.e. - 212 a.n.e.)

El griego Arquímedes obtuvo numerosos e importantes resultados en geometría, mecánica e hidrostática. La fama de Arquímedes radica, fundamentalmente, en sus numerosos descubrimientos matemáticos. Halló, por ejemplo, un valor aproximado de pi con un error muy pequeño. Calculó volúmenes y áreas, algunos muy difíciles, entre ellos el volumen de la esfera. Demostró el siguiente resultado fundamental del que se sentía particularmente orgulloso: Los volúmenes de un cono, de una semiesfera y de un cilindro, todos de la misma altura y radio, se encuentran en la razón 1:2:3.

En la construcción de las teorías matemáticas en la Grecia antigua, muy temprano se precisó una clase específica de problemas, para la solución de los cuales era necesario investigar los pasos al límite, los procesos infinitos, la continuidad. Durante la época de Euclides y Arquímedes, las matemáticas cambiaron radicalmente, tanto en su forma como en su contenido, haciendo el proceso de formación de nuevas teorías más pausado, hasta llegar a interrumpirse. Entre las nuevas teorías desarrolladas, ocupa el primer lugar la teoría de las secciones cónicas, que surgió de las limitaciones del álgebra geométrica.

Arquímedes

Estos tres últimos matemáticos citados, Euclides, Arquímedes y Apolonio, sobresalieron por encima de todos los de su tiempo y sus obras son las que han hecho que se denomine como "Edad de Oro" de la matemática al periodo comprendido entre los años 300 y 200 a. n. e.

2.2.3. Diofanto de Alejandría (200 d. n. e. - 284 d. n. e.)

Es conocido como el padre del álgebra. Su obra *Arithmética* es un trabajo sobre la solución de ecuaciones algebraicas y sobre la teoría de los números. Sin embargo, no se sabe nada de su vida y ha existido mucho debate respecto de la fecha en que vivió.

Diofanto

Resolvió problemas con ecuaciones algebraicas e inventó un formulismo particular. Su principal obra es la *Arithmetica*, dedicada casi exclusivamente a la resolución exacta de ecuaciones determinadas e indeterminadas, de modo que la rama del análisis que se dedica a esta tarea se conoce hoy en día como análisis diofántico.

Arithmetica fue un tratado de trece libros del que solo se conocen los seis primeros. Johann Müller, matemático y astrónomo alemán, la encontró en Venecia, hacia 1464. La primera traducción latina pertenece a Wilhelm Holzmann (1532-1576), se trata de *Diophanti Alexandrini Rerum libri sex* (1575). En 1621, aparece la edición de Bachet de Méziriac, con el siguiente título: *Diophanti Alexandrini Arithmeticorum libri sex; et de Numeris multangulis liber unus. Nunc primun graece et latini editi atque absolutissimis commentariis illustrati* (París, 1621), que contiene, además del texto griego y la traducción latina, aclaraciones y notas. La imagen de la derecha muestra una edición realizada por Fermat hijo (sobre la traducción de Bachet), que incluye impresas las anotaciones de su padre.

Obra de Diofanto

La *Arithmetica* no es propiamente un texto de algebrario, sino una colección de 150 problemas. No se sabe cuántos de ellos son originales o tomados de otros tratados de la época.

2.3. MATEMÁTICOS ÁRABES Y SU TRASCENDENCIA

Después de un siglo de expansión en la que la religión musulmana se difundió, desde sus orígenes, en la península arábiga, hasta dominar un territorio que se extendía desde la península ibérica hasta los límites de la actual China, los árabes empezaron a incorporar a su propia ciencia los resultados de "ciencias extranjeras".

Los matemáticos árabes ampliaron el sistema hindú de posiciones decimales en aritmética de números enteros, extendiéndolo a las fracciones decimales. En el siglo XII, el matemático persa Omar Jayyam generalizó los métodos indios de extracción de raíces cuadradas y cúbicas para calcular raíces cuartas, quintas y de grado superior. El matemático árabe Al-Jwârizmî (de su nombre procede la palabra *algoritmo* y el título de uno de sus libros es el origen de la palabra *álgebra*) desarrolló el álgebra de los polinomios; Al-Karayi la completó para polinomios, incluso con infinito número de términos. Los geómetras, como Ibrahim ibn Sinan, continuaron las investigaciones de Arquímedes sobre áreas y volúmenes.

Kamal al-Din y otros aplicaron la teoría de las cónicas a la resolución de problemas de óptica. Los matemáticos Habas al-Hasib y Nasir ad-Din al-Tusi crearon las trigonometrías plana y esférica, utilizando la función seno de los hindúes y el teorema de Menelao. Estas trigonometrías no se convirtieron en disciplinas matemáticas en Occidente hasta la publicación del *De triangulis omnimodis* (1533), del astrónomo alemán Regiomontano.

2.3.1. Abu Jafar Mohammet Ibn Mose Al-Jwarizmi (780 d.n.e - 835 d.n.e)

Fue uno de los mejores matemáticos árabes de la Edad Media. A pesar de que no se sabe mucho sobre su vida privada, su obra matemática fue difundida gracias a las traducciones al latín que de ella se hicieron durante la Edad Media y el Renacimiento. Al-Jwarizmi vivió del año 780 al 835, nació en una ciudad llamada Jwarizm, que actualmente se llama Jiva y está en Uzbekistán.

Al-Jwarizmi

Al-Jwarizmi vivió en la corte del califa Abdulá al-Mamún, quien había fundado una academia de ciencias que se llamaba Casa de la sabiduría, en la que trabajaban los mejores científicos y matemáticos, entre ellos, Al-Jwarizmi. De esta academia salió la primera expedición que realizaron los árabes para calcular la circunferencia de la Tierra y en la que se promovieron varios experimentos de navegación y observaciones astronómicas.

2.3.2. Thabit Ibn Qurrá (836 d.n.e. - 901 d.n.e.)

Fue un sabio árabe dedicado, en especial, a las matemáticas y a la astronomía, reformó el sistema de Tolomeo, tradujo y comentó algunos tratados de Arquímedes, Euclides y Apolonio de Pérgamo. En su obra, *El libro de los datos,* estudió cuestiones de geometría elemental y trató de resolver la ecuación de segundo grado por métodos geométricos. Extendió el concepto de número a los reales positivos y elaboró un sistema de formación de los números amigos. En astronomía, se ocupó en especial del fenómeno de los equinoccios.

Thabit Ibn Qurrá

Fue uno de los primeros en emplear terminología aritmética a problemas de geometría y estudió algunos aspectos de las secciones cónicas centrándose notablemente en la parábola y la elipse.

2.4. LA MATEMÁTICA EN LA EDAD MEDIA

Los trabajos de los árabes, junto con las traducciones de los griegos clásicos, fueron los principales responsables del crecimiento de las matemáticas durante la Edad Media. Los matemáticos italianos, como Leonardo Fibonacci y Luca Pacioli (uno de los grandes tratadistas del siglo XV en álgebra y aritmética), se basaron principalmente en fuentes árabes para sus estudios.

2.4.1. Leonardo Pisano (1170 d.n.e - 1250 d.n.e)

Es más conocido como Fibonacci. Jugó un rol muy importante para revivir las matemáticas antiguas y realizar importantes contribuciones propias.

Leonardo Pisano (Fibonacci)

Fibonacci nació en Italia, pero fue educado en África del Norte, donde su padre ocupaba un puesto diplomático. Viajó mucho acompañando a su padre, así conoció las enormes ventajas de los sistemas matemáticos usados en esos países. *Liber Abaci*, publicado en 1202, después de retornar a Italia, está basado en partes de aritmética y álgebra que Fibonacci había acumulado durante sus viajes. *Liber Abacci* introduce el sistema decimal indo-arábigo y usa los números arábigos dentro de Europa.

2.5. LOS AVANCES MATEMÁTICOS DEL SIGLO XVI

Aunque el final del periodo medieval fue testigo de importantes estudios matemáticos sobre problemas del infinito, por autores como Nicole Oresme, no fue sino hasta principios del siglo XVI cuando se hizo un descubrimiento matemático de trascendencia en Occidente. Se trataba de una fórmula algebraica para la resolución de las ecuaciones de tercer y cuarto grado, y fue publicado en 1545 por el matemático italiano Gerolamo Cardano en su *Ars magna*. Este hallazgo llevó a los matemáticos a interesarse por los números complejos y estimuló la búsqueda de soluciones similares para ecuaciones de quinto grado superior.

2.5.1. François Viette (1540 -1603)

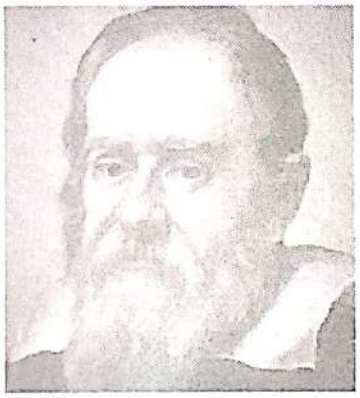
François Viette

Se le considera el padre del álgebra moderna porque fue el primero en utilizar letras para simbolizar las incógnitas y constantes en las ecuaciones algebraicas. Magistrado y hombre de confianza del rey Enrique IV de Francia; para él la matemática era una diversión, un entretenimiento al que hizo aportaciones fundamentales. A pesar de ello, en su tiempo no fue famoso por sus estudios matemáticos, sino por su capacidad para descifrar los mensajes secretos que el rey Felipe II de España enviaba a sus tropas en Flandes.

2.5.2. Galileo Galilei (1564 - 1642)

A temprana edad, Galileo prometía mucho tanto mental como manualmente. Tenía diecisiete años cuando ingresó a la Universidad de Pisa, donde se especializó en medicina y estudió también matemáticas y ciencias físicas. Leyó las obras de Arquímedes y usó las matemáticas para probar algunos de los experimentos de este último con líquidos y aleaciones.

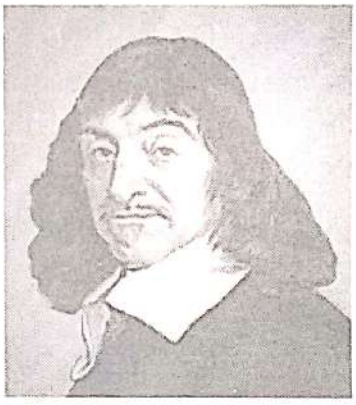
Diálogos sobre los dos máximos sistemas del mundo se convirtió en la obra más famosa de Galileo por los problemas que le ocasionó con la Iglesia católica; luego, él comenzó a trabajar en su *Discurso y demostraciones matemáticas de las dos nuevas ciencias*. Como a Galileo ya se le había prohibido publicar, el libro se llevó a Holanda para su edición. Fue su trabajo matemático más riguroso y en él abordó problemas sobre el ímpetu, los momentos y los centros de gravedad.



Galileo Galilei

2.5.3. René Descartes (1596 - 1650)

Conocido también por su nombre latino, Renatius Cartesius, René Descartes fue un filósofo y matemático francés. En su búsqueda de los fundamentos del conocimiento, Descartes adoptó un punto de vista escéptico y dudó de todo. Al descubrir que no podía dudar de su propia existencia, *cogito ergo sum* (pienso, luego existo), llegó a una idea de certeza. En su intento de reducir las ciencias físicas a las matemáticas, Descartes revolucionó la geometría, el álgebra y la notación matemática. Más conocida es su representación de las ecuaciones matemáticas como curvas geométricas, contribuyendo así a establecer la geometría en coordenadas. El sistema de coordenadas cartesianas se llama así en su honor.



René Descartes

2.6. TEORÍA ACTUAL DE LOS NÚMEROS

La relación epistolar que Fermat mantenía con Blaise Pascal lo llevó a conseguir una importante definición: ambos se planteaban el problema de dividir las apuestas en un juego inacabable de azar y llegaron a la moderna definición de probabilidad.

Los mayores descubrimientos de Fermat permanecieron ignorados hasta después de su muerte. Estos se hallaban en la teoría de números, en la que pretendían ampliar los resultados que figuran en la *Arithmetica* de Diofanto de Alejandría. Al concentrarse en los enteros, en especial en los números primos, Fermat fue el primer matemático en estudiar la teoría de números como se conoce hoy en día.

2.6.1. Pierre de Fermat (1601 - 1665)

El abogado francés Pierre de Fermat se dedicó a las matemáticas como afición y descubrió conceptos clave en esta materia. Se le considera el fundador de la teoría de números y desarrolló la geometría analítica independientemente de Descartes. También descubrió aspectos del cálculo antes que Newton y Leibniz y contribuyó a la teoría de la probabilidad. No obstante, es más recordado por el último teorema de Fermat, un problema que los matemáticos habían intentado resolver durante más de 300 años. Él señalaba que había conseguido una demostración del descubrimiento, pero nunca escribió acerca de él. El resultado, bautizado como el pequeño teorema de Fermat, es que si p es un número primo y a un entero que no es exactamente divisible entre p, entonces, $a^{p-1} - 1$ es exactamente divisible entre p.

Pierre de Fermat
(1601- 1655)

El llamado último teorema de Fermat es una nota que escribió al margen de su ejemplar de *Arithmetica*. Había probado que si n es mayor de 2, entonces no es posible encontrar tres enteros x, y, z como los $x^n+y^n=z^n$; pero él mencionaba en su nota que es imposible dividir un cubo en suma de dos cubos, o un bicuadrado en suma de dos bicuadrados, o en general, cualquier potencia superior a dos en dos potencias del mismo grado.

Esta conjetura ha generado gran cantidad de trabajos en el álgebra y la teoría de números.

- Euler lo demostró para $n=3$ y $n=4$.
- Dirichlet y Legendre lo demostraron para $n=5$.
- Lamé lo demostró para $n=7$.
- Kummer lo demostró para todos los primos menores que 100, salvo n: 37; 59; 67.

Muchos matemáticos han tratado de demostrar esta afirmación de Fermat o de encontrar una excepción para demostrar que es falsa. El matemático británico Andrew Wiles encontró, en 1994, una demostración del mismo, utilizando los conceptos matemáticos del siglo XX.

2.6.2. Blaise Pascal (1623 - 1662)

El francés Blaise Pascal fue un brillante matemático y teólogo. Con tan solo 17 años, publicó un ensayo impresionante sobre las secciones cónicas, que fue inmediatamente bien recibido en los círculos matemáticos, aunque la envidia de Descartes hizo que no obtuviera el reconocimiento que se merecía el trabajo de un hombre tan joven. A los 19 años diseñó un aparato para calcular, que podía sumar y restar. Pascal mantuvo correspondencia con su colega matemático francés Pierre de Fermat acerca de la probabilidad. Juntos sentaron las bases de la moderna teoría de la probabilidad. Pascal también realizó un importante estudio sobre el triángulo aritmético, hoy llamado el triángulo de Pascal y llevó a cabo muchos descubrimientos relacionados con él, en especial en Álgebra y en la teoría de la probabilidad. También preparó el camino para el desarrollo del cálculo integral.

Blaise Pascal

2.6.3. Isaac Newton (1642 - 1727)

El físico y matemático inglés Isaac Newton fue uno de los científicos más importantes de todos los tiempos. Sus teorías revolucionaron el pensamiento científico e influyeron en la astronomía práctica y teórica. Su libro *Principia mathematica* (1687) es uno de los trabajos más importantes en la historia de la ciencia moderna. Descubrió la gravedad y las tres leyes del movimiento todavía utilizadas hoy en día. Fue la primera persona en dividir la luz blanca en los colores del espectro y su investigación de la luz le condujo a diseñar un telescopio reflector. Fue también uno de los pioneros de una nueva rama de las matemáticas llamada cálculo.

Isaac Newton

En el libro *Philosophae naturalis principia matemática*, que se considera el más importante de la historia de la ciencia, Newton demostraba matemáticamente cómo la fuerza gravitacional, que es inversamente proporcional al cuadrado de la distancia sobre la que actúa, puede servir para el movimiento de los planetas y, en particular, por qué se deben mover alrededor del Sol en una elipse, tal como el astrónomo alemán Johannes Kepler había demostrado con anterioridad.

2.6.4. Gottfried Leibniz (1646 - 1716)

El matemático y filósofo alemán Gottfried Leibniz desarrolló el método de computación llamado cálculo. El conocimiento de Leibniz era amplio y diverso y cubría todas las disciplinas de su época. Durante su estancia en París, Leibniz conoció a Christiaan Huygens, el físico y matemático holandés que le alentó a profundizar en el estudio de las matemáticas. Entonces, empezó a trabajar en la máquina calculadora.

Gottfried Leibniz

La versión completa era una considerable mejora de la máquina diseñada en 1645 por el matemático francés Blaise Pascal. La de Leibniz podía multiplicar, dividir y calcular raíces, mientras que la de Pascal solo podía sumar y restar. Leibniz presentó su máquina en la Royal Society de Londres en 1673 y, como resultado, fue elegido miembro de esta prestigiosa sociedad.

En 1675, desarrolló el cálculo diferencial e integral; sin embargo, cuando publicó sus descubrimientos en *Nuevos métodos para los mayores y menores* (1684), el gran físico y matemático británico Isaac Newton afirmó que él había descubierto antes el cálculo. De hecho, los dos realizaron sus descubrimientos de forma independiente, pero Leibniz fue acusado por la Royal Society de Londres de haber robado la idea a Newton y hacerla pasar como propia. Paradójicamente, hoy en día se usa mucho más su notación. El desarrollo del sistema binario también figura entre los avances matemáticos de Leibniz.

2.6.5. Pierre-Simon Laplace (1749 - 1827)

A la edad de dieciocho años era distinguido como maestro y matemático en la escuela militar de la pequeña población de Beaumont. Laplace ideó una teoría, que confirmó con pruebas matemáticas, de que las variaciones eran normales y se corregían solas en el transcurso de largas etapas de tiempo. Se consideró que esta teoría destacaba porque permitía entender las relaciones de los cuerpos celestes en el universo, y ha soportado la prueba del tiempo sin sufrir más que correcciones relativamente secundarias.

Pierre-Simon Laplace

En 1812, publicó su *Teoría analítica de las probabilidades*, que es un estudio sobre las leyes de probabilidad.

2.6.6. Leonhard Euler (1707 - 1783)

Leonard Euler

Su talento natural para las matemáticas se evidenció pronto por el afán y la facilidad con que dominaba los elementos bajo la tutela de su padre. A una edad temprana fue enviado a la Universidad de Basilea, donde atrajo la atención de Jean Bernoulli. Inspirado por un maestro así, maduró rápidamente; a los 17 años de edad se graduó como doctor y provocó grandes aplausos con un discurso probatorio sobre una comparación entre los sistemas cartesiano y newtoniano. Euler dio una muestra insigne de su talento al efectuar, en tres días, la resolución de un problema que la Academia de París necesitaba urgentemente, pese a que se le juzgaba insoluble en menos de varios meses de labor. Pero el esfuerzo realizado tuvo por consecuencia la pérdida de la vista de un ojo. Pese a esta calamidad, prosperó en sus estudios y descubrimientos; parecía que cada paso no hacía más que darle fuerzas para esfuerzos futuros.

Euler es, posiblemente, el matemático con más trabajos publicados en la historia. La mayor parte de ellos se los dictó a su hijo mayor cuando ya estaba ciego.

A pesar de que su actividad de publicación era incesante (un promedio de 800 páginas de artículos al día en su época de mayor producción, entre 1727 y 1783), la mayor parte de su obra completa está sin publicar. El proyecto inicial planeaba el trabajo sobre 887 títulos en 72 volúmenes; al día de hoy se supone que alcanzará los 200 con facilidad.

2.6.7. Karl Friedrich Gauss (1777 - 1855)

Karl F. Gauss

Matemático, astrónomo y físico alemán, desarrolló una brillante carrera a pesar de las tragedias de su vida personal. Realizó importantes aportaciones a muchas disciplinas, además de realizar un estudio sobre el campo magnético de la Tierra y desarrollar nuevos métodos para calcular las órbitas de los cuerpos celestes. En la matemática es en la que ha tenido mayor influencia, en campos tan diversos como la teoría de números y la geometría.

Al desarrollar la idea de los números complejos, Gauss estableció el teorema fundamental del álgebra. Se interesó en especial por la geodesia (encontrar las distancias inferiores entre puntos de superficies curvas), y se refirió a la existencia de una geometría no euclídea. En sus años de estudio, Gauss publicó tres brillantes conclusiones. La primera definía las condiciones bajo las cuales un polígono regular de n lados puede construirse mediante una regla y un compás (n debe ser un número par o un número primo de la forma: $2^{2k}+1$, en la que k es un número entero positivo o un producto de primos de esta forma). La segunda fue el *Teorema fundamental del álgebra*, que presentó en su tesis doctoral. La tercera fue la *Ley de la reciprocidad cuadrática* de la teoría de números. Gauss también escribió una obra maestra, *Disquisitiones arithmeticae*, presentando una síntesis unificada de la teoría de números, dándole a esta rama de las matemáticas una estructura sistematizada, aunque no fue publicada hasta 1801 debido a las dificultades económicas de sus editores.

2.6.8. Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805 - 1859)

Lejeune Dirichlet

Matemático alemán que cursó sus estudios en París, relacionándose con matemáticos como Fourrier. Tras graduarse, fue profesor en las universidades de Breslau (1826-1828), Berlín (1828-1855) y Gotinga, donde ocupó la cátedra dejada por Gauss tras su muerte.

Sus aportaciones más relevantes se centraron en el campo de la teoría de números, prestando especial atención al estudio de las series, y desarrolló la teoría de las series de Fourier. Consiguió una demostración particular del teorema de Fermat, aplicó las funciones analíticas al cálculo de problemas aritméticos y estableció criterios de convergencia para las series.

En el campo del análisis matemático, perfeccionó la definición y el concepto de función, y en mecánica teórica se centró en el estudio del equilibrio de sistemas y en el concepto de potencial newtoniano.

El primer enunciado del principio del palomar se cree que proviene de Johann Peter Gustav Lejeune Dirichlet, en 1834, con el nombre de *schubfachprinzip* ("principio de los cajones"). A veces se conoce este enunciado como el principio de Dirichlet, el cual establece lo siguiente: si n palomas se distribuyen en m palomares y si $n > m$, entonces, al menos habrá un palomar con más de una paloma. Aunque el principio del palomar puede parecer una observación trivial, se puede utilizar para demostrar resultados inesperados.

2.6.9. George Boole (1815-1864)

George Boole

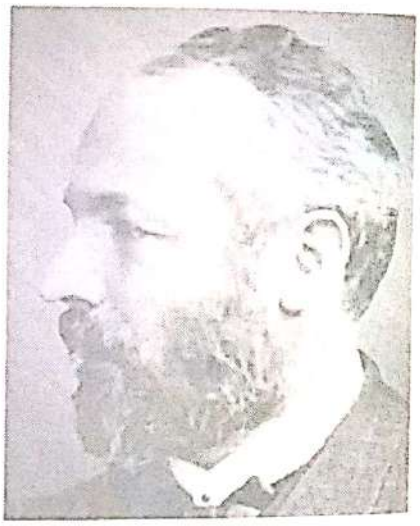
Recluyó la lógica a un álgebra simple. Una aplicación de métodos algebraicos para la solución de ecuaciones diferenciales fue publicada por Boole en el *Transaction of the Royal Society* y por este trabajo recibió la medalla de la Real Sociedad. Su trabajo matemático fue el comienzo que le trajo fama. Boole fue nominado para una cátedra de matemática en el Queens College, donde enseñó por el resto de su vida, ganándose una reputación como un prominente y dedicado profesor.

En 1854, publicó una investigación de las leyes del pensamiento sobre las cuales son basadas las teorías matemáticas de lógica y probabilidad.

Boole aproximó la lógica en una nueva dirección reduciéndola a un álgebra simple, incorporando la lógica en las matemáticas. Comenzaba el álgebra de la lógica llamada álgebra booleana, la cual ahora encuentra aplicación en la construcción de computadoras, circuitos eléctricos, etc. Publicó alrededor de 50 escritos y fue uno de los primeros en investigar las propiedades básicas de los números, tales como la propiedad distributiva que fundamentó los temas del álgebra. Boole es considerado como uno de los fundadores del campo de las ciencias de la computación.

2.7. LOGROS ALCANZADOS DESDE EL SIGLO XIX HASTA LA ACTUALIDAD

2.7.1. George Cantor (1845 - 1918)


George Cantor

Matemático alemán nacido en San Petersburgo (Rusia) y fallecido en Halle. En la escuela, Cantor mostró talento por las matemáticas, y las convierte en su profesión, obteniendo el puesto de profesor en la Universidad de Halle en 1872. En 1874, Cantor empezó a introducir conceptos extraños de lo infinito, estableciendo que para tratar el infinito se debe establecer correspondencia entre dos series; más aún, esta correspondencia debe ser biunívoca. De este modo se puede razonar que la cantidad de números pares es igual a la de los números naturales, diferenciando entre la aritmética de lo infinito y la aritmética familiar de los números finitos.

Cantor construyó una estructura lógica completa, en la cual se postulaba que una serie completa de números transfinitos representaba diferentes órdenes de infinitos. De esta manera, todos los números racionales podían establecer una igualdad a la serie de números enteros, pero no así los números racionales más los irracionales.

Estos eran los números reales y representaban números transfinitos más elevados que los números enteros. De esta forma, la definición de Cantor de número real identifica a este último con una sucesión convergente de números racionales.

2.7.2. David Hilbert (1862 - 1943)

David Hilbert

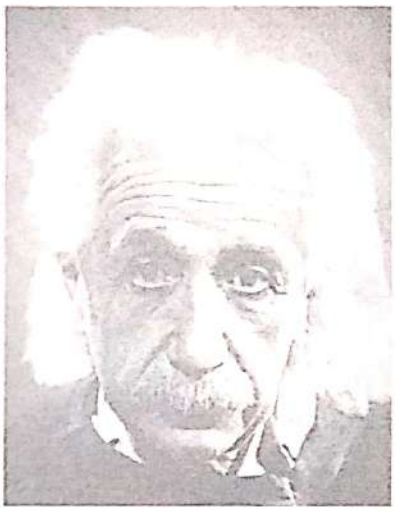
Matemático alemán nacido en Könisgberg y fallecido en Gotinga. Durante el siglo XIX se puso de manifiesto, cada vez de una manera más evidente, que Euclides no había partido de conceptos patentes y que había supuesto muchas cosas sin especificarlas. Se hicieron esfuerzos para fijar un número mínimo de términos y definiciones básicas sin identificar, y de estas deducir rigurosamente la estructura matemática completa. Esta es la ciencia axiomática, y fueron Hilbert y Peano quienes la fundaron en *Foundations of geometry*. Por primera vez se exponía satisfactoriamente una serie de axiomas de geometría. También probó que su sistema de axiomas era bastante completo, algo que los griegos habían admitido de los axiomas de Euclides, pero sin demostrarlo. De esta forma completó el trabajo de Euclides sin efectuar cambios en la esencia, pero su fundamento pasó de intuitivo a lógico.

A pesar de la importancia que han tenido estos problemas, un hecho que Hilbert no pudo imaginar fue la invención del ordenador o computadora digital programable, primordial en las matemáticas del futuro.

2.7.3. Albert Einstein (1879 - 1955)

La obra del matemático y físico alemán Albert Einstein lo ha convertido en uno de los científicos más famosos de la historia. Sus teorías acerca de la relatividad introdujeron un nuevo y revolucionario modo de pensar en el espacio, el tiempo y el universo. También estableció la relación entre masa y energía con la famosa ecuación $E=mc^2$.

Einstein adquirió la ciudadanía estadounidense en 1940 y se opuso a la guerra a pesar de que, paradójicamente, sus teorías fueron utilizadas para fabricar bombas nucleares, las armas más destructivas que han existido jamás. Einstein pudo llegar a ver muchas de sus teorías confirmadas experimentalmente.



Albert Einstein

2.7.4. John von Neumann (1903 - 1957)

Fue un matemático norteamericano del siglo XX de origen húngaro y uno de los miembros más importantes del programa nuclear de los EE. UU.; realizó avances revolucionarios en la informática y en el diseño de computadoras.

John von Neumann nació en Budapest (Hungría) en 1903 y asistió a la Universidad de Berlín (Alemania) y al Instituto Federal de Tecnología de Zurich (Suiza). Después de finalizar su diplomatura de Ingeniería Química en Zurich, en 1926, Von Neumann impartió clases en Berlín y Hamburgo, a la vez que estudiaba con el matemático David Hilbert. En 1930, se trasladó a los EE. UU. para ocupar un puesto en la Universidad de Princeton y fue miembro del Princeton's Institute of Advanced Study cuando se formó en 1933.

John von Neumann

Durante la Segunda Guerra Mundial, trabajó en el programa de la bomba atómica; después de la guerra trabajó en la bomba de hidrógeno. Desde 1945, dirigió el proyecto de computadoras electrónicas en el Institute for Advanced Study y, a menudo, asesoró en materias estratégicas al ejército de los EE. UU. Este científico llevó a cabo un trabajo importante en varias áreas de las matemáticas, incluyendo la teoría de conjuntos y la teoría de red (una rama del álgebra abstracta), y propuso estructuras matemáticas que hoy en día se conocen como álgebras de von Neumann.

2.7.5. Stephen Hawking (1942 - 2018)

El matemático y físico inglés encabeza la investigación científica fundamental. Su trabajo ha completado las teorías de la relatividad propuestas, por primera vez, por el científico Albert Einstein. Las explicaciones de Hawking acerca de la formación del universo y los agujeros negros del espacio han sido aceptadas por los científicos de todo el mundo. El trabajo de Hawking es conocido fuera de los círculos científicos por su libro *Breve historia del tiempo* (1988). Esta publicación ha vendido 25 millones de ejemplares y ha permitido que mucha gente se introduzca en la física cuántica y la relatividad.

Stephen Hawking

A mediados de la década de los sesenta, Hawking empezó a estudiar la idea de las singularidades, puntos teóricos en el espacio en los que la materia está comprimida infinitamente y donde las leyes de la física no se cumplen. Al colaborar con el matemático británico Roger Penrose, Stephen Hawking desarrolló nuevas técnicas matemáticas y las aplicó a los agujeros negros. Se cree que estos se originan cuando una estrella de gran masa consume su combustible y se desintegra debido a la fuerza de la gravedad, ocasionando una región espacial de la que nada puede escapar, ni siquiera la luz, dada la potencia de su campo gravitatorio.

2.7.6. Roger Penrose (1931)

Es un matemático y pensador británico. En 1964, entró en el Birkberck College de Londres como profesor de matemáticas aplicadas y, a partir de 1973, ocupó la cátedra de matemáticas Rouse Ball en la Universidad de Oxford. Estudioso de los agujeros negros, inventó un sistema para cartografiar los alrededores de dichos fenómenos astrofísicos. Este tipo de mapa se denomina diagrama Penrose. También se dedicó a crear paradojas matemáticas, convirtiendo complicadísimas elucubraciones en ingeniosos *puzzles*. Actualmente, se ha volcado en el estudio de la inteligencia artificial. Es autor de los libros *La nueva mente del emperador* (1989), *Las sombras de la mente* (1994) y *Lo grande, lo pequeño y la mente humana* (1997).

Roger Penrose

2.7.7. Andrew Wiles (1953)

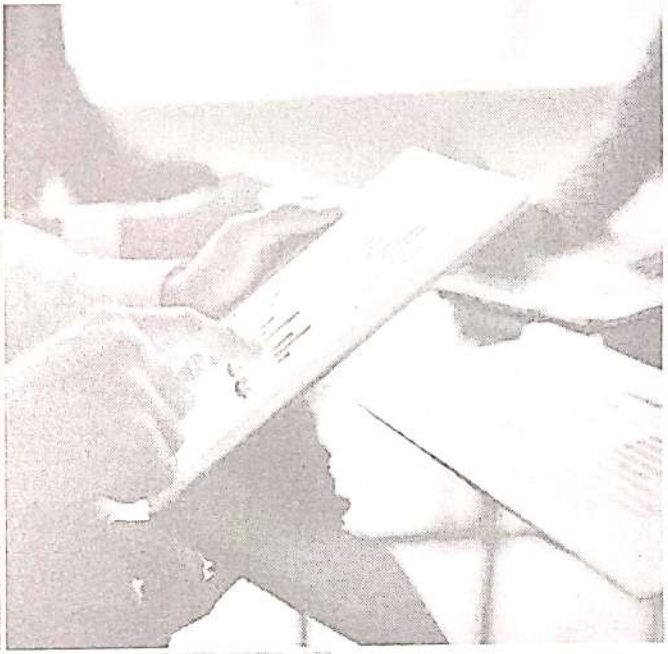
Es el matemático británico más famoso del mundo desde que anunció en 1993 que había demostrado el último teorema de Fermat, un problema que se había resistido tres siglos y medio. La demostración de Wiles, aceptada finalmente en 1994, ocupaba 122 páginas, mucho para un problema que cualquier estudiante de secundaria puede comprender y que Fermat presumía de haber resuelto con "una demostración realmente notable". ¿Es qué acaso la demostración de Wiles es peor que la de Fermat?

Andrew Wiles

El conocimiento matemático del mundo moderno está avanzando rápidamente. Teorías que eran completamente distintas se han reunido para formar teorías más completas y abstractas. Aunque, en su mayoría, los problemas más importantes han sido resuelto, otros, como las hipótesis de Riemann, siguen sin solución. Al mismo tiempo surgen nuevos y estimulantes problemas. Parece que incluso las matemáticas más abstractas están encontrando aplicación.

Capítulo

11



Ludwig Wittgenstein

Lógica proposicional

Henrry Orlando Castañeda Palacios

CAPÍTULO II

LÓGICA PROPOSICIONAL

Objetivos

- Comprender el uso de las proposiciones lógicas en diversas circunstancias.
- Entender y aplicar las tablas de verdad de los operadores lógicos.
- Aprender y usar las leyes de la lógica proposicional.

Introducción

Los celulares son tal vez la mayor revolución de los últimos tiempos. En estos días hay más celulares que personas, y su utilidad ha pasado de solo servir para recibir llamadas a ser usado como correo electrónico, computadora personal, periódico, televisor, cámara digital, juguete de nuestros hijos, radio, etc. Todo esto se puede hacer porque los celulares tienen una configuración interna que un programador ha diseñado con el uso de los algoritmos, los cuales, en la electrónica, usan la lógica booleana, la cual a su vez se basa en la lógica proposicional.

Algunos matemáticos indican que la matemática es como un edificio sólido, ya que tiene determinadas leyes, propiedades y principios, que se enlazan los unos con los otros; por ejemplo, la teoría de grupos y anillos se basa en la aritmética y el álgebra; el cálculo diferencial, las derivadas y el cálculo integral se basan en el álgebra y la trigonometría; la geometría analítica se basa en la aritmética, la geometría y el álgebra; la estadística en la aritmética, etc. Estas leyes junto con el razonamiento cumplen una determinada lógica, esta es la lógica proposicional.

La lógica proposicional se basa en la posibilidad de que una proposición sea verdadera o falsa. Esta capacidad permite, por ejemplo, al ingeniero de sistemas diseñar un circuito binario de ceros (0) y unos (1) que posteriormente se usará como un circuito electrónico con la capacidad de pasar estados de voltaje alto y bajo.

Se usa también la lógica proposicional para demostrar diversos teoremas, diseñar el algoritmo de un determinado *software*, programar el encendido y apagado de las luces de la calle de nuestra ciudad, en los semáforos inteligentes que dan más tiempo a la luz verde cuando hay mucha afluencia de autos, etc.

En la lógica proposicional, como en toda teoría, se necesitan conocer algunos conceptos tales como las proposiciones, las tablas de verdad y sus leyes, pues estos serán de gran utilidad en el desarrollo del conocimiento del presente capítulo; por tanto, es importante aprenderlos.

1▸ DEFINICIÓN

La lógica proposicional es la parte de la lógica que estudia el razonamiento humano, que se da a través del lenguaje.

2▸ ENUNCIADO

Se denomina así a toda expresión del lenguaje humano.

Ejemplos

- El Cusco es la capital del Perú.
- Cuatro es mayor que tres.
- Él es un escritor peruano.
- ¡Estudia!

Algunos enunciados pueden ser denominados verdaderos o falsos.

Ejemplos

- El Cusco es la capital del Perú.
- Cuatro es mayor que tres.
- Albert Einstein es el autor de la teoría de la relatividad general.
- Caral es la ciudad más antigua de América.

Los enunciados pueden expresar un deseo, un mandato o una pregunta.

Ejemplos

- ¡Ojalá ingrese!
- ¡Trabaja!
- ¿Quién es el presidente actual del Perú?

Además, hay enunciados que para determinar si son verdaderos o falsos primero se debe reemplazar determinados términos o palabras.

Ejemplos

- **Él** es un escritor peruano.
- x es impar.

Los enunciados se clasifican en enunciados cerrados y enunciados abiertos.

2.1. ENUNCIADO CERRADO, PROPOSICIÓN LÓGICA O PROPOSICIÓN

Es aquel enunciado que puede ser calificado como verdadero o falso sin ambigüedad.

Ejemplos

- El Cusco es la capital del Perú.
- Cuatro es mayor que tres.
- Albert Einstein es el autor de la teoría de la relatividad general.
- George Cantor es el padre de la teoría de conjuntos.
- Caral es la ciudad más antigua de América.
- El compositor de "El cóndor pasa" es Daniel Alomía Robles.
- El Manchester United es un equipo de fútbol inglés.
- La Juventus ganó la Champions League 2018-2019.
- La suma de los ángulos internos de un triángulo es 180°.
- La semana tiene siete días y el hidrógeno es un elemento químico.
- Jazmín es fan de *Soy Luna* o le gusta bailar jugando Just dance.
- Si Viviana ve *Soy Luna*, entonces le gusta patinar.
- Si Estéfany ve *Peppa Pig*, entonces no juega con sus muñecas.
- Doris puede enseñar matemáticas si y solo si estudió matemáticas.
- Perú es un país amazónico y latinoamericano.
- Jazmín canta, Viviana toca el piano y Estéfany toca la guitarra eléctrica.
- O Rosa viaja en barco a España o Rosa viaja en avión a España.
- O bien Orlando estudió secundaria en Huamantanga o bien Orlando lo hizo en Trujillo.
- Huamantanga es un distrito de Canta.

- Los sumerios eran grandes conocedores de la aritmética y del álgebra.
- Los incas conocieron las matemáticas, ejemplo de esto se ve en el quipu y la yupana.

Dado que una proposición puede ser calificada de verdadera o falsa, a esta posibilidad se le conoce como valor veritativo o valor de verdad de la proposición.

Ejemplos

- La proposición "El Cusco es la capital del Perú" es falsa, entonces el valor de verdad de la proposición es falso.
- La proposición "Cuatro es mayor que tres" es verdadera, entonces el valor veritativo de la proposición es verdadero.

Para un mejor análisis de las proposiciones, se ha considerado necesario asignarles notaciones, para las cuales generalmente se usan letras minúsculas, como p, q, r, s.

Ejemplos

- p: Albert Einstein es el autor de la teoría de la relatividad general.
  Entonces
  $$V(p) \equiv \text{verdadero}$$
  La notación anterior indica que el valor de verdad de la proposición, $V(p)$, es verdadero.
- q: George Cantor es el padre de la teoría de conjuntos.
  Entonces
  $$V(q) \equiv \text{verdadero}$$
- r: Caral no es la ciudad más antigua de América.
  Entonces
  $$V(r) \equiv \text{falso}$$
- s: El Cusco es la capital del Perú.
  Entonces
  $$V(s) \equiv \text{falso}$$

Tablas de verdad

Cuando no se conoce el texto de la proposición y, por ende, no se sabe su valor de verdad, se hace uso de variables proposicionales p, q, r, s, ..., las cuales presentamos usando esquemas llamados tabla de verdad.

p
V
F

p	q
V	V
V	F
F	V
F	F

p	q	r
V	V	V
V	V	F
V	F	V
V	F	F
F	V	V
F	V	F
F	F	V
F	F	F

Nota

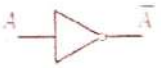
Las tablas de verdad también son llamadas tablas de Wittgenstein, en honor al filósofo Ludwig Wittgenstein, quien escribió tres obras importantes: *Tractatus logico-philosophicus*, *Los cuadernos azul y marrón* e *Investigaciones filosóficas*, las dos últimas publicadas póstumamente.

Ludwig Wittgenstein

Nota

En la lógica booleana, las compuertas lógicas son dispositivos electrónicos que reciben determinados valores de entrada y otorgan un determinado valor de salida. Estos valores son la base de la electrónica digital.

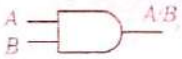
Algunos símbolos de las compuertas lógicas son los siguientes:

- 

(compuerta NOT)

  Su tabla de verdad es

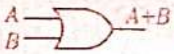
COMPUERTA NOT	
Entrada	Salida
0	1
1	0

- 

(compuerta AND)

  Su tabla de verdad es

COMPUERTA AND		
A	B	Salida
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

- 

(compuerta OR)

  Su tabla de verdad es

COMPUERTA OR		
A	B	Salida
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

Observemos que los valores de 0 corresponden a falso; y los valores de 1, a verdadero.

2.2. ENUNCIADO ABIERTO O CUASIPROPOSICIÓN

También llamado función proposicional, es aquel enunciado que al reemplazar una o más palabras (o términos) por determinados valores se obtienen proposiciones lógicas.

Ejemplo

La expresión "Él es un escritor peruano" es un enunciado abierto, ya que al reemplazar la palabra "él" por nombres propios, el enunciado se convierte en proposición.

Además, la palabra "él" es la variable y se denota como $P_{(\text{él})}$, lo cual queda así:

$P_{(\text{él})}$: Él es un escritor peruano.

Luego,

- $P_{(\text{César Vallejo})}$ es una proposición cuyo valor de verdad es verdadero.
- $P_{(\text{Gabriel García Márquez})}$ es una proposición cuyo valor de verdad es falso, ya que Gabriel García Márquez es colombiano.
- $P_{(\text{Inés Melchor})}$ es una proposición cuyo valor de verdad es falso, ya que Inés Melchor no es escritora.

Recuerde

- Gabriel García Márquez recibió el Premio Nobel por su obra *Cien años de soledad*, la cual es considerada la obra cumbre del realismo mágico.

Gabriel García Márquez

- Inés Melchor (Huancavelica, 1986) es una fondista peruana que posee el récord sudamericano de maratón, con un tiempo de 2:26:48. Además del récord, Melchor es multicampeona sudamericana y panamericana de atletismo. Fue elegida como la mejor atleta peruana el año 2003.

Inés Melchor

La expresión "$F_{(x)}$: x es impar" también es un enunciado abierto. Veamos.

Si $x=3$, la expresión "3 es impar" es verdadera.

Si $x=4$, la expresión "4 es impar" es falsa.

Además, es necesario tener en cuenta que toda interrogación, deseo o admiración no son proposiciones, debido a que no se les puede calificar como verdadero o falso.

Ejemplos

- ¿Quién es el presidente actual del Perú?
- ¡Estudia!
- Ojalá Perú sea campeón del próximo mundial de fútbol.
- Prohibido fumar en la biblioteca
- ¡Eureka!
- ¡Auxilio!
- ¿Qué hora es?

3 CLASIFICACIÓN DE LAS PROPOSICIONES

Las proposiciones se pueden enlazar unas con otras para formar otras proposiciones más complejas, por lo cual es necesario clasificar las proposiciones teniendo en cuenta el número de ideas que expresan.

3.1. PROPOSICIÓN SIMPLE O ATÓMICA

Es aquella proposición afirmativa que expresa una sola idea.

La proposición "2 es menor que 5" es afirmativa y nos expresa una idea; por tanto, es una proposición simple.

La proposición: "5 es par" también es afirmativa y expresa una idea, entonces también es una proposición simple.

Importante

Las proposiciones simples son siempre afirmativas.

Ejemplos

- Cuatro es menor que cinco.
- El punto de ebullición del agua es 120 °C.
- Albert Einstein es el autor de la teoría de la relatividad general.
- George Cantor es el padre de la teoría de conjuntos.
- Caral es la ciudad más antigua de América.
- El compositor de "El cóndor pasa" es Daniel Alomía Robles.

3.2. PROPOSICIÓN COMPUESTA O MOLECULAR

Es aquella proposición que expresa más de una idea o que es negativa. La proposición "2 es menor que 5 y 5 es par" es una proposición compuesta, ya que expresa dos ideas.

La proposición "George Cantor no es el padre de la teoría de conjuntos" es una proposición compuesta, ya que niega una idea.

Ejemplos

- La semana no tiene siete días.
- El *Homo habilis* es un homínido, asimismo es un antecesor del *Homo sapiens sapiens*.
- O bien Orlando estudió secundaria en Huamantanga o bien Orlando lo hizo en Trujillo.
- Jazmín es fan de *Soy Luna* o le gusta bailar jugando Just dance.
- Viviana ve *Frozen* o le gusta patinar.
- Si Estéfany ve *Peppa Pig*, entonces no juega con sus muñecas.
- Las rectas coplanares $\mathscr{L}_1$ y $\mathscr{L}_2$ son perpendiculares si y solo si el ángulo entre ellas es 90°.
- Arturo es un gran aritmético, puesto que tiene un amplio conocimiento del curso.

Observamos que las proposiciones compuestas se forman enlazando proposiciones simples; en ese sentido, se puede considerar a las proposiciones simples como los ladrillos y las proposiciones compuestas como las paredes donde descansa la teoría de la lógica proposicional.

A los enlaces que unen las proposiciones se les denomina conectivos lógicos.

Conectivo lógico	Símbolo
No es cierto que ...	$\sim$
... y ...	$\wedge$
... o ...	$\vee$
O ... o ...	Δ
Si ... entonces ...	$\rightarrow$
... si y solo si ...	$\leftrightarrow$

Para determinar el valor de verdad de una proposición simple, es necesario solo conocer el tema del cual trata la proposición; sin embargo, en las proposiciones compuestas hay que hacer un análisis para conocer su valor de verdad.

4 ▸ ANÁLISIS DE LAS PROPOSICIONES COMPUESTAS BÁSICAS

Empezaremos con aquellas proposiciones compuestas que tiene un solo conectivo lógico.

4.1. NEGACIÓN

Una proposición negativa es aquella que usa el adverbio negativo "no" o sus equivalentes.

Símbolo: $\sim$

Esquema: $\sim p$

Se lee:

- No p
- No es cierto que p
- Nunca p
- Es falso que p

Ejemplos

- La semana **no** tiene siete días.
- **Es falso que** el hidrógeno sea un elemento químico.
- **No es cierto que** haya premio nobel para los matemáticos.
- **Nunca** un átomo de hidrógeno se enlaza químicamente con un átomo de oxígeno.

Cuando consideramos la proposición

p: La semana tiene siete días.

su negación será

$\sim p$: La semana **no** tiene siete días.

Se observa que al negar una proposición, se cambia el valor de verdad de la proposición.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	$\sim p$
V	F
F	V

4.2. CONJUNCIÓN

Una proposición conjuntiva es el resultado de enlazar proposiciones mediante el conectivo lógico "y" o sus expresiones equivalentes.

Símbolo: $\wedge$

Esquema: $p \wedge q$

Se lee: p y q

Ejemplos

- Euclides fue un geómetra **y** Diofanto, un aritmético.
- Brasilia es la capital de Brasil, **pero** no es la ciudad más poblada de Brasil.
- El *Homo habilis* es un homínido, **asimismo** es un antecesor del *Homo sapiens sapiens*.
- Un triángulo tiene 3 lados **y** sus 3 ángulos internos suman 180°.
- Viviana es una gran atleta, **además** es una niña muy estudiosa.

Nota

Hay que tener en cuenta que hay otras palabras que establecen una relación conjuntiva, como "sin embargo", "también", "igualmente", etc.

El conectivo "y" cumple el papel de enlazar de manera afirmativa dos ideas, es decir, la proposición conjuntiva será verdadera cuando ambas proposiciones componentes sean verdaderas.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	p	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Ejemplos

- p: La semana tiene 7 días y el hidrógeno es un elemento químico.

  p es una proposición conjuntiva verdadera, puesto que las dos ideas que la componen son verdaderas.

- q: El 4 es par; además, es menor que 3.

  q es una proposición conjuntiva falsa, ya que la idea "4 es menor que 3" es falsa, es decir, para que una proposición conjuntiva sea falsa basta que uno de sus componentes sea falso.

- r: Carabayllo no es un distrito de Lima y Arequipa es una ciudad del Perú.

  r es una proposición conjuntiva falsa, ya que la primera idea "Carabayllo no es un distrito de Lima" es falsa.

- s: La suma de los ángulos internos de un triángulo es 200° y el punto de ebullición del agua es 120 °C.

  s es una proposición conjuntiva falsa, ya que las dos ideas que la componen son falsas.

Observación

Hay expresiones que tienen una "y", pero que no son proposiciones conjuntivas.

Por ejemplo, "Perú y Brasil son países limítrofes" no es una proposición conjuntiva, puesto que la "y" en esta proposición no une dos ideas, por lo tanto, es una proposición simple.

Otros ejemplos:

- Manco Cápac y Mama Ocllo eran esposos.
- La diferencia de 8 y 5 es 3.
- Jazmín, Viviana y Estéfany son hermanas.

4.3. DISYUNCIÓN DÉBIL O INCLUSIVA

Una disyunción débil es el resultado de enlazar proposiciones mediante el conectivo lógico "o" o sus expresiones equivalentes.

Símbolo: $\vee$

Esquema: $p \vee q$

Se lee: p o q

Ejemplos

- Jazmín es fan de *Soy Luna* **o** le gusta bailar jugando Just dance.
- Viviana ve *Frozen* **o** le gusta patinar.
- Estéfany ve *Peppa Pig* **o** juega con sus muñecas.
- José María Arguedas escribió *El zorro de arriba y el zorro de abajo* **o** *Todas las sangres*.
- El Perú tiene como recurso minero al oro **o** al litio.

El conectivo "o" cumple el papel de conectar de manera afirmativa por lo menos una de dos ideas, es decir, la proposición disyuntiva débil será verdadera cuando por lo menos una de sus proposiciones componentes sea verdadera.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos

- p: La semana tiene 7 días o el hidrógeno es un elemento químico.

  p es una proposición disyuntiva inclusiva verdadera, puesto que las dos ideas que la componen son verdaderas.

- q: El 4 es par o es menor que 3.

  q es una proposición disyuntiva inclusiva verdadera, ya que la primera idea "4 es par" es verdadera.

- r: Carabayllo no es un distrito de Lima o Arequipa es una ciudad del Perú.

  r es una proposición disyuntiva inclusiva verdadera, ya que la segunda idea "Arequipa es una ciudad del Perú" es verdadera.

- s: La suma de los ángulos internos de un triánguio es 200° o el punto de ebullición del agua es 120 °C.

  s es una proposición disyuntiva inclusiva falsa, ya que las dos ideas que la componen son falsas, es decir, para que una proposición disyuntiva débil sea falsa, las dos proposiciones que la componen deben ser falsas.

Nota

La expresión "$ab=0$" indica que $a=0$ o $b=0$, además, pueden ser ambas a la vez (cuando $a=b$). Dicha expresión es de gran utilidad en las matemáticas.

Por ejemplo, la ecuación polinomial

$$(x-3)(x-5)=0$$

se resuelve como

$$x-3=0 \quad \vee \quad x-5=0$$
$$x=3 \quad \vee \quad x=5$$

y se dice que 3 y 5 son las soluciones de dicha ecuación.

4.4. DISYUNCIÓN FUERTE O EXCLUSIVA

Una disyunción fuerte es aquella que resulta de enlazar dos ideas de manera exclusiva, es decir, la ocurrencia de una indica que la otra idea no ocurre.

Símbolo: Δ

Esquema: $p \Delta q$

$p \nleftrightarrow q$

Se lee:

- O bien p o bien q
- O p o q

Ejemplos

- **O** Rosa viaja en barco a España **o** Rosa viaja en avión a España.
- **O bien** Orlando estudió secundaria en Huamantanga **o bien** Orlando lo hizo en Trujillo.
- Dos rectas coplanares **o** son perpendiculares **o** son paralelas **o** se cortan en un punto.
- Jazmín ve *BIA* **o** *Club 57* **o** *Noobees*.

Dado que este conectivo exige la ocurrencia de una sola idea, entonces la proposición disyuntiva exclusiva será verdadera cuando los valores de verdad de las proposiciones componentes sean diferentes.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Ejemplos

- p: O la semana tiene 7 días o el hidrógeno es un elemento químico.

  p es una proposición disyuntiva fuerte falsa, ya que las dos ideas que la componen son verdaderas, es decir, para que una proposición disyuntiva fuerte sea falsa las dos proposiciones que la componen deben tener valores de verdad iguales.

- q: O el 4 es par o es menor que 3.

  q es una proposición disyuntiva fuerte verdadera, ya que la primera idea "4 es par" es verdadera y la segunda idea "4 es menor que 3" es falsa.

- r: O bien Carabayllo no es un distrito de Lima o bien Arequipa es una ciudad del Perú.

  r es una proposición disyuntiva fuerte verdadera, ya que la primera idea "Carabayllo no es un distrito de Lima" es falsa y la segunda idea "Arequipa es una ciudad del Perú" es verdadera.

- s: O bien la suma de los ángulos internos de un triángulo es 200° o bien el punto de ebullición del agua es 120 °C.

  s es una proposición disyuntiva fuerte falsa, ya que las dos ideas que la componen son falsas.

> **Nota**
> La expresión "$x \leq 5$" tiene el comportamiento de una disyunción exclusiva, puesto que nos dice "x es menor que 5" o "x es igual a 5"; y será verdadera cuando se cumpla solo una de ellas, además, su negación es "$x > 5$".

4.5. CONDICIONAL

Una condicional es el resultado de enlazar proposiciones mediante el conectivo lógico "Si ... entonces ..." o sus expresiones equivalentes.

Símbolo: $\rightarrow$

Esquema: $p \rightarrow q$

Se lee: Si p entonces q.

> **Nota**
> En el esquema $p \rightarrow q$, la proposición p se denomina antecedente y la proposición q se denomina consecuente.

Ejemplos

- **Si** 2 es par, **entonces** 3 es impar.
- **Si** hoy sembramos plantas, **entonces** el próximo año tendremos árboles.

- **Si** Doris estudia hoy, **entonces** triunfará mañana.
- **Si** en Huamantanga es primavera, **entonces** habrá muchas flores de colores en Pagüaray.

Otras formas de leer la expresión $p \rightarrow q$

- Si p, entonces q.
- p es suficiente para q.
- p es una condición suficiente para q.
- p solo si q.
- Cuando p, q.
- p de ahí que q.
- p por lo tanto q.
- p en consecuencia q.
- p luego q.
- p en conclusión q.

Además,

- q se desprende de p.
- q si p.
- q siempre que p.
- q es necesaria para p.
- q es una condición necesaria para p.
- q puesto que p.
- q ya que p.
- q dado que p.
- q porque p.
- q cada vez que p.
- q cuando p.
- q a menos que p.

Las proposiciones siguientes también son condicionales:

- 5 es menor que 8 **si** $5-8<0$.
- Rosita del Pilar pondrá su consultorio odontológico **siempre que** ya sea dentista.
- Estéfany está en inicial, **puesto que** tiene 4 años.
- Jazmín estudia robótica, **dado que** está en primaria.
- Viviana estudia inglés **porque** es una niña muy estudiosa.
- Estéfany conoce al velocirráptor **porque** su profesora le habló de los dinosaurios.
- Ramiro es un buen maestro de aritmética, **puesto que** sus alumnos así lo atestiguan.
- Thales de Mileto no es griego, **dado que** Mileto era provincia de Persia.

Analicemos el enunciado "Si ingresas a la universidad, entonces te compro un auto".

Se puede decir que si se cumple el ingreso a la universidad y se compra el auto, toda la expresión sería verdadera. Sin embargo, si ingresa a la universidad y no compra el auto, estaría contradiciendo la idea original.

Si se da el caso de que no ingresa a la universidad, el hecho de comprar o no el auto no contradice la idea original; la única manera de romper la promesa es cuando ingresa a la universidad y no se compra el auto.

Esto nos indica que la condicional solamente será falsa cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso; en los otros casos, será verdadera.

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Ejemplos

- p: Si la semana tiene 7 días, entonces el hidrógeno es un elemento químico.
  p es una proposición condicional verdadera, ya que las dos ideas que la componen son verdaderas.
- q: Si el 4 es par, entonces es menor que 3.
  q es una proposición condicional falsa, ya que la primera idea "4 es par" es verdadera y la segunda idea "4 es menor que 3" es falsa.

- r: Si Carabayllo no es un distrito de Lima, entonces Arequipa es una ciudad del Perú.
  r es una proposición condicional verdadera, ya que la primera idea "Carabayllo no es un distrito de Lima" es falsa y la segunda idea "Arequipa es una ciudad del Perú" es verdadera.
- s: Si la suma de los ángulos internos de un triángulo es 200°, entonces el punto de ebullición del agua es 120 °C.
  s es una proposición condicional verdadera, ya que las dos ideas que la componen son falsas.

4.6. BICONDICIONAL

Una bicondicional es el resultado de enlazar proposiciones mediante el conectivo lógico "si y solo si" o sus expresiones equivalentes.
Símbolo: $\leftrightarrow$
Esquema: $p \leftrightarrow q$
Se lee: p si y solo si q

Ejemplos

- Un ángulo es recto **si y solo si** su medida angular es 90°.
- Un móvil realiza MRU **si y solo si** se mueve en una trayectoria rectilínea y su aceleración es cero.
- Una condición **necesaria y suficiente** para que un triángulo sea isósceles es que dos de sus ángulos sean iguales.
- Una sucesión polinomial es una progresión aritmética **si y solo si** la diferencia de dos términos consecutivos es constante.

Cuando analizamos la proposición "Un polígono es regular si y solo si las longitudes de todos sus lados son iguales", observamos que si un polígono es regular, entonces las longitudes de sus lados serán iguales, y si las longitudes de sus lados son iguales, entonces será un polígono regular.

Es decir, la bicondicional nos ayuda a hacer definiciones; observamos que será verdadera cuando los valores de verdad de sus proposiciones componentes sean iguales.

Observación

La proposición "p si q" significa $q \rightarrow p$, y "p solo si q" significa $p \rightarrow q$; por tanto, "p si y solo si q" significa $p \leftrightarrow q$.

Es decir,

$$\boxed{p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)}$$

Su tabla de verdad es la siguiente:

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Ejemplos

- p: La semana tiene 7 días si y solo si el hidrógeno es un elemento químico.
  p es una proposición bicondicional verdadera, ya que las dos ideas que la componen tienen el mismo valor de verdad, en este ejemplo son verdaderas.
- q: El 4 es par si y solo si es menor que 3.
  q es una proposición bicondicional falsa, ya que la primera idea "4 es par" es verdadera y la segunda idea "4 es menor que 3" es falsa, es decir, tienen valores de verdad diferentes.
- r: Carabayllo no es un distrito de Lima si y solo si Arequipa es una ciudad del Perú.
  r es una proposición bicondicional falsa, ya que la primera idea "Carabayllo no es un distrito de Lima" es falsa y la segunda idea "Arequipa es una ciudad del Perú" es verdadera, es decir, tienen valores de verdad diferentes.

- *s*: La suma de los ángulos internos de un triángulo es 200° si y solo si el punto de ebullición del agua es 120 °C.

  s es una proposición bicondicional verdadera, ya que las dos ideas que la componen tiene el mismo valor de verdad; en este ejemplo, son falsas.

> ▸▸ Nota
>
> Los conectivos lógicos también se comportan como operadores; en ese sentido, a la negación se le denomina operador monádico, ya que afecta solo a una proposición; sin embargo, a los otros operadores se les denomina operadores biádicos, ya que afectan a dos proposiciones.

Resumen de las tablas de verdad

1. Se observa que al negar una proposición se cambia el valor de verdad de la proposición.

p	$\sim p$
V	F
F	V

2. El conectivo "y" cumple el papel de conectar de manera afirmativa dos ideas, esto quiere decir que la proposición conjuntiva será verdadera cuando ambas proposiciones componentes sean verdaderas.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3. El conectivo "o" cumple el papel de conectar de manera afirmativa por lo menos una de dos ideas; es decir, la disyunción débil será verdadera cuando por lo menos una de sus proposiciones componentes sea verdadera.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

4. Dado que el conectivo "o bien ... o bien..." exige la ocurrencia de solo una idea, entonces la disyunción fuerte será verdadera cuando los valores de verdad de las proposiciones componentes sean diferentes.

p	q	$p \Delta q$
V	V	F
V	F	V
F	V	V
F	F	F

5. Se puede entender a la condicional como una promesa; debe ocurrir la condición p para que ocurra q, entonces la única forma de no cumplir esa promesa es cuando ocurre p y no ocurre q.

   La condicional solamente será falsa cuando el antecedente sea verdadero y el consecuente sea falso.

p	q	$p \rightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

6. La bicondicional es verdadera cuando los valores de verdad de las proposiciones componentes son iguales.

p	q	$p \leftrightarrow q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

5 Circuitos lógicos

Un circuito lógico es una forma gráfica de representar proposiciones moleculares grandes. En la electrónica se sirven de ellos para, con ayuda de las compuertas lógicas, diseñar circuitos que responden a algoritmos diseñados para que funcione un aparato electrónico. La tecnología actual permite enlazar millones de estos circuitos en circuitos integrados y presentarlos en una *mainboard* (placa madre).

Nosotros veremos los circuitos más simples: circuito en serie y circuito en paralelo.

5.1. Circuito en serie

Está constituido por interruptores dispuestos uno a continuación de otro. Este circuito representa la conjunción de dos o más proposiciones.

Ejemplos

- $p \wedge q$ se representa por

  $-p-q-$

- $p \wedge q \wedge r$ se representa por

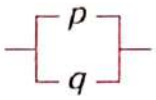
  $-p-q-r-$

5.2. Circuito en paralelo

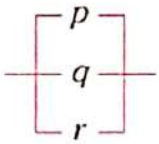
Está constituido por interruptores dispuestos uno al frente del otro. Este circuito representa la disyunción débil de dos o más proposiciones.

Ejemplos

- $p \vee q$ se representa por



- $p \vee q \vee r$ se representa por



6 Esquema molecular

Ya que sabemos analizar una proposición compuesta con un conectivo, ahora veremos expresiones con más de un conectivo.

Ejemplos

- A: $(p \wedge q) \vee \sim p$
- B: $[p \rightarrow (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow p$

Se denomina esquema molecular al conjunto de variables proposicionales enlazados con conectivos lógicos, como los ejemplos anteriores.

Observe que, al haber varios operadores lógicos, es necesario que haya una jerarquía entre ellos, esta es la razón de los signos de agrupación.

Si un esquema molecular no ofrece ambigüedad en la función que tiene cada uno de los conectivos lógicos, se dice que es una fórmula bien definida.

Por ejemplo, en el esquema molecular

$$(p \wedge q) \vee \sim p$$

se observa que la disyunción débil es el operador más importante.

En el siguiente esquema molecular

$$[p \rightarrow (p \wedge \sim q)] \leftrightarrow p$$

la bicondicional es el operador más importante.

7▸ EVALUACIÓN DE ESQUEMAS MOLECULARES

Evaluar un esquema molecular significa encontrar el valor de verdad de una proposición compuesta (conociendo el valor de verdad de cada proposición componente), o encontrar el conjunto ordenado de valores de verdad (matriz principal) del esquema molecular.

Aplicación 1

Se sabe que $V(p) \equiv$ verdadero

$V(q) \equiv$ falso

Determine el valor de verdad de la proposición B.

$$B \equiv (p \wedge q) \leftrightarrow [(\sim q \,\Delta\, p) \vee (p \rightarrow q)]$$

Resolución

Dado que sabemos el valor de verdad de cada variable proposicional, p y q, vamos a reemplazar y resolver teniendo en cuenta cada operador lógico y los signos de agrupación.

$$B \equiv (p \wedge q) \leftrightarrow [(\underbrace{\sim q}\,\Delta\, p) \vee (p \rightarrow q)]$$

$$\underbrace{V \wedge F} \qquad \underbrace{V \,\Delta\, V} \qquad \underbrace{V \rightarrow F}$$

$$F \qquad \underbrace{F \quad \vee \quad F}$$

$$\underbrace{F \quad \leftrightarrow \quad F}$$

$$V$$

Por lo tanto, B es verdadero.

Aplicación 2

Si se sabe que p es verdadero, q es falso y r es verdadero, determine el valor de verdad de

$$A \equiv [(q \leftrightarrow p) \rightarrow r] \vee \sim p$$

Resolución

Reemplazamos los valores de verdad en A.

$$A \equiv [(q \leftrightarrow p) \rightarrow r] \vee \underbrace{\sim p}$$

$$\underbrace{(F \leftrightarrow V)} \rightarrow V \qquad F$$

$$\underbrace{[\quad F \quad \rightarrow V]}$$

$$\underbrace{V \quad \vee \quad F}$$

$$V$$

Al hacer uso de los conectivos lógicos, se determina que la proposición A es verdadera.

Aplicación 3

Determine la matriz principal de

$$(p \vee q) \rightarrow (p \,\Delta\, q)$$

Resolución

Dado que no conocemos el valor de verdad de cada variable proposicional, es necesario utilizar las tablas de verdad.

p	q	$(p \vee q)$	$\rightarrow$	$(p \,\Delta\, q)$
V	V	V	F	F
V	F	V	V	V
F	V	V	V	V
F	F	F	V	F

matriz principal

Por lo tanto, la matriz principal es FVVV.

Aplicación 4

Determine la matriz principal de

$$[(p \leftrightarrow q) \rightarrow r] \vee \sim p$$

Resolución

Elaboramos una tabla de verdad.

p	q	r	$[(p \leftrightarrow q)$	$\rightarrow$	$r]$	$\vee$	$\sim p$
V	V	V	V	V	V	V	F
V	V	F	V	F	F	F	F
V	F	V	F	V	V	V	F
V	F	F	F	V	F	V	F
F	V	V	F	V	V	V	V
F	V	F	F	V	F	V	V
F	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	V	F	F	V	V

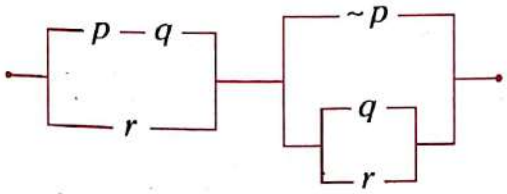
matriz principal

Cada columna representa una matriz; hay matrices auxiliares o secundarias y solo hay una matriz principal, que es la columna del operador más importante. En este ejercicio, la matriz principal es VFVVVVV.

> **Nota**
> Observe que en las cuatro aplicaciones se han resuelto desde la parte más agrupada hacia afuera; además, existe la costumbre de que la matriz de valores de verdad se ubica debajo del operador.

Aplicación 5

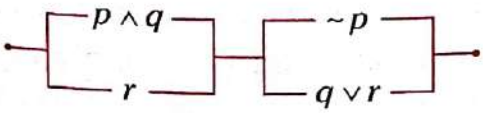
Sea el siguiente circuito lógico:



Elabore su esquema molecular y determine su matriz principal.

Resolución

Primero elaboraremos su esquema molecular.



Es equivalente a

$$(p \wedge q) \vee r \quad \sim p \vee (q \vee r)$$

Luego, se tiene que

$$[(p \wedge q) \vee r] \wedge [\sim p \vee (q \vee r)]$$

Ahora elaboraremos su tabla de verdad.

p	q	r	$[(p \wedge q)$	$\vee$	$r]$	$\wedge$	$[\sim p$	$\vee$	$(q \vee r)]$
V	V	V	V	V	V	V	F	V	V
V	V	F	V	V	F	V	F	V	V
V	F	V	F	V	V	V	F	V	V
V	F	F	F	F	F	F	F	F	F
F	V	V	F	V	V	V	V	V	V
F	V	F	F	F	F	F	V	V	V
F	F	V	F	V	V	V	V	V	V
F	F	F	F	F	F	F	V	V	F

matriz principal

Por lo tanto, su matriz principal es VVVFVFVF.

> **Nota**
> Se puede reducir un poco la resolución si hacemos uso de las leyes de la lógica proposicional, leyes que veremos páginas más adelante.

8▸ FORMALIZACIÓN DE UN ESQUEMA MOLECULAR

Con mucha frecuencia se necesita convertir un texto largo a un texto más pequeño que indique lo mismo. Para ello es necesario formalizar dicho texto; esto quiere decir, trasladar el texto a un esquema molecular, para luego hacer uso de las leyes de la lógica proposicional y reducirlo.

Para formalizar un texto se siguen los siguientes pasos:

1. Se identifican las proposiciones simples.
2. Se identifican los conectivos lógicos.
3. Se agrupan las proposiciones haciendo uso de los signos de puntuación. Se debe tener en cuenta la jerarquía de los signos de puntuación.

Criterio de los signos de puntuación

La jerarquía de los signos de puntuación es la siguiente:

(coma) ; (punto y coma) ; (punto seguido) ; (punto aparte)

menor jerarquía → mayor jerarquía

Por ejemplo, se desea formalizar el siguiente texto:

Si Jazmín estudia aritmética y no llega temprano a la academia, entonces Jazmín no estudia aritmética pero Jazmín llega temprano a la academia; además Jazmín estudia aritmética.

Realizamos los pasos que se han indicado.

1. Identificamos las proposiciones simples.
   p: Jazmín estudia aritmética.
   q: Jazmín llega temprano a la academia.
   Entonces queda el texto de la siguiente manera:
   Si p y no q, entonces no p pero q; además p

2. Identificamos los conectivos lógicos.
   $p \wedge \sim q, \rightarrow \sim p \wedge q; \wedge p$

3. Agrupamos las proposiciones haciendo uso de la jerarquía de los signos de puntuación. El texto quedará de la siguiente manera:
   $[(p \wedge \sim q) \rightarrow (\sim p \wedge q)] \wedge p$
   Y ya está formalizado el texto.
   Si queremos reducirlo, necesitamos conocer las leyes de la lógica proposicional, las cuales estudiaremos más adelante.

Nota

Si hay dos signos de puntuación consecutivos que son iguales, el segundo de ellos tiene mayor jerarquía.

Ejemplo

Si Pedro estudia entonces aprenderá; si Pedro no estudia entonces no aprenderá, entonces Pedro ingresará.

menor jerarquía

mayor jerarquía

Luego

p: Pedro estudia
q: Pedro aprenderá
r: Pedro ingresará

Formalizando

$[(p \rightarrow q) \wedge (\sim p \rightarrow \sim q)] \rightarrow r$

9 ▸ CLASIFICACIÓN DE LOS ESQUEMAS MOLECULARES

Según la matriz principal, los esquemas moleculares pueden ser tautología, contradicción o contingencia.

9.1. TAUTOLOGÍA (T)

Ocurre cuando todos los valores de verdad de la matriz principal son verdaderos.

Aplicación 6

Evalúe el siguiente esquema molecular:

C: $[(p \wedge q) \vee p] \leftrightarrow p$

Resolución

Elaboramos la tabla de verdad de C.

p	q	$[(p \wedge q)$	$\vee$	$p]$	$\leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	V	F

Se observa que en la matriz principal todos los resultados son verdaderos, por lo tanto, C es una tautología

9.2. CONTRADICCIÓN (⊥)

Ocurre cuando todos los valores de verdad de la matriz principal son falsos.

Aplicación 7

Evalúe el siguiente esquema molecular:

D: $(p \not\leftrightarrow q) \leftrightarrow (\sim p \not\leftrightarrow q)$

Resolución

Elaboramos la tabla de verdad de D.

p	q	$(p \not\leftrightarrow q)$	$\leftrightarrow$	$(\sim p \not\leftrightarrow q)$
V	V	F	F	V
V	F	V	F	F
F	V	V	F	F
F	F	F	F	V

Se observa que en la matriz principal todos los resultados son falsos; por lo tanto, D es una contradicción.

9.3. CONTINGENCIA (Q)

Ocurre cuando en los valores de verdad de la matriz principal hay por lo menos uno falso y por lo menos uno verdadero.

Aplicación 8

Evalúe el siguiente esquema molecular:

E: $(p \rightarrow q) \rightarrow (q \rightarrow p)$

Resolución

Elaboramos una tabla de verdad.

p	q	$(p \rightarrow q)$	$\rightarrow$	$(q \rightarrow p)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	V
F	V	V	F	F
F	F	V	V	V

Se observa que en la matriz principal hay tres resultados verdaderos y un resultado falso; por lo tanto, E es una contingencia.

10▸ RELACIONES ENTRE ESQUEMAS MOLECULARES

10.1. IMPLICACIÓN LÓGICA (⇒)

Se denomina implicación lógica al esquema molecular condicional tautológico.

Si el esquema molecular $A \rightarrow B$ es tautológico, se dice que A implica lógicamente a B y se denota como

$$A \Rightarrow B$$

Aplicación 9

Sea A: $(\sim p \not\leftrightarrow q)$ y B: $(p \not\leftrightarrow \sim q)$

Evalúe la condicional $A \rightarrow B$.

Resolución

Elaboramos la tabla de verdad de $A \rightarrow B$.

p	q	$(\sim p \not\leftrightarrow q)$	$\rightarrow$	$(p \not\leftrightarrow \sim q)$
V	V	V	V	V
V	F	F	V	F
F	V	F	V	F
F	F	V	V	V

Se observa que la condicional $A \rightarrow B$ es tautológica; por tanto, es una implicación lógica. Podemos decir que $(\sim p \not\leftrightarrow q)$ implica lógicamente a $(p \not\leftrightarrow \sim q)$.

Es decir,

$$(\sim p \not\leftrightarrow q) \Rightarrow (p \not\leftrightarrow \sim q)$$

10.2. EQUIVALENCIA LÓGICA (⇔)

Se denomina equivalencia lógica al esquema molecular bicondicional tautológico.

Si el esquema molecular $A \leftrightarrow B$ es una tautología, se dice que A es lógicamente equivalente a B y se denota como

$$A \Leftrightarrow B$$

Aplicación 10

Sea A: $[(p \wedge q) \vee p]$ y B: p

Evalúe la bicondicional $A \leftrightarrow B$.

Resolución

Elaboramos la tabla de verdad de $A \leftrightarrow B$.

p	q	$[(p \wedge q)$	$\vee$	$p]$	$\leftrightarrow$	p
V	V	V	V	V	V	V
V	F	F	V	V	V	V
F	V	F	F	F	V	F
F	F	F	F	F	V	F

Se observa que la bicondicional $A \leftrightarrow B$ es tautológica; por tanto, es una equivalencia lógica y podemos decir que $[(p \wedge q) \vee p]$ es equivalente a p; es decir,

$$[(p \wedge q) \vee p] \Leftrightarrow p$$

Nota

Cuando se tiene una equivalencia lógica $A \Leftrightarrow B$, se observa que las tablas de verdad de A y B son idénticas, lo que hace posible el intercambio de una de ellas por la otra.

Si $A \Leftrightarrow B$, entonces se denota como $A \equiv B$ y se dirá que es una ley lógica.

11 LEYES DE LA LÓGICA PROPOSICIONAL

Las leyes lógicas más utilizadas son las siguientes:

Ley involutiva

$$\sim(\sim p) \equiv p$$

Ley de la idempotencia

- $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee p \equiv p$

Ley conmutativa

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- $p \vee q \equiv q \vee p$
- $p \not\leftrightarrow q \equiv q \not\leftrightarrow p$
- $p \leftrightarrow q \equiv q \leftrightarrow p$

Ley asociativa

- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$
- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$

Ley distributiva

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Ley de De Morgan

- $\sim(p \vee q) \equiv \sim p \wedge \sim q$
- $\sim(p \wedge q) \equiv \sim p \vee \sim q$

Ley de absorción

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
- $p \vee (\sim p \wedge q) \equiv p \vee q$
- $p \wedge (\sim p \vee q) \equiv p \wedge q$

Ley de la condicional

- $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
- $p \rightarrow q \equiv \sim q \rightarrow \sim p$

Ley de la bicondicional

- $p \leftrightarrow q \equiv (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$
- $p \leftrightarrow q \equiv \sim(p \not\leftrightarrow q)$
- $p \leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow \sim q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$

Ley de la disyunción exclusiva

- $p \not\leftrightarrow q \equiv \sim p \leftrightarrow q$
- $p \not\leftrightarrow q \equiv p \leftrightarrow \sim q$
- $p \not\leftrightarrow q \equiv \sim p \not\leftrightarrow \sim q$

Ley del complemento

- $p \vee \sim p \equiv \mathrm{V}$ (tautología)
- $p \wedge \sim p \equiv \mathrm{F}$ (contradicción)

Ley de la identidad

- $p \vee \mathrm{V} \equiv \mathrm{V}$
- $p \wedge \mathrm{V} \equiv p$
- $p \vee \mathrm{F} \equiv p$
- $p \wedge \mathrm{F} \equiv \mathrm{F}$

Observación

Hay especialistas que han razonado de la siguiente manera: ¿Si hubiera valores parciales de verdadero o falso?; por ejemplo, si entramos en un auto o a un aula de clase y sentimos "mucho calor", es diferente a "poco calor" y necesitamos aire acondicionado, pero ¿cuánto? Entonces han elaborado teorías que satisfagan esta necesidad y uno se sienta confortable en el auto o en el aula. A estas teorías le han puesto por nombre **lógica difusa**.

Aplicación 11

Reduzca el siguiente esquema molecular:
$[(p \rightarrow q) \vee (p \,\Delta\, q)] \wedge [p \wedge (p \vee q)]$
si se sabe que $(p \rightarrow q)$ es verdadero.

Resolución

Sea

$$E \equiv [\underbrace{(p \rightarrow q)}_{\text{(por dato)}\ \mathrm{V}} \vee (p \,\Delta\, q)] \wedge [p \wedge (p \vee q)]$$

$$\underbrace{\mathrm{V} \quad \vee (p \,\Delta\, q)}_{\mathrm{V}\ \text{(ley de la identidad)}}$$

Luego,

$$E \equiv \mathrm{V} \wedge [p \wedge (p \vee q)]$$

$$E \equiv \underbrace{p \wedge (p \vee q)}_{p\ \text{(ley de absorción)}}\ \text{(ley de la identidad)}$$

$$\therefore\ E \equiv p$$

Aplicación 12

Reduzca el siguiente esquema molecular:
$[p \vee \sim(p \vee q)] \wedge [q \vee (p \wedge q)]$

Resolución

Sea

$$F \equiv [p \vee \underbrace{\sim(p \vee q)}_{\underbrace{\sim p \wedge \sim q}_{\underbrace{p \vee (\sim p \wedge \sim q)}_{p \vee \sim q\ \text{(ley de absorción)}}}\ \text{(ley de De Morgan)}}] \wedge [q \vee (p \wedge q)]$$

$$F \equiv (p \vee \sim q) \wedge [\underbrace{q \vee (p \wedge q)}_{q\ \text{(ley de absorción)}}]$$

$$F \equiv \underbrace{(p \vee \sim q) \wedge \quad q}_{p \wedge q\ \text{(ley de absorción)}}\ \text{(ley de absorción)}$$

$$\therefore\ F \equiv p \wedge q$$

Nota

Se suele ubicar los inicios de la lógica proposicional en la Grecia antigua, en los estoicos y megáricos, y particularmente en Crisipo; también hay especialistas que indican que se usó la lógica proposicional en una sección del capítulo 4 del libro II de los *Primeros analíticos*, de Aristóteles. Sin embargo, es posible que estas ideas provengan de los persas, cuyo pueblo es más antiguo y tuvieron una cultura muy rica, además, Grecia estaba en contacto con ella; sin embargo, la matemática persa ha sido muy poco investigada.

Biografía

Augustus De Morgan

Fue un matemático y lógico inglés. Profesor de matemáticas en el Colegio Universitario de Londres entre 1828 y 1866; primer presidente de la Sociedad de Matemática de Londres. Escribió varias obras de lógica en las que se encuentra la idea de aplicar en esta esfera los métodos matemáticos, así como los primeros resultados de tal aplicación. En la lógica matemática moderna, llevan el nombre de De Morgan las siguientes leyes fundamentales del álgebra de la lógica: "La negación de la conjunción es equivalente a la disyunción de las negaciones", "la negación de la disyunción es equivalente a la conjunción de las negaciones". Su obra principal fue *La lógica formal o el cálculo de inferencias* (1847).

Augustus De Morgan

En el colegio, De Morgan no destacó y, debido a que quedó ciego de un ojo a los 2 meses de nacido, no se unió en los deportes con los otros niños, y fue víctima de crueles burlas de algunos de sus compañeros.

En 1826, regresó a su casa en Londres y entró en el Lincoln's Inn a estudiar Derecho. En 1827, con 21 años, se presentó para la cátedra de matemáticas en el recién fundado University College de Londres, y a pesar de no tener publicaciones matemáticas fue designado.

Su libro *Elementos de aritmética* (1830) fue su segunda publicación y veria múltiples ediciones. En 1838, define e introduce el término "inducción matemática", dotando de una base rigurosa a un proceso que se había utilizado sin claridad hasta entonces. El término apareció por primera vez en el artículo de De Morgan en la *Enciclopedia Penny* titulado "Inducción matemática". La *Enciclopedia Penny* era publicada por la Sociedad para la difusión del conocimiento útil, creada por los mismos reformadores que fundaron la Universidad de Londres; dicha sociedad también publicó un famoso trabajo de De Morgan titulado *El cálculo diferencial e integral*.

En 1849, publicó *Trigonometría y álgebra doble*, en el cual dio una interpretación geométrica a los números complejos.

De Morgan estuvo siempre interesado en las curiosidades numéricas y, en 1864, señaló que tenía la distinción de tener x años en el año x^2 (tenía 43 en 1849). Cualquiera nacido en 1980 puede reclamar la misma distinción.

Además, supervisó la publicación en Londres del libro del matemático indio autodidacta Ramchundra: *Máximos y Mínimos* en 1859. En la introducción de este libro, De Morgan reconoció la tradición india de la lógica.

Falleció en Londres, el 18 de marzo de 1871.

Adaptado de "Augustus De Morgan". En <https://www.ecured.cu/>.

Problemas resueltos

Problema 1

¿Cuáles de los siguientes enunciados son proposiciones?

I. Perú es un país de América.
II. ¿Qué día es hoy?
III. Cinco es menor que diez.
IV. Él fue un presidente del Perú.
V. El Manchester United es un club de fútbol.
VI. ¡Qué hermoso es el Cusco!
VII. El Liverpool fue campeón de la Champions League 2018-2019.

Resolución

Recuerde que una proposición puede ser calificada de verdadera o falsa, sin ambigüedad.

Por lo tanto, I, III, V y VII son proposiciones.

Problema 2

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. José María Arguedas escribió *El zorro de arriba y el zorro de abajo*.
II. La velocidad del sonido es 500 m/s.
III. César Vallejo escribió *Los heraldos negros*.
IV. Franz Kafka fue argentino.
V. El 6 es impar.

Resolución

I. José María Arguedas escribió *El zorro de arriba y el zorro de abajo*. (V)
II. La velocidad del sonido es 500 m/s. (F)
III. César Vallejo escribió *Los heraldos negros*. (V)
IV. Franz Kafka fue argentino. (F)
V. El 6 es impar. (F)

Por lo tanto, hay dos proposiciones verdaderas.

Problema 3

¿Cuántas de las siguientes proposiciones son simples?

I. Las vocales fuertes son *a* y *e*.
II. Europa no es un continente.
III. 5 y 8 son consecutivos.
IV. Un triángulo tiene 3 lados y sus ángulos interiores suman 180°.

Resolución

I. Es compuesta, ya que hay dos ideas: "*a* es vocal fuerte" y "*e* es vocal fuerte".
II. Es compuesta, ya que es la negación de una idea.
III. Es simple, pues solo hay una idea.
IV. Es compuesta, ya que hay dos ideas: "El triángulo tiene 3 lados" y "Los ángulos interiores del triángulo suman 180°".

Por lo tanto, solo hay una proposición simple.

Problema 4

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La negación es un operador monádico.
II. En la contradicción, los valores de verdad en la matriz principal son todos verdaderos.
III. Una ley lógica es una contingencia.

Resolución

I. Verdadero
La negación es un operador monádico porque solo afecta a una variable proposicional.

II. Falso
Porque en la contradicción, los valores de verdad de la matriz principal son todos falsos.

III. Falso
Porque una ley lógica es una bicondicional tautológica.

Lumbreras Editores

Problema 5

Se tienen las siguientes proposiciones:

p: El año tiene 12 meses.

q: Pachacútec fue el primer inca del Imperio incaico.

Determine el valor de verdad de

r: $\sim(p \wedge q) \vee (p \rightarrow q)$

s: $[p \leftrightarrow (p \rightarrow q)] \not\leftrightarrow \sim q$

Resolución

Primero verificamos el valor de verdad de las proposiciones.

- $V(p) \equiv \mathrm{V}$
- $V(q) \equiv \mathrm{F}$

Luego,

- r: $\sim(p \wedge q) \vee (p \rightarrow q)$

$$\underbrace{\underbrace{\sim \underbrace{\mathrm{V} \wedge \mathrm{F}}}_{\mathrm{V}} \vee \underbrace{\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{F}}_{\mathrm{F}}}_{\mathrm{V}}$$

- s: $[p \leftrightarrow (p \rightarrow q)] \not\leftrightarrow \underbrace{\sim q}_{\mathrm{V}}$

$$\underbrace{\underbrace{\mathrm{V} \leftrightarrow \underbrace{\mathrm{V} \rightarrow \mathrm{F}}_{\mathrm{F}}}_{\mathrm{F}} \not\leftrightarrow \mathrm{V}}_{\mathrm{V}}$$

Por lo tanto, r y s son verdaderos.

Problema 6

Si p y q son proposiciones verdaderas y r es una proposición falsa, determine el valor de verdad de

A: $\sim p \rightarrow (r \vee q)$

B: $(\sim p \leftrightarrow \sim q) \rightarrow r$

C: $[p \rightarrow (p \leftrightarrow q)] \Delta r$

Resolución

Reemplazamos los valores de verdad de p y q para hallar el valor de verdad de A, B y C.

- A: $\underbrace{\sim p}_{\mathrm{F}} \rightarrow (r \vee q)$

$$\underbrace{\underbrace{\mathrm{F}}_{\mathrm{F}} \rightarrow \underbrace{\mathrm{F} \vee \mathrm{V}}_{\mathrm{V}}}_{\text{verdadero}}$$

- B: $(\underbrace{\sim p}_{\mathrm{F}} \leftrightarrow \underbrace{\sim q}_{\mathrm{F}}) \rightarrow r$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\mathrm{F} \leftrightarrow \mathrm{F}}_{\mathrm{V}} \rightarrow \mathrm{F}}_{\text{falso}}}$$

- C: $[p \rightarrow (p \leftrightarrow q)] \Delta r$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\mathrm{V} \rightarrow \underbrace{\mathrm{V} \leftrightarrow \mathrm{V}}_{\mathrm{V}}}_{\mathrm{V}} \Delta \mathrm{F}}}_{\text{verdadero}}$$

Por lo tanto, los valores de verdad son

- $V(A) \equiv \mathrm{V}$
- $V(B) \equiv \mathrm{F}$
- $V(C) \equiv \mathrm{V}$

Problema 7

Determine el valor de verdad de p, q y r si se sabe que D es falso.

D: $[\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r)] \vee p$

Resolución

Observamos que en D el operador más importante es la disyunción ($\vee$), la cual es falsa. Recordemos que la disyunción es falsa solamente cuando las proposiciones que la componen son falsas.

Entonces

- p es falso
- $[\sim(p \wedge q) \rightarrow (q \rightarrow r)] \equiv$ falso

Luego, la condicional es falsa solamente cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Entonces

- $\sim(p \wedge q)$ es verdadero
- $(q \rightarrow r)$ es falso

Dado que $(q \rightarrow r)$ es falso, se tiene que

- $V(q) \equiv$ verdadero
- $V(r) \equiv$ falso

Por lo tanto, los valores de verdad de p, q y r son falso, verdadero y falso, respectivamente.

Problema 8

Determine el valor de verdad de p, q y r si se sabe que E es verdadero.

E: $\sim\{(p \wedge q) \rightarrow [p \wedge (q \not\leftrightarrow r)]\}$

Resolución

Dado que E es verdadero, la expresión

$\{(p \wedge q) \rightarrow [p \wedge (q \not\leftrightarrow r)]\}$ es falsa.

Luego, una condicional es falsa cuando el antecedente es verdadero y el consecuente es falso.

Entonces

- $p \wedge q \equiv$ V, de donde $V(p) \equiv$ V; $V(q) \equiv$ V
- $p \wedge (q \not\leftrightarrow r) \equiv$ F

Reemplazamos el valor de verdad de p.

$$V \wedge \underbrace{(q \not\leftrightarrow r)}_{F} \equiv F$$

Reemplazamos el valor de verdad de q.

$$V \not\leftrightarrow \underbrace{r}_{V} \equiv F \quad \rightarrow \quad V(r) \equiv V$$

Por lo tanto, p es verdadero, q es verdadero y r es verdadero.

Problema 9

Evalúe el siguiente esquema molecular y determine la matriz principal.

$[(p \wedge q) \vee (p \rightarrow r)] \not\leftrightarrow (\sim q \leftrightarrow r)$

Resolución

Elaboramos una tabla de verdad.

p	q	r	$[(p \wedge q)$	$\vee$	$(p \rightarrow r)]$	$\not\leftrightarrow$	$(\sim q$	$\leftrightarrow$	$r)$
V	V	V	V	V	V	V	F	F	V
V	V	F	V	V	F	F	F	V	F
V	F	V	F	V	V	F	V	V	V
V	F	F	F	F	F	F	V	F	F
F	V	V	F	V	V	V	F	F	V
F	V	F	F	V	V	F	F	V	F
F	F	V	F	V	V	F	V	V	V
F	F	F	F	V	V	V	V	F	F

Por lo tanto, la matriz principal es VFFFVFFV.

Problema 10

Si se sabe que

- $(r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow q)$ es falso
- $\sim s \wedge (t \leftrightarrow w)$ es verdadero

determine el valor de verdad de

G: $[\sim p \wedge (w \vee \sim t)] \vee [\sim(r \rightarrow s) \wedge (t \vee \sim w)]$

H: $[(\sim t \vee w) \wedge (t \vee \sim w)] \rightarrow (p \vee s)$

I: $[(t \Delta w) \rightarrow (p \rightarrow w)] \wedge \{(t \leftrightarrow p) \leftrightarrow (w \Delta q)\}$

Resolución

Analicemos el primer dato.

$$(r \rightarrow s) \rightarrow (p \rightarrow q) \equiv \text{falso}$$

$$\underbrace{}_{V} \quad \underbrace{V \quad F}_{F}$$

Deducimos que

- p es verdadero.
- q es falso.
- $(r \rightarrow s)$ es verdadero.

Analicemos el segundo dato.

$$\sim s \wedge (t \leftrightarrow w) \equiv \text{verdadero}$$

$$\underbrace{F}_{V} \quad \underbrace{}_{V}$$

Deducimos que

- s es falso
- dado que $r \to s \equiv$ V y s es falso, entonces r es falso.

  $\to$ $V(p) \equiv$ V; $V(q) \equiv$ F; $V(r) \equiv$ F; $V(s) \equiv$ F

Luego,

- G: $[\underbrace{\sim p}_{F} \wedge (w \vee \sim t)] \vee [\sim(\underbrace{r \to s}_{V}) \wedge (t \vee \sim w)]$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{F}_{F}}_{F} \vee \underbrace{\underbrace{\underbrace{V}_{F}}_{F}}_{F}}_{F}$$

$\therefore$ $V(G) \equiv$ falso

- H: $[(\sim t \vee w) \wedge (t \vee \sim w)] \to (p \vee s)$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{V\ F}_{V}}_{V}}_{V}}_{V}$$

$\therefore$ $V(H) \equiv$ verdadero

- I: $[(\underbrace{t \,\Delta\, w}_{F}) \to (p \to w)] \wedge [(t \leftrightarrow p) \leftrightarrow (w \,\Delta\, q)]$

$$\underbrace{\underbrace{\underbrace{F}_{V}}_{V} \wedge \underbrace{\underbrace{\underbrace{\underbrace{V}_{t} \leftrightarrow \underbrace{F}_{w}}_{V}}_{V}}_{V}}_{V}$$

$\therefore$ $V(I) \equiv$ verdadero

Problema 11

Simplifique

$$\sim\{[[(p \wedge (p \vee r)) \wedge q] \vee \sim(\sim p \to q)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge r]\} \to (\sim q \leftrightarrow \sim p)$$

Resolución

Sea

$$H: \sim\{[[\underbrace{(p \wedge (p \vee r))}_{p \text{ (absorción)}} \wedge q] \vee \sim\underbrace{(\sim p \to q)}_{p \vee q \text{ (ley de la condicional)}}] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge r]\} \to \underbrace{(\sim q \leftrightarrow \sim p)}_{p \leftrightarrow q \text{ (ley de la bicondicional)}}$$

Luego,

$$H: \sim\{[(p \wedge q) \vee \sim(p \vee q)] \wedge [(\sim p \vee q) \wedge r]\} \to (p \leftrightarrow q)$$

$$H: \sim\{\underbrace{[(p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]}_{\text{(ley de la bicondicional)}\ p \leftrightarrow q} \wedge \underbrace{[(\sim p \vee q) \wedge r]}_{E}\} \to (p \leftrightarrow q)$$

Sea

$$p \leftrightarrow q \equiv C$$

Reemplazamos en H.

$$H: \sim\{C \wedge E\} \rightarrow C$$

Simplificamos usando la ley de la condicional.

$$H: \{C \wedge E\} \vee C$$

Por la ley de la absorción, queda $H \equiv C$.

$\therefore\ H \equiv p \leftrightarrow q$

Problema 12

Se define el operador $\downarrow$ mediante la siguiente tabla de verdad:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Simplifique $[(p \downarrow q) \downarrow p] \rightarrow (p \downarrow q)$.

Resolución

Hallemos la resultante del esquema molecular por la tabla de verdad.

p	q	$[(p \downarrow q)$	$\downarrow$	$p]$	$\rightarrow$	$(p \downarrow q)$
V	V	F	V	V	F	F
V	F	F	V	V	F	F
F	V	V	F	F	V	V
F	F	F	F	F	V	F

Se observa que la matriz principal es la negación de p.

$\therefore\ \{[(p \downarrow q) \downarrow q] \rightarrow (p \downarrow q)\} \equiv \sim p$

Otra forma

Se puede observar que $p \downarrow q \equiv \sim(q \rightarrow p)$

Usamos la ley condicional y la ley de De Morgan.

$$p \downarrow q \equiv \sim p \wedge q$$

Sea $R \equiv [\underbrace{(p \downarrow q)}_{H} \downarrow p] \rightarrow \underbrace{(p \downarrow q)}_{H}$

$R \equiv [H \downarrow p] \rightarrow H$ (por dato)

$[\sim H \wedge p] \rightarrow H$ (ley condicional y de De Morgan)

$[H \vee \sim p] \vee H$ (ley asociativa y de idempotencia)

$R \equiv H \vee \sim p$

$R \equiv (\sim p \wedge q] \vee \sim p$ (ley de absorción)

$\therefore\ R \equiv \sim p$

Problema 13

Se definen los operadores lógicos * y $\odot$ mediante:

$p * q = \sim p \rightarrow \sim q$

$p \odot q = \sim p \wedge q$

Simplifique la siguiente fórmula lógica:

$((\sim q) \odot p) * ((\sim p) \odot q)$

e indique si es una tautología, contradicción o contingencia.

Resolución

Sean los operadores lógicos

- $p * q \equiv \sim p \rightarrow \sim q$
  $p * q \equiv q \rightarrow p$
- $p \odot q \equiv \sim p \wedge q$

Simplificamos la fórmula lógica.

$$R \equiv \underbrace{((\sim q) \odot p)}_{q \wedge p} * \underbrace{((\sim p) \odot q)}_{p \wedge q}$$

Sea $a \equiv p \wedge q$

Reemplazamos en R.

$R \equiv a * a$

$R \equiv a \rightarrow a$

Por lo tanto, R es una tautología.

Problema 14

Determine la expresión equivalente a "Si Viviana juega con sus patines entonces es feliz, y Viviana es feliz; o Viviana no juega con sus patines pero Viviana es feliz".

Resolución

Sea

p: Viviana juega con sus patines.

q: Viviana es feliz.

Reemplazamos en la expresión dada.

Si p entonces q, y q; o no p pero q

Luego colocamos los conectivos lógicos.

$$p \to q, \wedge q; \vee \sim p \wedge q$$

Agrupamos respetando los signos de puntuación.

$$[(p \to q) \wedge q] \vee (\sim p \wedge q)$$

Usamos las leyes de la lógica proposicional.

$$[(p \to q) \wedge q] \vee (\sim p \wedge q)$$

$$\sim p \vee q \quad \text{(ley de la condicional)}$$

$$q \quad \vee (\sim p \wedge q) \quad \text{(ley de absorción)}$$

$$q \quad \text{(ley de absorción)}$$

Por lo tanto, la expresión equivalente sería "Viviana es feliz".

Problema 15

Determine la expresión equivalente de "Si Jazmín estudia aritmética y no llega temprano a la academia, entonces Jazmín no estudia aritmética pero Jazmín llega temprano a la academia; además Jazmín estudia aritmética".

Resolución

Identificamos las proposiciones simples.

p: Jazmín estudia aritmética.

q: Jazmín llega temprano a la academia.

Seguimos los pasos ya conocidos.

$$[(p \wedge \sim q) \to (\sim p \wedge q)] \wedge p$$

Reducimos usando las leyes de la lógica proposicional.

$$[(p \wedge \sim q) \to (\sim p \wedge q)] \wedge p$$

$$\sim(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q) \quad \text{(ley de la condicional)}$$

$$\sim p \vee q \vee (\sim p \wedge q) \quad \text{(ley de De Morgan)}$$

$$\sim p \vee [q \vee (\sim p \wedge q)] \quad \text{(ley asociativa)}$$

$$\sim p \vee \quad q \quad \text{(ley de absorción)}$$

$$[\sim p \vee q] \quad \wedge p$$

$$q \quad \wedge p \quad \text{(ley de absorción)}$$

$$p \quad \wedge q \quad \text{(ley conmutativa)}$$

Por lo tanto, la expresión equivalente sería "Jazmín estudia aritmética y llega temprano a la academia".

Problema 16

Reduzca la siguiente expresión: "Si Estéfany juega con sus muñecas o tiene 5 años, pero tiene 5 años; entonces Estéfany juega con sus muñecas y, tiene 5 años o es falso que tiene 5 años".

Resolución

Identificamos las proposiciones simples.

p: Estéfany juega con sus muñecas.

q: Estéfany tiene 5 años.

Formalizamos.

$$[(p \vee q) \wedge q] \to [p \wedge (q \vee \sim q)]$$

Reducimos.

$$[(p \vee q) \wedge q] \to [p \wedge (q \vee \sim q)]$$

$$V \quad \text{(ley del complemento)}$$

$$[(p \vee q) \wedge q] \to \quad p \quad \text{(ley de la identidad)}$$

$$q \quad \text{(ley de absorción)}$$

$$q \quad \to \quad p$$

Por lo tanto, si Estéfany tiene 5 años, entonces juega con sus muñecas.

Problema 17

Halle una expresión equivalente de "Iremos a nadar a menos que el cielo no esté despejado, ya que no hemos traído carpa".

Resolución

Identificamos las proposiciones simples.

p: Iremos a nadar.

q: El cielo está despejado.

r: Hemos traído carpa.

Según el enunciado, simbolizamos de la siguiente manera:

$$\sim r \rightarrow (\sim q \rightarrow p)$$

$$\equiv r \vee q \vee p \quad \text{(ley de la condicional)}$$

$$\equiv p \vee (q \vee r) \quad \text{(ley asociativa)}$$

Finalmente, una expresión equivalente es "Iremos a nadar o, el cielo está despejado o hemos traído carpa".

> **Recuerde**
> Los términos "a menos que" y "ya que" son condicionales inversos y se caracterizan porque después de ellos aparece el antecedente.

Problema 18

De las siguientes proposiciones, indique cuáles son equivalentes entre sí.

I. Es necesario que Juan no vaya al cine para que termine su tarea.

II. No es cierto que Juan termine su tarea y vaya al cine.

III. Juan no termina su tarea y no va al cine.

Resolución

Sean las proposiciones simples

p : Juan va al cine.

q : Juan termina su tarea.

Simbolicemos.

I. "Es necesario que Juan no vaya al cine para que termine su tarea" equivale a decir lo siguiente:

$$\underbrace{\text{Si Juan termina su tarea,}}_{q}\ \underbrace{\text{entonces Juan no va al cine.}}_{\sim p}$$

$$\equiv q \rightarrow \sim p \equiv \sim q \vee \sim p$$

II. $$\underbrace{\text{No es cierto que}}_{\sim}\ \underbrace{\text{Juan termine su tarea}}_{(q}\ \underbrace{\text{y}}_{\wedge}\ \underbrace{\text{vaya al cine.}}_{p)}$$

$$\equiv \sim(q \wedge p) \equiv \sim q \vee \sim p$$

III. $$\underbrace{\text{Juan no terminará su tarea}}_{\sim q}\ \text{y}\ \underbrace{\text{no va al cine.}}_{\sim p}$$

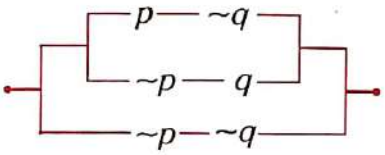
$$\equiv \sim q \wedge \sim p$$

Por lo tanto, I y II son equivalentes.

Otra forma de ver si son equivalentes sería mediante tablas de verdad, para lo cual las matrices principales deben ser idénticas.

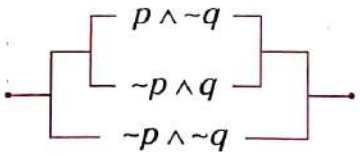
Problema 19

Determine el esquema molecular correspondiente al simplificar el siguiente circuito:

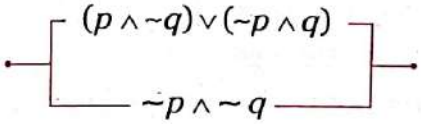


Resolución

Del circuito inicial podemos reducir y formar lo siguiente:



Luego,



De ahí tendremos la siguiente expresión lógica:

$$[(p \wedge \sim q) \vee (\sim p \wedge q)] \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

$$(p \wedge \sim q) \vee \underbrace{[(\sim p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)]} \quad \text{(ley asociativa)}$$

$$\sim p \wedge \underbrace{(q \vee \sim q)} \quad \text{(ley distributiva)}$$

$$\sim p \wedge \quad V \quad \text{(ley de complemento)}$$

$$\underbrace{\sim p} \quad \text{(ley de identidad)}$$

$$(p \wedge \sim q) \vee \sim p \equiv \sim p \vee \sim q \quad \text{(ley de absorción)}$$

Por lo tanto, el esquema molecular reducido es $\sim p \vee \sim q$.

Problema 20

Sea el operador $\boxtimes$, definido mediante

$x \boxtimes y \equiv \sim(x \wedge y)$

$x \boxtimes y \boxtimes z \equiv \sim(x \wedge y \wedge z)$

Represente $p \rightarrow q$ utilizando únicamente el operador $\boxtimes$.

Resolución

Del dato: $x \boxtimes y \equiv \sim(x \wedge y)$

$x \boxtimes y \equiv \sim x \vee \sim y$

Además, se observa que

$$x \boxtimes x \equiv \sim x \qquad (*)$$

Luego,

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$$

$$p \rightarrow q \equiv \sim p \vee \sim(\sim q)$$

$$p \rightarrow q \equiv p \boxtimes \sim q$$

El ejercicio exige solo el operador $\boxtimes$.

Reemplazamos $\sim q$ según (*).

$$\sim q \equiv q \boxtimes q$$

$$\therefore \; p \rightarrow q \equiv p \boxtimes (q \boxtimes q)$$

Problema 21

Si la siguiente expresión es verdadera

$\sim(x^2 > 9 \rightarrow x^2 > 400)$

determine cuántos valores enteros toma x.

Resolución

La primera resolución es la siguiente:

$$\sim(\underbrace{x^2 > 9}_{V} \rightarrow \underbrace{x^2 > 400}_{F}) \equiv \text{verdadero}$$

$$\underbrace{V \rightarrow F}_{\text{falso}}$$

Luego,

$$x^2 > 9 \;\wedge\; x^2 \leq 400$$

$$\rightarrow \; 9 < x^2 \leq 400$$

Los valores de x son 4; 5; 6; 7; ...; 20; −4; −5; −6; ...; −20

Por lo tanto, x tiene 34 valores posibles (17 positivos y 17 negativos).

Otra forma

La segunda resolución es la siguiente:

Sea

- $p: x^2 > 9$
- $q: x^2 > 400$
- $A: \sim(x^2 > 9 \rightarrow x^2 > 400)$

$A: \sim(p \rightarrow q)$

$A: \sim(\sim p \vee q)$ (ley de la condicional)

$A: p \wedge \sim q$ (ley de De Morgan)

$A: x^2 > 9 \;\wedge\; \sim(x^2 > 400)$

$A: x^2 > 9 \;\wedge\; x^2 \leq 400$

$A: 9 < x^2 \;\wedge\; x^2 \leq 400$

$A: 9 < x^2 \leq 400$

$A: (3 < x \leq 20) \vee (-20 \leq x < -3)$

Los valores de x son 4; 5; 6; 7; ...; 20; −4; −5; −6; ...; −20

Por lo tanto, x tiene 34 valores posibles.

Test

1. Indique cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas.
   I. Todo enunciado es una proposición.
   II. Una proposición solo puede ser falsa.
   III. Una proposición compuesta no puede ser negativa.
   IV. Una tautología tiene en su matriz principal solo valores verdaderos.
   V. Una ley es una equivalencia lógica.

   A) 0 B) 1 C) 2
   D) 3 E) 4

2. ¿Cuántas de las siguientes proposiciones son verdaderas?
   I. Perú es un país de Europa.
   II. Francia ganó el Mundial de Fútbol Rusia 2018.
   III. César Vallejo nació en el Perú.
   IV. Azul, verde y rojo son los colores básicos.
   V. José María Arguedas escribió *Todas las sangres*.

   A) 0 B) 1 C) 2
   D) 3 E) 4

3. Si p, q y r son proposiciones cuyos valores de verdad son verdadero, verdadero y falso, respectivamente, determine el valor de verdad de A, B y C, en ese orden.
   $A: \sim q \leftrightarrow p$
   $B: p \rightarrow r$
   $C: \sim q \wedge r$

   A) VVV B) VFV C) FFF
   D) FVF E) VVF

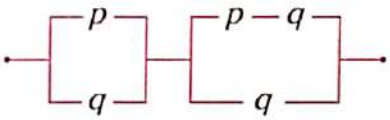
4. Si se sabe que la siguiente proposición es verdadera:
   $[(r \vee q) \rightarrow (p \wedge q)] \wedge r$
   determine el valor de verdad de p, q y r, en ese orden.

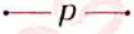
   A) VVV B) VFV C) FFV
   D) FVF E) VVF

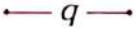
5. Reduzca la siguiente proposición:
   $[(p \wedge q) \vee p] \rightarrow (\sim p \wedge q)$

   A) p B) q C) $\sim p$
   D) $\sim q$ E) $p \wedge q$

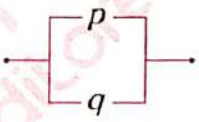
6. Reduzca la siguiente expresión:

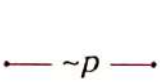


   A) 

   B) 

   C)

   D) 

   E) 

7. Determine la matriz principal de
   $[q \vee p] \rightarrow (\sim p \wedge q)$

   A) VVVV B) VFVF C) FFVV
   D) FVFV E) VVFF

8. Determine la secuencia correcta del valor de verdad de las siguientes expresiones:
   p: Real Madrid y Manchester United son clubes de fútbol.
   q: Michael Schumacher y Lewis Hamilton son pilotos de Fórmula 1.
   r: Perú fue subcampeón de vóley en la olimpiada Seúl 88.

   A) VVV B) VFV C) FFV
   D) FVF E) VVF

CLAVES: 1 C 2 D 3 C 4 A 5 C 6 B 7 C 8 A

Lumbreras Editores

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Señale la negación del enunciado "Si Doris aprende a manejar, entonces ella no se compra su auto".

A) Doris aprende a manejar y se compra su auto.
B) Doris aprende a manejar y no se compra su auto.
C) Doris no aprende a manejar y no se compra su auto.
D) Doris no aprende a manejar y se compra su auto.
E) Doris aprende a manejar o se compra su auto.

2. Determine los valores enteros de x para que la siguiente expresión sea verdadera.
$(x \leq 5) \leftrightarrow (x \text{ es par } \wedge\ 3x < 15)$

A) $x=2 \vee x=4 \vee x=6 \vee x>5$
B) $x=2 \vee x=4 \vee x>5$
C) $x=2 \vee x=4 \vee x<5$
D) $x=2 \vee x=4 \vee x\geq 5$
E) $x=2 \vee x=4 \vee x=6 \vee x\geq 5$

3. Si $p \square q \equiv \sim p \wedge q$
reduzca $[(p \square \sim p)] \rightarrow \{(p \square q) \square q\}$.

A) F B) V C) p
D) q E) $\sim p$

4. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son equivalentes a $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow r$?

I. $(p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim r$
II. $(p \nleftrightarrow q) \leftrightarrow \sim r$
III. $(p \leftrightarrow \sim q) \leftrightarrow \sim r$
IV. $(\sim p \leftrightarrow q) \leftrightarrow \sim r$
V. $(p \nleftrightarrow q) \nleftrightarrow r$

A) solo I
B) II, III y IV
C) II y III
D) I y II
E) I, II, III, IV y V

5. Simplifique el siguiente esquema molecular:
$[(p \leftrightarrow q) \wedge (p \nleftrightarrow q)] \vee \sim(q \wedge \sim p)$

A) p
B) q
C) $p \rightarrow q$
D) $q \rightarrow p$
E) $p \leftrightarrow q$

6. Dadas las siguientes proposiciones verdaderas:
- $(p \,\Delta\, q) \leftrightarrow (\sim p \rightarrow t)$
- $\sim(q \rightarrow \sim q)$

calcule los valores veritativos de p, q y t, en ese orden.

A) VVV B) VFF C) FVF
D) FVV E) FFF

7. Sean las proposiciones p, q y r. Se sabe lo siguiente:
p: El numero 3 es par.
q: $\dfrac{x^3-8}{x-2}=x^2+2x+4$ se cumple para todo x entero.
r: Existe al menos un entero x que verifica $x^2+3x+5=33$

Determine los valores de verdad de p, q y r, en ese orden.

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FVF E) VVF

8. Indique el operador que corresponde a la proposición "Marte y Júpiter son planetas del sistema solar".

A) negación
B) conjunción
C) disyunción débil
D) condicional
E) bicondicional

9. Si se sabe que $p \wedge q \equiv F$ y $q \rightarrow r \equiv F$, indique la secuencia correcta del valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $[(p \rightarrow r) \wedge q] \rightarrow (r \vee q)$
II. $(p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim q)$
III. $[(p \wedge r) \vee q] \leftrightarrow (p \rightarrow q)$

A) VVF B) FVF C) VVV
D) FFV E) VFV

10. Si a y b son números naturales, indique la secuencia correcta del valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $(a+b)$ es un número natural.
II. $(a-b)$ es un número natural.
III. $\frac{a}{b}$ es un número natural.

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FVF E) VFF

11. Sea $f(p; q) \equiv \sim p \vee q$
y las proposiciones
p_0: $3+2=5$ y q_0: $6\times2=5$

Determine la expresión equivalente a $f(p_0; q_0)$

A) p_0 B) q_0 C) $q_0 \rightarrow q_0$
D) $\sim q_0$ E) $\sim q_0 \leftrightarrow p_0$

12. Si se cumple que $p * q \equiv \sim p \wedge q$
$p \nabla q \equiv p \vee q$

reduzca el esquema molecular
$\{q \nabla [(p \vee (r * s)) \wedge p]\} \rightarrow [(\sim p * \sim q) \nabla \sim q]$

A) p B) $p \vee q$ C) $\sim p$
D) q E) $\sim q$

13. Simplifique el esquema molecular
$[(p \leftrightarrow q) \wedge (p \nleftrightarrow q)] \vee (p \vee (\sim p \wedge q))$

A) p B) q C) $p \rightarrow q$
D) $q \rightarrow p$ E) $p \vee q$

14. Sean
$A = \{x/x$ es una proposición$\}$ y
$f: A \rightarrow \{0; 1\}$ es una función definida por

$$f(x)\begin{cases}1, \text{ si } x \text{ es verdadero}\\ 0, \text{ si } x \text{ es falso}\end{cases}$$

Indique cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas.

I. $f(p \wedge q) = f(p) \cdot f(q)$
II. $f(\sim p) = 1 - f(p)$
III. $f(p \rightarrow q) = 1 - f(p) \cdot f(\sim q)$

A) I, II y III B) solo I C) II y III
D) ninguna E) solo III

15. Simplifique el esquema molecular
$\sim\{[p \wedge (q \vee \sim r \vee s \vee p)] \rightarrow [p \vee (p \wedge r)]\} \rightarrow (r \wedge s \wedge \sim t)$

A) $p \vee \sim p$ B) $p \wedge \sim p$ C) $p \vee q$
D) $p \rightarrow q$ E) $(r \wedge s) \wedge t$

16. Reduzca la siguiente fórmula lógica:
$[(\sim p \wedge q) \vee \sim p] \wedge [p \rightarrow (r \wedge \sim r)]$

A) $p \rightarrow q$ B) $\sim p$ C) p
D) q E) $p \vee q$

17. Se define la siguiente tabla de verdad para el operador $\boxplus$.

p	q	$p \boxplus q$
V	V	F
V	F	F
F	V	V
F	F	F

Determine el número de valores verdaderos de la matriz principal de
$(p \boxplus q) \boxplus (\sim p \boxplus q)$

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

Nivel intermedio

18. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son tautológicas.
I. $(p \wedge q) \vee [(\sim p \vee \sim q) \vee (\sim q \wedge r \wedge s)]$
II. $(p \rightarrow q) \rightarrow (p \rightarrow q)$
III. $(p \rightarrow q) \vee \sim (p \nleftrightarrow q)$

A) I y II B) solo II C) solo III
D) II y III E) I, II y III

19. ¿Cuáles de los siguientes esquemas moleculares se clasifican como una contradicción?
I. $[\sim (p \wedge q) \rightarrow p] \wedge \sim p$
II. $(\sim p \rightarrow q) \leftrightarrow \sim (p \rightarrow q)$
III. $\sim [\sim (p \rightarrow q) \rightarrow (p \wedge \sim q)]$

A) solo I B) solo II C) solo III
D) I y II E) I y III

20. Se tiene que
$p * q \equiv q \rightarrow \sim p$
$p \# q \equiv \sim p * \sim q$

Reduzca el esquema molecular
$E \equiv [(p \# \sim q) \# (\sim p * p)] * p$

A) p B) $p \vee p$ C) q
D) $\sim q$ E) $\sim p$

21. Si la proposición lógica $p \rightarrow (\sim q \vee r)$ es falsa, determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
I. $(p \wedge r) \vee q$
II. $p \leftrightarrow q$
III. $p \nleftrightarrow r$

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FVF E) VFF

22. Halle el resultado tabular del siguiente esquema lógico:
$(p \Delta q) \Delta (p \rightarrow q)$

A) FVVV B) VVFV C) FFVV
D) FVFF E) VVVF

23. ¿Cuántos de los siguientes enunciados son proposiciones?
I. Atahualpa fue el último inca.
II. ¿Qué hora es?
III. ¡Estudia lógica proposicional!
IV. José Carlos Mariátegui nació en el Perú.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

24. Simplifique el esquema molecular R.
$R \equiv p \vee \{\{[(p \wedge q) \vee r] \wedge r\} \wedge \{[(p \vee q \vee r) \wedge (p \vee q)] \vee r\}\}$

A) $p \vee r$ B) $p \vee q$ C) $q \vee r$
D) $q \vee \sim r$ E) $q \wedge \sim r$

25. Se denomina condicional inversa a aquella expresión condicional donde el consecuente aparece primero y luego el antecedente. ¿Cuántas condicionales inversas hay en las siguientes expresiones?
- Xiomara tendrá su celular si y solo si obtiene un 20 en Matemática.
- Lucero tendrá su auto si ingresa a la universidad.
- Sofía irá al parque, ya que acabó su tarea.
- Doris irá al cine porque terminó sus labores.
- Rosa Juana es muy linda e inteligente.
- Rosa del Pilar es dueña de una clínica dental, dado que es odontóloga.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

26. Determine la alternativa que convierte a la siguiente función proposicional en una proposición falsa.
$p(x)$: x es una obra de César Vallejo

A) *Los heraldos negros*
B) *Paco Yunque*
C) *El tungsteno*
D) *Poemas humanos*
E) *Los perros hambrientos*

27. Se definen las operaciones
- $p \otimes q \equiv \sim(p \wedge q)$
- $p \nrightarrow q \equiv \sim(\sim p \rightarrow q)$

Simplifique la siguiente expresión:
$[(p \nrightarrow q) \otimes (\sim q \nrightarrow p)] \leftrightarrow [(q \wedge r) \nrightarrow \sim(r \wedge q)]$

A) $p \wedge q$ B) $q \wedge \sim q$ C) $p \rightarrow q$
D) p E) $p \wedge r$

28. Determine la secuencia correcta del valor de verdad de cada proposición.
p: $(x+2)(x+3)=0 \rightarrow (x=-2) \vee (x=-3)$
q: $(x-2)(x+3)=0 \rightarrow (x=-2) \vee (x=-3)$
r: $(x+2)(x+3)=0 \rightarrow (x=-3)$

A) FVV B) VVF C) FFV
D) VFF E) VVV

29. Sea $f(p, q) \equiv \sim p \wedge \sim(p \wedge \sim q)$
y las proposiciones
- p_0: $3+5=10$
- p_1: $5-1=4$
- q_0: $3\times4=12$
- q_1: $[18\div3=5 \rightarrow 20+3=15]$

Determine la secuencia correcta del valor de verdad de
I. $f(p_0, q_0) \rightarrow \sim f(p_1, q_1)$
II. $\sim f(p_0, q_0) \leftrightarrow f(p_0, q_0)$
III. $f(p_0, q_0) \wedge \sim[f(p_1, q_1) \rightarrow f(p_0, q_0)]$

A) VVV B) VFV C) FFV
B) FVF E) VFF

30. Relacione correctamente ambas columnas.
I. ley de la condicional
II. ley de absorción
III. ley conmutativa
IV. ley asociativa
a. $p \wedge (p \vee q) \equiv p$
b. $p \rightarrow q \equiv \sim p \vee q$
c. $p \wedge (q \wedge r) \equiv (p \wedge q) \wedge r$
d. $p \vee q \equiv q \vee p$

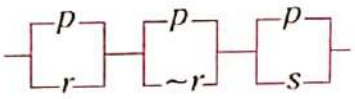
A) Ia, IIb, IIIc, IVd
B) Id, IIc, IIIb, IVa
C) Ib, IIc, IIId, IVa
D) Ic, IIa, IIId, IVb
E) Ib, IIa, IIId, IVc

31. Una ..... tiene en su matriz principal ..... sus resultados verdaderos.

A) contradicción - algunos
B) tautología - al menos uno de
C) tautología - todos
D) contingencia - ninguno de
E) tautología - ninguno de

Lumbreras Editores

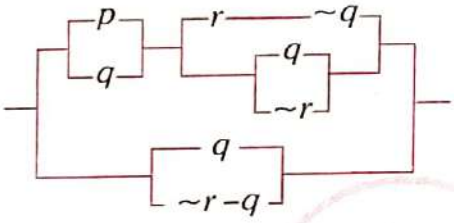
32. Simplifique el circuito mostrado e indique la proposición más simple que lo represente.



A) p B) $p \vee q$ C) $p \vee s$
D) s E) $\sim r$

Nivel avanzado

33. Simplifique el siguiente circuito:



A) p B) q C) $p \vee q$
D) $r \wedge q$ E) $p \wedge q$

34. Si se define $p * q \equiv (p \wedge \sim q) \vee (q \wedge \sim p)$, simplifique $\sim[(p * \sim q) \rightarrow \sim q]$.

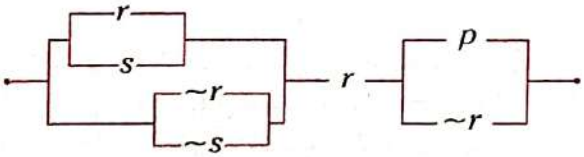
A) $\sim q \wedge p$ B) $p \vee q$ C) q
D) $\sim p$ E) $q \wedge p$

35. Se sabe que $(p \wedge q)$ es falso y $(q \rightarrow r)$ también es falso. ¿Cuáles de las siguientes proposiciones son verdaderas?

I. $(\sim p \vee r) \vee s$
II. $\sim[p \wedge (\sim q \vee \sim p)]$
III. $[p \wedge (q \wedge \sim t)] \leftrightarrow [(r \rightarrow q) \vee \sim(q \wedge t)]$

A) I y II B) II y III C) I y III
D) I, II y III E) ninguna

36. Halle la forma más simple que represente al siguiente circuito:



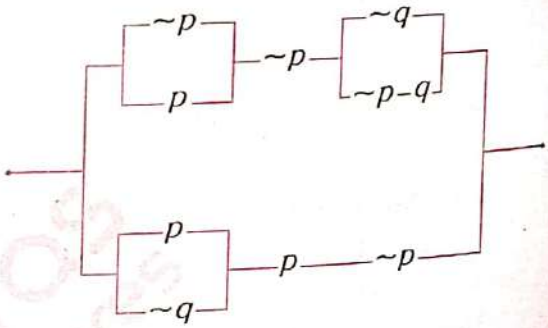
A) $p \wedge r$ B) $p \vee r$ C) $p \vee \sim s$
D) $r \vee \sim s$ E) $p \vee s$

37. Simplifique el esquema molecular

$[(\sim q \rightarrow \sim p) \wedge \sim(\sim p \rightarrow \sim q)] \vee [p \rightarrow \sim q]$

A) $q \vee p$ B) $\sim q \vee p$ C) $p \wedge q$
D) $\sim p \vee q$ E) $\sim(p \wedge q)$

38. Simplifique e indique el equivalente del siguiente circuito lógico:



A) $p \wedge \sim q$ B) $p \vee q$ C) $\sim p$
D) $\sim p \vee \sim q$ E) F

39. Se tiene que

p: El imperio del Tahuantinsuyo tuvo como idioma principal el quechua.
q: La Fortaleza de Paramonga es una construcción de la cultura Chimú.
r: La cultura Chanca se desarrolló entre los años 1200 y 1440 d. n. e.

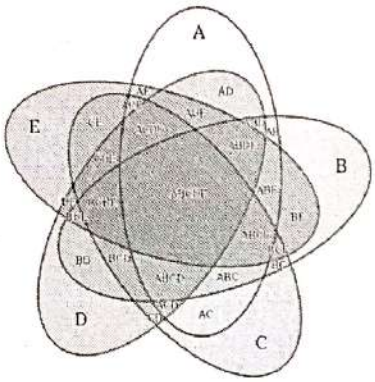
Indique la secuencia correcta del valor de verdad de las siguientes proposiciones:

A: $(p \rightarrow q) \wedge (r \vee p)$
B: $\sim p \wedge [q \vee (p \leftrightarrow \sim r)]$
C: $(p \wedge \sim q) \rightarrow r$

A) VVV B) VFV C) FFV
D) FVF E) VFF

Capítulo

III



Leonhard Euler

Teoría de conjuntos

Henrry Orlando Castañeda Palacios

CAPÍTULO III

TEORÍA DE CONJUNTOS

Objetivos

- Entender correctamente la idea de conjunto y su utilidad.
- Reconocer los conjuntos especiales y sus características.
- Aprender a utilizar de manera eficaz las leyes del álgebra de conjuntos.

Introducción

Cuando reflexionamos sobre la cantidad de amigos que tenemos, nos damos cuenta de que tenemos amigos en el colegio, en el barrio, en la academia, en las redes sociales, etc.; es decir, podemos agrupar a nuestros amigos en diferentes conjuntos; además, podríamos establecer alguna relación entre estos grupos de amigos. En las matemáticas ocurre lo mismo, se pueden establecer diferentes conjuntos y establecer relaciones o funciones entre ellos, lo cual permite un mejor análisis de las matemáticas.

El concepto de conjunto es una idea tan importante que es la base de toda la matemática moderna; por ejemplo, le sirve al álgebra cuando se habla de los intervalos, del conjunto solución, del dominio y del rango en una función; le sirve a la geometría cuando se habla de la recta, del plano, del sector geométrico; le sirve a la trigonometría cuando se habla del conjunto de valores posibles del arco que resuelve una ecuación trigonométrica; le sirve a las probabilidades cuando se habla del espacio muestral; le sirve a la estadística cuando se habla de la población, de la muestra; etc.

Asimismo, la idea de conjunto se utiliza en la literatura cuando se habla del conjunto de obras literarias de un autor o de un periodo histórico de una nación. También resulta útil en la vida diaria cuando, además de los amigos, observamos el conjunto de personas que forman nuestra familia, el conjunto de útiles escolares, el conjunto de vestidos que tenemos para ir a una fiesta, el conjunto de profesiones que hay en una universidad, etc.

La teoría de conjuntos es un tema apasionante que se puede entender intuitivamente (esta forma se desarrolla desde el colegio, en el presente capítulo también seguiremos esta forma) o axiomáticamente (esta forma se desarrolla en los cursos de la profesión de matemática en la universidad). Se invita al lector a que ingrese y aprenda este fascinante mundo de los conjuntos.

1 ▸ NOCIONES BÁSICAS

Dado que el conjunto es la base de la matemática moderna, no se le puede definir, sino solo dar una idea de lo que entendemos por conjunto; además, desarrollaremos la teoría intuitiva de conjuntos.

Se entiende por conjunto a toda agrupación, colección, reunión o lista de objetos, animales o cosas, homogéneas o heterogéneas, finitas o infinitas, materiales o inmateriales.

Ejemplos

- conjunto de las vocales
- conjunto de las letras de la palabra "cavernícola"
- conjunto de los días de la semana
- conjunto de los números pares menores que 14
- conjunto de los profesores de Aritmética de la sede Los Olivos de la academia
- conjunto de países de América
- conjunto de países del Medio Oriente

Generalmente, los conjuntos se denotan con letras mayúsculas del abecedario, y sus integrantes (desde ahora llamados "elementos") se denotan con letras minúsculas separadas por comas o punto y coma, y agrupados mediante signos de colección.

- Conjuntos: $A, B, C, D, \ldots$
- Elementos: $a, b, c, d, \ldots$

  $1; 2; 3; 4; \ldots$
- Signos de agrupación: {}, (), []

Ejemplos

- $A=\{a, e, i, o, u\}$
- $B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$
- $C=\{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo$\}$
- $D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

Observación

Generalmente, los puntos de una recta se denotan con las letras P, Q, R, etc. Dado que estos son los elementos, al conjunto se le denota con una letra estilizada: $\mathscr{L}$.

Ejemplo

$\mathscr{L}=\{P, Q, R, \ldots\}$

Hay conjuntos muy utilizados que necesitan una notación particular. Veamos algunos de ellos.

- Conjunto de los números naturales

  $\mathbb{N}=\{1; 2; 3; 4; \ldots\}$
- Conjunto de los números enteros

  $\mathbb{Z}=\{\ldots; -3; -2; -1; 0; 1; 2; 3; \ldots\}$

- Conjunto de los números entero positivos
  $\mathbb{Z}^+=\{1; 2; 3; 4; ...\}$
- Conjunto de los números racionales
  $$\mathbb{Q}=\left\{\frac{1}{2};\ \frac{4}{3};\ \frac{-5}{8};\ 6;\ -11;\ \frac{25}{-20};\ ...\right\}$$
- Conjunto de los números irracionales
  $$\mathbb{Q}^C=\left\{\sqrt{2};\ \sqrt{3}+5;\ \sqrt[3]{7};\ -\sqrt[5]{6}+8;\ ...\right\}$$
- Conjunto de los números reales
  $$\mathbb{R}=\left\{3; 5; -7; -2; \frac{1}{3}; \frac{-5}{10}; \sqrt{11}; \frac{\sqrt{5}+4}{7}; \pi; ...\right\}$$

2▸ DIAGRAMAS DE CONJUNTOS

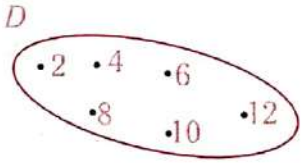
Vamos a presentar cuatro tipos de gráficos de conjuntos: el diagrama de Venn-Euler, el diagrama de Lewis Carroll, el diagrama lineal y el diagrama sagital.

2.1. DIAGRAMA DE VENN-EULER

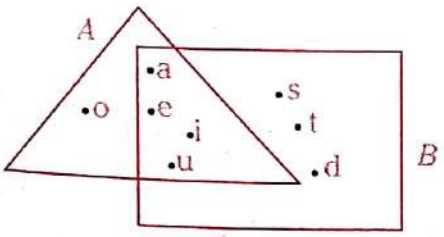
Se representa por una figura geométrica cerrada plana que tiene la característica de agrupar todos los elementos del conjunto.

Ejemplos

- Sea el conjunto $D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$, entonces su diagrama de Venn-Euler es el siguiente:

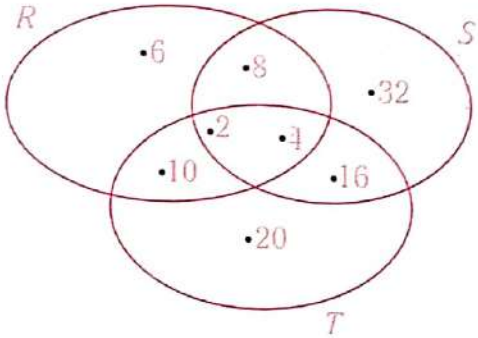


- Sean los conjuntos
  $A=\{a, e, i, o, u\}$
  $B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$
  Entonces su diagrama de Venn-Euler es el siguiente:

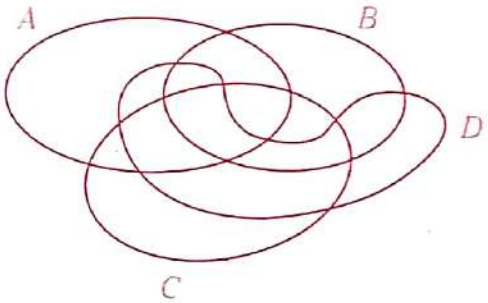


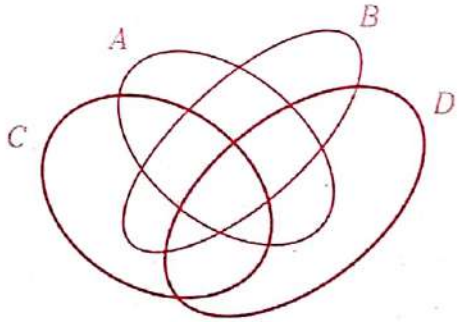
Se observa que
- "o" es elemento solo de A.
- "a", "e", "i", "u" son elementos comunes de A y B.
- "s", "t", "d" son elementos solo de B.

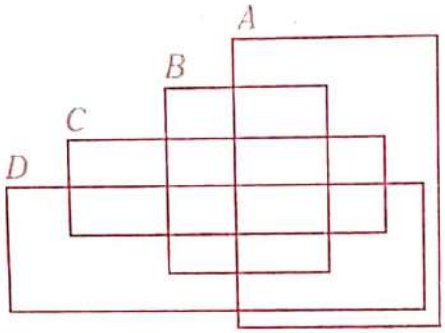
- Sean los conjuntos
  $R=\{2; 4; 6; 8; 10\}$
  $S=\{2; 4; 8; 16; 32\}$
  $T=\{2; 4; 10; 16; 20\}$
  entonces su diagrama de Venn-Euler es el siguiente:



- Para cuatro conjuntos se pueden utilizar los siguientes graficos:







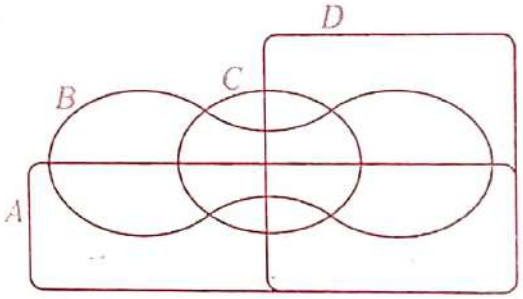
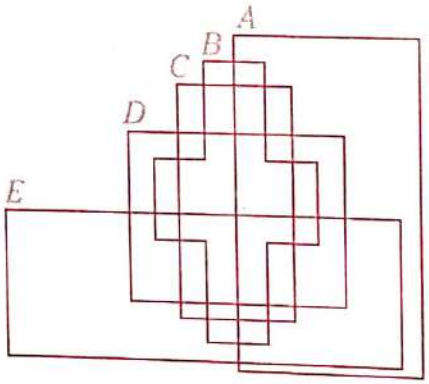


Diagrama de Edwards para cuatro conjuntos

- Para cinco conjuntos se pueden utilizar los siguientes diagramas:



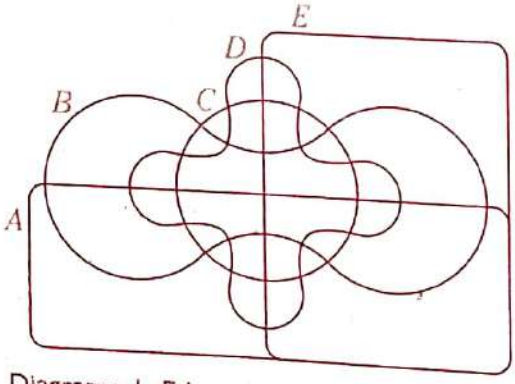


Diagrama de Edwards para cinco conjuntos

Los diagramas de Euler se distinguen de los de Venn en dos aspectos:

- No aparecen las regiones vacías.
- El conjunto universal no se representa.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A=\{1; 2; 3; 4; 6; 12\}$

$B=\{1; 2; 3; 6\}$

$U=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12\}$

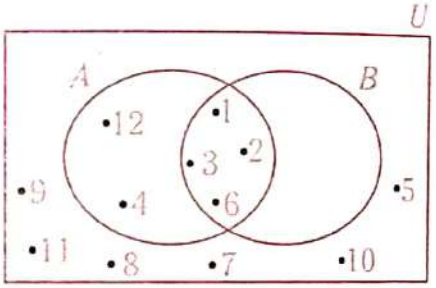


Diagrama de Venn

El siguiente diagrama muestra de otro modo la gráfica de los conjuntos.

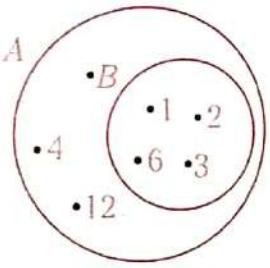


Diagrama de Euler

En la actualidad, se hace uso de una combinación de ambas ideas por eso le denominamos diagrama de Venn - Euler.

Nota

1. En la resolución de ejercicios se utiliza una gráfica de hasta 3 conjuntos y, muy excepcionalmente, de 4 conjuntos.
2. Los diagramas de Venn tienen el nombre de su creador, John Venn, matemático y filósofo británico.
3. Los diagramas que hoy conocemos fueron presentados en julio de 1880. Algunas variantes fueron empleadas luego por George Booley y Augustus De Morgan, pero fue el gran matemático suizo Leonhard Euler quien introdujo una notación clara y sencilla.

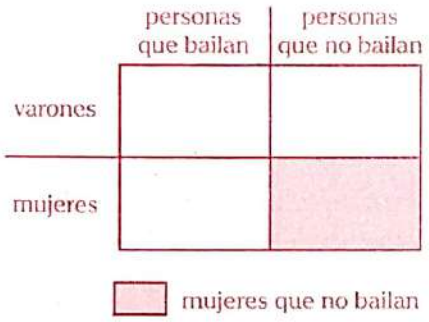
2.2. DIAGRAMA DE LEWIS CARROLL

Generalmente se utiliza este diagrama para graficar conjuntos que no necesariamente tienen elementos en común.

Ejemplos

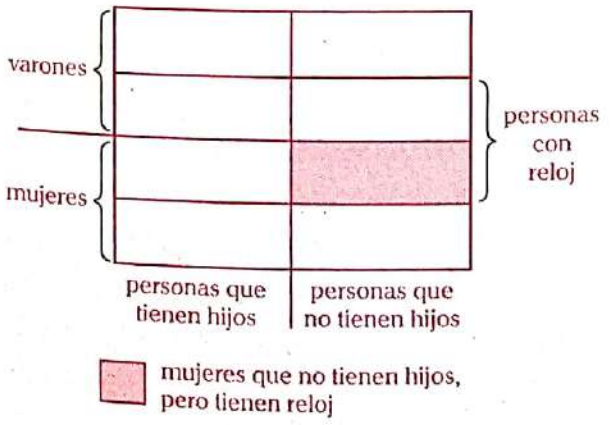
- Sean los siguientes conjuntos:
  - varones
  - mujeres
  - personas que bailan
  - personas que no bailan

  Su diagrama de Lewis Carroll será



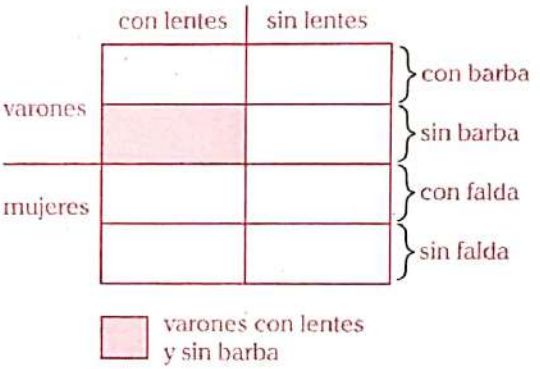
- Sean los siguientes conjuntos:
  - varones
  - mujeres
  - personas que tienen hijos
  - personas que no tienen hijos
  - personas con reloj
  - personas sin reloj

  Su diagrama de Lewis Carroll será



- Sean los siguientes conjuntos:
  - varones
  - mujeres
  - con barba
  - sin barba
  - con falda
  - sin falda
  - con lentes
  - sin lentes

  Su diagrama de Lewis Carroll será



3 ▸ RELACIÓN DE PERTENENCIA

Analicemos los siguientes ejemplos:

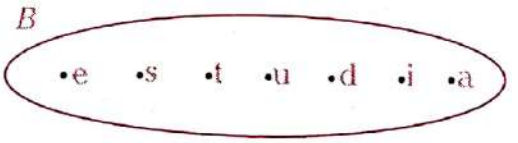
- En el conjunto $A=\{a, e, i, o, u\}$, se observa que
  - a es elemento de A
  - a pertenece al conjunto A

  y se denota de la siguiente manera: $a \in A$

  También se observa que
  - b no es elemento de A
  - b no pertenece al conjunto A

  y se denota como $b \notin A$

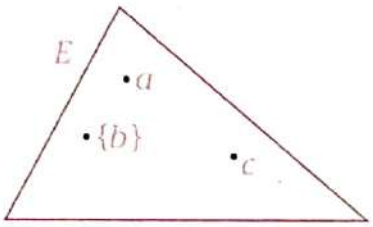
- El diagrama de Venn-Euler del conjunto $B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$ sería el siguiente:



Se observa que

- $e \in B$ - $s \in B$ - $d \in B$
- $o \notin B$ - $2 \notin B$

- En el conjunto $E=\{a,\{b\},c\}$ se observa que sus elementos son a, $\{b\}$ y c; su diagrama de Venn Euler sería el siguiente:



Se observa que

- $a \in E$
- $\{a\} \notin E$
- $\{\{b\}\} \notin E$
- $b \notin E$
- $\{b\} \in E$

Aplicación 1

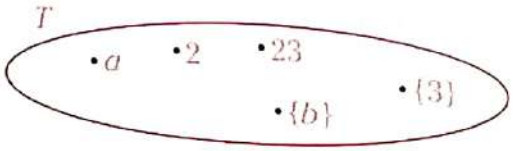
Sea el conjunto $T=\{a; 2; 23; \{b\}; \{3\}\}$ y las siguientes proposiciones:

I. $a \in T$
II. $b \in T$
III. $2 \in T$
IV. $3 \in T$
V. $32 \in T$
VI. $\{a\} \in T$
VII. $\{b\} \in T$
VIII. $\{3\} \in T$
IX. $\{b, 3\} \in T$

Determine cuántas proposiciones son verdaderas.

Resolución

Se recomienda siempre hacer el diagrama de Venn-Euler.



I. $a \in T$ es verdadero.

II. $b \in T$ es falso. Lo que aparece como elemento es $\{b\}$.

III. $2 \in T$ es verdadero.

IV. $3 \in T$ es falso. Lo que aparece como elemento es $\{3\}$.

V. $32 \in T$ es falso.

VI. $\{a\} \in T$ es falso. Lo que aparece como elemento es a.

VII. $\{b\} \in T$ es verdadero.

VIII. $\{3\} \in T$ es verdadero.

IX. $\{b; 3\} \in T$ es falso.

Por tanto, cuatro proposiciones son verdaderas.

4 ▸ CARDINAL DE UN CONJUNTO

Notación: $n(A)$, Card(A), $|A|$

El cardinal de un conjunto nos indica la cantidad de elementos diferentes que tiene dicho conjunto, aunque esto no se aplica a conjuntos cuyos integrantes son personas, animales u objetos reales.

Ejemplos

- $A=\{a, e, i, o, u\} \rightarrow n(A)=5$
- $B=\{e, s, t, u, d, i, a\} \rightarrow n(B)=7$
- $C=\{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo$\} \rightarrow n(C)=7$
- $D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\} \rightarrow n(D)=6$
- $E=\{a; \{b\}; c\} \rightarrow n(E)=3$
- $F=\{3; 3; 3; 4; 4\} \rightarrow n(F)=2$
- $G=\{$🍎, 🍎, 🍎, 🍎$\} \rightarrow n(G)=4$

Aplicación 2

Sea el conjunto $U=\{a^2+16; 25; b-7; 8\}$.

Si $n(U)=2$; además, a y b son impares, calcule $a+b$.

Resolución

Dado que el conjunto U tiene dos elementos y se observa que son 25 y 8, entonces a^2+16 y $b-7$ deben ser igual a alguno de ellos.

Dado que b es impar, entonces $b-7$ es par y debe ser igual a 8; por tanto, b es 15.

Dado que a es impar, entonces a^2+16 es impar y debe ser igual a 25; por tanto, a es igual a 3.

$\therefore \; a+b=18$

5 CUANTIFICADORES

Un cuantificador nos indica si se analizan todos, algunos, uno o ningún valor de una variable de una función proposicional. Por lo tanto, un cuantificador convierte un enunciado abierto en una proposición lógica.

Ejemplo

Sea el enunciado abierto $x^2+1 > 4$ y el conjunto $A=\{2; 3; 4\}$.

Dando valores del conjunto A a la variable x se obtiene lo siguiente:

$x=2 \rightarrow 2^2+1 > 4$ (V)
$x=3 \rightarrow 3^2+1 > 4$ (V)
$x=4 \rightarrow 4^2+1 > 4$ (V)

Se observa que para todo valor de x que pertenece al conjunto A se cumple que $x^2+1 > 4$ es verdadero.

Luego podemos afirmar que para todo $x \in A$ se cumple que $x^2+1 > 4$.

Si bien es cierto que $x^2+1 > 4$ no es proposición, al anteponerle "para todo $x \in A$" se convierte en proposición. A este proceso se le denomina **cuantificación**. Trataremos los dos principales tipos de cuantificadores.

5.1. CUANTIFICADOR UNIVERSAL

Se denota por $\forall$ y se lee "para todo" o "para cualquier". Si $P(x)$ es una función proposicional, $\forall x \in A$, $P(x)$ es una proposición que será verdadera cuando para todos los valores x de A se cumpla $P(x)$.

Aplicación 3

Sea el conjunto $A=\{2; 4; 6; 8\}$ y los enunciados abiertos

- $P(x)=x$ es un número par
- $P(y)=3y-2 > 4$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones

I. $\forall x \in A$: x es un número par
II. $\forall y \in A$: $3y-2 > 4$

Resolución

I. Sea p: $\forall x \in A$: x es un número par
p es verdadera porque al reemplazar todos los valores de x, la proposición siempre es verdadera.
II. Sea q: $\forall y \in A$: $3y-2 > 4$
q es falsa, porque para $y=2$, no se cumple

5.2. CUANTIFICADOR EXISTENCIAL

Se denota por $\exists$ y se lee "existe por lo menos un". Si $P(x)$ es una función proposicional, $\exists x \in A/P(x)$ es una proposición que será verdadera si existe por lo menos un elemento x de A que cumpla $P(x)$.

Aplicación 4

Sea el conjunto $B=\{1; 4; 5; 7\}$ y los enunciados abiertos

- $P(x)=x$ es un número impar
- $P(y)=(y-4)^2=4$

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in B/x$ es impar
II. $\exists y \in B/(y-4)^2=4$

Resolución

I. Sea p: $\exists x \in B/x$ es impar
p es verdadero, porque verifica para $x=5$ (basta que verifique una vez).
II. Sea q: $\exists y \in B/(y-4)^2=4$
q es falso, porque ningún valor de y verifica la expresión.

Aplicación 5

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in \mathbb{N}/3x=4$
II. $\exists x \in A/x+3 > 5$; $A=\{1; 2; 3; 4\}$

Resolución

I. Falso
x tendría que ser $4/3 \notin \mathbb{N}$
$\rightarrow \exists x \in \mathbb{N}/3x=4$ (F)

II. Verdadero

Basta que cumpla para un x, por ejemplo, $4+3=7>5$.

$\rightarrow \exists x \in A / x+3>5$ (V)

Nota

Hay otro cuantificador llamado existencial único, el cual se denota por $\exists!$ y se lee "existe solo un". Si $P(x)$ es una función proposicional, $\exists!\, x \in A / P(x)$ es una proposición que será verdadera si existe solo un elemento de A que cumpla $P(x)$.

Ejemplo

Sea $D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$P(x)$: x es un cuadrado perfecto

y la proposición h: $\exists!\, x \in D / P(x)$

Es decir, existe solo un elemento del conjunto D tal que ese elemento sea un cuadrado perfecto, lo cual es verdadero.

Por lo tanto, la proposición h es verdadera.

5.3. NEGACIÓN DE LOS CUANTIFICADORES

Cuando se afirma la proposición "Todos los peces viven en los mares", su negación afirmaría que no todos los peces viven en los mares. De forma simbólica sería de la siguiente manera:

Sea $S=\{\text{todos los peces}\}$

p: $\forall x \in S$: x vive en los mares

$\sim p$: $\exists x \in S / x$ no vive en los mares

En general se cumple que

$$\sim[\forall x \in A : p(x)] \equiv \exists x \in A / \sim p(x)$$

Análogamente se cumple que

$$\sim[\exists x \in A / p(x)] \equiv \forall x \in A ; \sim p(x)$$

Aplicación 6

Sea el conjunto $A=\{a, e, i, o, u\}$; además, $p(x)$: x es una vocal de la palabra "eucalipto".

Determine el valor de verdad de

I. $H \equiv \forall x \in A : p(x)$

II. $O \equiv \exists x \in A / p(x)$

III. $C \equiv \exists!\, x \in A / p(x)$

IV. $P \equiv \forall x \in A : \sim p(x)$

Resolución

I. $H \equiv \forall x \in A : p(x)$

Al reemplazar los valores de x se observa lo siguiente:

- Para $x=a$; $p(a)$ es verdadero.
- Para $x=e$; $p(e)$ es verdadero.
- Para $x=i$; $p(i)$ es verdadero.
- Para $x=o$; $p(o)$ es verdadero.
- Para $x=u$; $p(u)$ es verdadero.

Dado que verificó para todos, entonces H es verdadero.

II. $O \equiv \exists x \in A / p(x)$

Para $x=a$; $p(a)$ es verdadero.

Dado que verificó por lo menos para un valor, entonces O es verdadero.

III. $C \equiv \exists!\, x \in A / p(x)$

Para $x=a$; $p(a)$ es verdadero.

Para $x=e$; $p(e)$ es verdadero.

Dado que está verificado para más de un valor, entonces C es falso.

IV. $P \equiv \forall x \in A : \sim p(x)$

Se observa que P es la negación de O, entonces P es falso.

Aplicación 7

Determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\forall x \in A$: $x+3>5$; $A=\{1; 2; 3; 4\}$

II. $\forall n \in \mathbb{Z}^+$: $2n+1$ es impar

III. $\forall x \in M$: x es mortal, siendo $M=\{\text{todos los hombres}\}$

Resolución

I. Para $x=1 \rightarrow 1+3>5$ (V)

Para $x=2 \rightarrow 2+3>5$ (F)

Se observa que hay por lo menos un valor que no cumple. Por lo tanto,

$\forall x \in A$: $x+3>5$ (F)

II. $2n$ es par, al sumarle 1 será impar. (V)

III. Todos los hombres son mortales. (V)

Aplicación 8

Sean los conjuntos

$A=\{x \in \mathbb{Z}/0<x<8\}$

$B=\{y \in \mathbb{Z}/0<y<7\}$

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $p \equiv \exists x \in A/\forall y \in B; x+y \neq 8$

II. $q \equiv \forall x \in A; \exists y \in B/x+y=5$

III. $r \equiv \exists x \in A/\forall y \in B; x+y>6$

IV. $s \equiv \forall x \in A; \exists y \in B/x \cdot y \neq 0$

Resolución

I. $p \equiv \exists x \in A/\forall y \in B; x+y \neq 8$

Cuando $x=1$, se cumple la proposición.

Por lo tanto, si $\exists x \in A$ (V)

II. $q \equiv \forall x \in A; \exists y \in B/x+y=5$

Cuando $x=7$, no se cumple la proposición.

Por lo tanto, no $\exists y \in B$ (F)

III. $r \equiv \exists x \in A/\forall y \in B; x+y>6$

Cuando $x=7$, se cumple la proposición.

Por lo tanto, si $\exists x \in A$ (V)

IV. $s \equiv \forall x \in A; \exists y \in B/x \cdot y \neq 0$

Se verifica para todos los valores de $x \in A$.

Por lo tanto, si $\exists y \in B$ (V)

6 DETERMINACIÓN DE UN CONJUNTO

6.1. POR EXTENSIÓN

Se da cuando se menciona uno a uno todos los elementos de un conjunto. También se denomina determinación en forma tabulativa o enumerativa.

Ejemplos

- $C=\{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo$\}$
- $D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

6.2. POR COMPRENSIÓN

Se da cuando se mencionan características comunes que verifican solamente los elementos de dicho conjunto. También se denomina determinación en forma constructiva.

Tienen la siguiente forma:

$$\left\{\begin{matrix}\text{forma del} \\ \text{elemento}\end{matrix} \Big/ \begin{matrix}\text{característica de} \\ \text{la(s) variables(s)}\end{matrix}\right\}$$

Ejemplos

- $C=\{x/x$ es un día de la semana$\}$
- $D=\{x/x$ es un número par menor que $14\}$
- $D=\{2a/0<a<7 \wedge a \in \mathbb{Z}\}$

Aplicación 9

Calcule $n(J)+n(V)+n(E)$ si se sabe que

- $J=\left\{\dfrac{4x+5}{3} \Big/ x \in \mathbb{Z},\ 3<x<7\right\}$
- $V=\left\{\left(\dfrac{4x+5}{3}\right) \in \mathbb{Z} \Big/ x \in \mathbb{Z},\ 3<x<7\right\}$
- $E=\left\{\left(\dfrac{4x+5}{3}\right) \in \mathbb{Z} \Big/ 3<x<7\right\}$

Resolución

Hallamos el cardinal de cada conjunto.

- $J=\left\{\frac{4x+5}{3}\Big/x\in\mathbb{Z},3<x<7\right\}$

  Los valores posibles de x son 4; 5 y 6, entonces

  cuando $x=4$: $\frac{4(4)+5}{3}=7$

  cuando $x=5$: $\frac{4(5)+5}{3}=\frac{25}{3}$

  cuando $x=6$: $\frac{4(6)+5}{3}=\frac{29}{3}$

  Luego,

  $$J=\left\{7;\frac{25}{3};\frac{29}{3}\right\}$$

  $\rightarrow\ n(J)=3$

- $V=\left\{\left(\frac{4x+5}{3}\right)\in\mathbb{Z}\Big/x\in\mathbb{Z},3<x<7\right\}$

  Los valores posibles de x son 4; 5 y 6, entonces

  cuando $x=4$: $\frac{4(4)+5}{3}=7$ (se acepta porque 7 es entero)

  cuando $x=5$: $\frac{4(5)+5}{3}=\frac{25}{3}$ (no se acepta porque $\frac{25}{3}$ no es entero)

  cuando $x=6$: $\frac{4(6)+5}{3}=\frac{29}{3}$ (no se acepta porque $\frac{29}{3}$ no es entero)

  Luego,

  $V=\{7\}$

  $\rightarrow\ n(V)=1$

- $E=\left\{\left(\frac{4x+5}{3}\right)\in\mathbb{Z}\Big/3<x<7\right\}$

  Dado que no se indica que x sea entero, entonces se entiende que es un número real.

  $3<x<7$

  Multiplicamos por 4 (observe que 4 es positivo).

  $12<4x<28$

  Sumamos 5.

  $17<4x+5<33$

  Dividimos entre 3 (observe que 3 es positivo).

  $$\frac{17}{3}<\frac{4x+5}{3}<\frac{33}{3}$$

  Es decir,

  $$5{,}666...<\frac{4x+5}{3}<11$$

  Ahora $\frac{4x+5}{3}$ puede tomar los siguientes valores enteros: 6; 7; 8; 9; 10 y 11.

  $E=\{6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11\}$

  $\rightarrow\ n(E)=6$

Nos piden $n(J)+n(V)+n(E)$.

Por lo tanto

$3+1+6=10$.

Aplicación 10

Se tienen los siguientes conjuntos:

$C=\{2a+1/1<a<8;\ a\in\mathbb{Z}\}$

$D=\{2a+1\in\mathbb{Z}/1<a<8\}$

Halle la suma del mayor elemento de C más el mayor elemento de D.

Resolución

En el conjunto C, los elementos tienen la forma $2a+1$.

Luego, los valores de a son 2; 3; 4; 5; 6 y 7.

Para determinar los elementos, cada valor de a se reemplaza en la expresión "$2a+1$".

a	2	3	4	5	6	7
2a	4	6	8	10	12	14
2a+1	5	7	9	11	13	15

→ $C=\{5; 7; 9; 11; 13; 15\}$

Luego, el mayor elemento de C es 15.

En el conjunto D, los elementos son números enteros, pero el valor de a está comprendido en el intervalo $\langle 1; 8\rangle$.

$$1 < a < 8 \quad \times 2$$
$$2 < 2a < 16 \quad +1$$
$$3 < 2a+1 < 17$$

Dado que $2a+1$ es un número entero, entonces toma los valores de 4; 5; 6; 7; ...; 15; 16.

Entonces

$D=\{4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15; 16\}$

Luego, el mayor elemento de D es 16

Por lo tanto, $16+15=31$.

7▸ TIPOS DE CONJUNTOS

7.1. CONJUNTOS FINITOS

Son aquellos conjuntos en los que el proceso de contar sus elementos tiene un final en el tiempo.

Ejemplos

- $A=\{a, e, i, o, u\}$
- $B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$
- $X=\{\sqrt{5}+2; \sqrt{6}+2; \sqrt{7}+2; ...; \sqrt{1977}+2\}$

  Observe que el conjunto X tiene 1973 elementos.
- $W=\{a^2+3/a \in \mathbb{N} \wedge 3 < a < 1000\}$

  Observe que el conjunto W tiene 996 elementos.

7.2. CONJUNTOS INFINITOS

Son aquellos conjuntos en los que el proceso de contar sus elementos no tiene un final en el tiempo.

Ejemplos

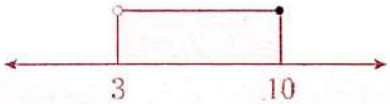
- $\mathbb{N}=\{1; 2; 3; 4; ...\}$
- $Y=\{\sqrt{5}+2; \sqrt{6}+2; \sqrt{7}+2; ...\}$

▸▸ Nota

- El conjunto $\{x/3 \le x \le 7\}$ es un conjunto infinito y representa al intervalo cerrado $[3; 7]$.
- Un intervalo es un subconjunto de la recta real.

  Ejemplo

  Sea el intervalo semiabierto $\{x/3 < x \le 10\}$, que se denota por $(3; 10]$, se representa gráficamente como



8▸ RELACIONES ENTRE CONJUNTOS

8.1. RELACIÓN DE INCLUSIÓN

Se dirá que un conjunto A está incluido en un conjunto B cuando todos los elementos de A también sean elementos de B.

Ejemplos

- Sean los conjuntos

  $H=\{e, u, c, a, l, i, p, t, o\}$

  $A=\{a, e, i, o, u\}$

  Se observa que todos los elementos de A también son elementos del conjunto H. Entonces se puede decir que
  - A está incluido en H.
  - A está contenido en H.
  - A es un subconjunto de H.

Se denota de la siguiente manera:

$A \subset H$

Además, se puede afirmar que

- H incluye a A
- H contiene a A
- H es un superconjunto de A

Se denota de la siguiente manera:

$H \supset A$

- Sea el conjunto $B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$, entonces
  - $\{e\} \subset B$ porque $e \in B$
  - $\{s, u\} \subset B$ porque $s \in B \wedge u \in B$
  - $\{p\} \not\subset B$ porque $p \notin B$
  - $\{e, s, r\} \not\subset B$ porque $r \notin B$

Recuerde

elemento $\in$ conjunto

conjunto $\subset$ conjunto

- Sea el conjunto $E=\{a; \{b\}; c\}$, entonces
  - $\{a\} \subset E$ porque $a \in E$
  - $\{b\} \not\subset E$ porque $b \notin E$
  - $\{\{b\}\} \subset E$ porque $\{b\} \in E$
  - $\{\{\{b\}\}\} \not\subset E$ porque $\{\{b\}\} \notin E$
  - $\{a; \{b\}\} \subset E$ porque $a \in E \wedge \{b\} \in E$

Aplicación 11

Dado el conjunto A

$A=\{5; \{6\}; \{\{8\}\}; \{7; 8\}\}$

determine el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\{5\} \in A$

II. $6 \in A$

III. $\{5\} \subset A$

IV. $\{6\} \subset A$

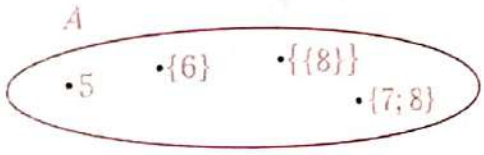
V. $\{\{\{8\}\}\} \subset A$

VI. $\{7; 8\} \notin A$

VII. $\{\{7; 8\}\} \not\subset A$

Resolución

Realizamos el diagrama de Venn-Euler.



Entonces

I. $\{5\} \in A$ es falso.

II. $6 \in A$ es falso.

III. $\{5\} \subset A$ es verdadero porque $5 \in A$.

IV. $\{6\} \subset A$ es falso porque $6 \notin A$.

V. $\{\{\{8\}\}\} \subset A$ es verdadero porque $\{\{8\}\} \in A$.

VI. $\{7; 8\} \notin A$ es falso.

VII. $\{\{7; 8\}\} \not\subset A$ es falso porque $\{7; 8\} \in A$.

Nota

Anteriormente, estudiamos los diagramas de conjuntos Venn-Euler y Lewis Carroll; sin embargo, también existe el diagrama lineal.

8.2. DIAGRAMA LINEAL

Es la representación de dos o más conjuntos comparables, utilizando segmentos de recta para representar la relación de inclusión entre dichos conjuntos.

Ejemplos

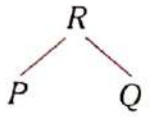
- $A \subset B$

- $M \subset N \subset P$

Observe que para representar linealmente primero se coloca el superconjunto seguido del subconjunto.

- Sean los conjuntos
  $P=\{a\}$
  $Q=\{b\}$
  $R=\{a; b\}$

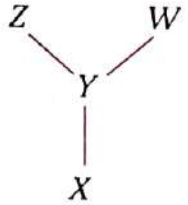
  Se observa que $P \subset R$; además, $Q \subset R$.
  También se puede decir que
  $R \supset P$ y $R \supset Q$
  Su representación mediante el diagrama lineal es el siguiente:



  Observe que el diagrama lineal no informa si los conjuntos P y Q comparten o no elementos

- Sean los conjuntos
  $X=\{1\}$
  $Y=\{1; 2\}$
  $Z=\{1; 2; 3\}$
  $W=\{1; 2; 4\}$

  Se observa que $Y \supset X$, también $Z \supset Y$; por tanto, $Z \supset X$.
  Además, $W \supset X$ y $W \supset Y$.
  Su representación mediante el diagrama lineal es el siguiente:



8.3. RELACIÓN DE COMPARABILIDAD

Se dirá que dos conjuntos son comparables cuando solo uno de ellos esté incluido en el otro.

Sean los conjuntos
$H=\{e, u, c, a, l, i, p, t, o\}$
$A=\{a, e, i, o, u\}$

Se observa que $A \subset H \wedge H \not\subset A$, entonces A y H son comparables.

Dado que $A \subset H \wedge H \not\subset A$, también se puede decir que H y A son comparables. Es decir, si los conjuntos H y R son comparables, debe ocurrir una de las dos situaciones siguientes:

- $H \subset R \wedge R \not\subset H$
- $R \subset H \wedge H \not\subset R$

> **Observación**
> En los conjuntos
> $I=\{r, e, s, t, o\}$
> $J=\{r, e, t, o, s\}$
> ocurre que $I \subset J \wedge J \subseteq I$, entonces los conjuntos I y J no son comparables.

8.4. RELACIÓN DE IGUALDAD

Dos o más conjuntos son iguales cuando tienen los mismos elementos sin importar el orden ni la repetición.

Sean los conjuntos
$I=\{r, e, s, t, o\}$
$J=\{r, e, t, o, s\}$
$K=\{t, e, s, o, r, o, s\}$
Los conjuntos I, J y K tienen los mismos elementos.
$\therefore\ I=J=K$

Se observa que $I \subset J \wedge J \subset I$, lo que indica que dos conjuntos iguales no son comparables.

$$(A=B) \equiv (A \subset B \wedge B \subset A)$$

8.5. CONJUNTOS DISJUNTOS

Son aquellos conjuntos que no tienen elementos comunes.

Ejemplo
Sean los conjuntos
$C=\{$lunes, martes, miércoles, jueves, viernes, sábado, domingo$\}$
$D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

C y D son conjuntos disjuntos, también se les denomina conjuntos ajenos.

¿Dos conjuntos diferentes son disjuntos?

Falso. No siempre es así, ya que podrían compartir algunos elementos en común. Por ejemplo, sean los conjuntos

$J=\{r, e, t, o, s\}$

$A=\{a, e, i, o, u\}$

Los conjuntos J y A son diferentes, pero no son disjuntos.

¿Dos conjuntos diferentes tienen diferente cardinal?

Falso. No siempre es así, por ejemplo

$J=\{r, e, t, o, s\}$

$A=\{a, e, i, o, u\}$

Los conjuntos J y A son diferentes y tienen igual cardinal.

Aplicación 12

Sean los conjuntos iguales

$A=\{2a+3b; 3a+b; b^2+4\}$

$B=\{29; 33; 32\}$

Si $\{a; b\} \subset \mathbb{Z}^+$, calcule $a+b$.

Resolución

Ya que A y B son conjuntos iguales, entonces b^2+4 puede ser 29; 32 o 33.

Luego, b es entero solo si b^2+4 es 29.

$\rightarrow\ b^2+4=29\ \rightarrow\ b=5$

Reemplazamos.

$A=\{2a+15,\ 3a+5,\ 29\}$

$B=\{29,\ 33,\ 32\}$

Se observa que, en el conjunto B, 32 es un número par; y como, en el conjunto A, $2a+15$ y 29 son impares, entonces

$3a+5=32$

$a=9$

$\therefore\ a+b=14$

8.6. CONJUNTOS EQUIPOTENTES

Son aquellos conjuntos en los que se puede establecer una relación biunívoca entre los elementos de ambos conjuntos. También son denominados equivalentes o coordinables.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$L=\{6; 12; 18; 24; 30; 36\}$

Entre los elementos de ambos conjuntos se puede establecer la relación "... es el triple de ..." y "...es la tercera parte de ...", entonces D y L son equipotentes; además, se observa que $n(D)=n(L)$.

Consideraciones

1. Sea el conjunto de los números naturales $\mathbb{N}=\{1; 2; 3; 4; ...\}$ y el conjunto de los números pares $V=\{2; 4; 6; 8; ...\}$. Se observa que ambos son conjuntos infinitos; sin embargo, también son coordinables, ya que se puede establecer una relación entre ambos.

   Los elementos de ambos conjuntos se pueden relacionar mediante la frase "... es la mitad de ...".

   Ejemplos

   - 1 es la mitad de 2.
   - 2 es la mitad de 4.
   - 3 es la mitad de 6.
   - 4 es la mitad de 8.

   Se observa que a cada número natural le corresponde un único número par.

   También se pueden relacionar mediante la frase "... es el doble de ...".

   Ejemplos

   - 2 es el doble de 1.
   - 4 es el doble de 2.
   - 6 es el doble de 3.
   - 8 es el doble de 4.

Se observa que a cada número par le corresponde un único número natural.

Es decir, entre ambos conjuntos, $\mathbb{N}$ y V, existe una relación biunívoca.

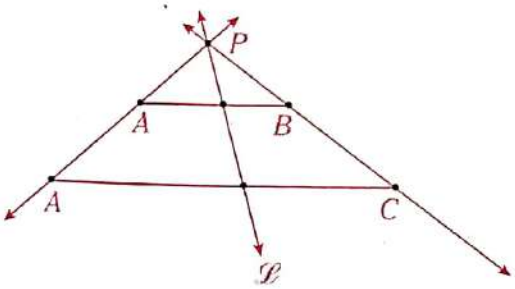
2. Los segmentos son conjuntos de infinitos puntos.

Sea $\overline{AC}$ un segmento y B un punto de dicho segmento.

Ocurre que el segmento $\overline{AB}$ es equipotente con el segmento $\overline{AC}$ (siendo $\overline{AB}$ subconjunto de $\overline{AC}$).

Colocando convenientemente los segmentos $\overline{AB}$ y $\overline{AC}$ se hace pasar dos rectas por los extremos de ambos segmentos; dichas rectas se intersecan en un punto P. Entonces se cumple que cualquier recta que pase por P hace corresponder un punto de $\overline{AB}$ con un punto de $\overline{AC}$ y viceversa.

Gráficamente, se tiene que



9 ▸ CONJUNTOS ESPECIALES

Son aquellos conjuntos que retan nuestra idea intuitiva de conjunto.

9.1. CONJUNTO VACÍO

También llamado conjunto nulo; es aquel conjunto que no tiene elementos.

Notación: { }, $\varnothing$

Ejemplo

Sea el conjunto

$$M=\{x/(x-3)(x-2)(x-1)=0 \wedge x>5\}$$

Los valores que verifican la igualdad con cero (3; 2 y 1) no verifican la condición de ser mayor que 5. Entonces no hay valores posibles para x. Por lo tanto, el conjunto M es un conjunto vacío.

$$M=\varnothing$$

> ▸▸ Nota
> El conjunto vacío está incluido en cualquier conjunto.

9.2. CONJUNTO UNITARIO

Es aquel conjunto que tiene un solo elemento. También es denominado singleton.

Ejemplo

Sea el conjunto

$$N=\{x^2+5/(x-3)(x+3)=0\}$$

Se observa que x puede ser 3 o -3, pero al reemplazar en x^2+5 sale el mismo resultado, 14.

$\rightarrow$ $N=\{14\}$ $\rightarrow$ $n(N)=1$

> ▸▸ Observación
> Tenga en cuenta que
> $\{\varnothing\}\neq\varnothing$
> donde $\{\varnothing\}$ es un conjunto que tiene un elemento, el cual es el conjunto vacío.

Aplicación 13

Los siguientes conjuntos son unitarios e iguales

$A=\{2a+b;\ c\}$

$B=\{2c-7;\ 5b+2\}$

Calcule $a+b+c$.

Resolución

Como $A=B$ y ambos son unitarios, entonces

$c=2c-7$

$c=7$

También

$5b+2=7$

$b=1$

Además,

$2a+b=7$

$2a+1=7$

$a=3$

Nos piden $a+b+c$

$\therefore\ a+b+c=11$

9.3. CONJUNTO UNIVERSAL

Es un conjunto especial que tiene la particularidad de agrupar todos los elementos que intervienen en una situación dada, no es un conjunto único.

Notación: U

Ejemplo

Para los conjuntos

$D=\{2; 4; 6; 8; 10; 12\}$

$L=\{6; 12; 18; 24; 30; 36\}$

$P=\{2; 4; 8; 16\}$

sus posibles conjuntos universales son

$U_1=\{2; 4; 6; 8; ...; 40\}$

$U_2=\{1; 2; 3; 4; ...; 40\}$

$U_3=\{x / 0<x<40\}$

$\vdots$

Se verifica que los tres conjuntos anteriores son distintos; además, observe que no son los únicos.

9.4. CONJUNTO DE CONJUNTOS

Es aquel conjunto en el cual todos sus elementos también son conjuntos; también se le denomina familia de conjuntos.

Ejemplos

- $H=\{\{3; 4\},\{2; 5; 8\},\{6; 7\}\}$

  H es un conjunto de conjuntos, ya que todos sus elementos también son conjuntos.

- $E=\{a, \{b\}, c\}$

  E no es un conjunto de conjuntos, ya que a y c no son conjuntos.

9.5. CONJUNTO POTENCIA

El conjunto potencia de A, que se denota $P(A)$, es aquel que tiene como elementos a todos los subconjuntos de A.

Ejemplos

- Sea el conjunto $N=\{14\}$.

  Los subconjuntos de N son: $\varnothing$ y $\{14\}$.

  Entonces el conjunto potencia de N es

  $P(N)=\{\varnothing, 14\}$

- Sea el conjunto $F=\{3; 4\}$.

  Los subconjuntos de F son $\varnothing$, $\{3\}$, $\{4\}$, $\{3; 4\}$.

  Entonces el conjunto potencia de F es

  $P(F)=\{\varnothing, \{3\}, \{4\}, \{3; 4\}\}$

- Sea el conjunto $S=\{\alpha, \beta, \theta\}$.

  Los subconjuntos de S son

  $\varnothing,\{\alpha\},\{\beta\},\{\theta\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\theta\},\{\beta,\theta\},\{\alpha,\beta,\theta\}$

  Entonces el conjunto potencia de S es

  $P(S)=\{\varnothing,\{\alpha\},\{\beta\},\{\theta\},\{\alpha,\beta\},\{\alpha,\theta\},\{\beta,\theta\},\{\alpha,\beta,\theta\}\}$

Se observa que

Conjunto	Número de elementos	Número de subconjuntos
N	1	2
F	2	4
S	3	8

Es decir, cada vez que se aumenta un elemento en el conjunto, el número de subconjuntos se duplica, ocurriendo lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{c}\text{n.}^{\text{o}}\text{ de}\\ \text{subconjuntos}\\ \text{de } A\end{array}\right) = n\left[P_{(A)}\right] = 2^{n(A)}$$

9.5.1. Subconjuntos propios

Se denomina subconjunto propio a todo conjunto diferente de sí mismo.

Ejemplo

En el conjunto $F=\{3; 4\}$, sus subconjuntos son

$$\underbrace{\varnothing, \{3\}, \{3\}}_{\text{subconjuntos propios de } F}, \{3; 4\}$$

Por lo tanto,

$$\left(\begin{array}{c}\text{n.}^{\text{o}}\text{ de subconjuntos}\\ \text{propios de } A\end{array}\right) = 2^{n(A)} - 1$$

Observe que todo conjunto está incluido en sí mismo.

$$\text{Si } A \text{ es conjunto} \rightarrow A \subset A$$

Además, en el conjunto F ocurre que $\{3\} \in P(F)$, ya que $\{3\} \subset F$.

Es decir,

$$x \in P(A) \leftrightarrow x \subset A$$

Por lo tanto, el conjunto potencia es también un conjunto de conjuntos.

9.6. PAR ORDENADO

Es un conjunto especial en el cual es importante el orden de sus dos elementos (desde ahora llamados componentes). También cambia el signo de colección.

$$(a; b)$$

primer componente — segundo componente

El par ordenado se define como

$$(a; b) = \{\{a\}, \{a; b\}\}$$

Ejemplo

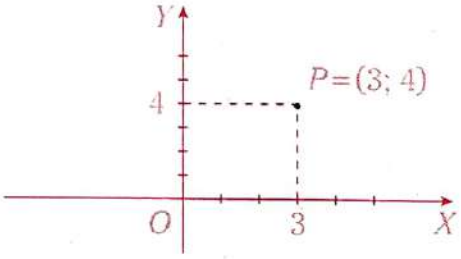
Sea el conjunto $P=(a; b)$.

Si $(a; b)=(3; 4)$, entonces $a=3$ y $b=4$.

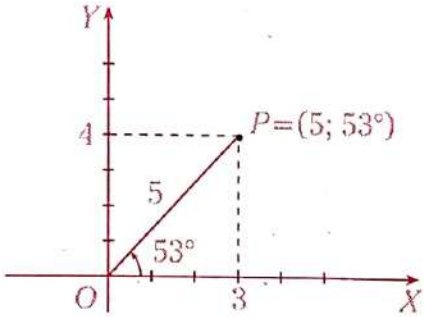
La utilidad del par ordenado radica en ubicar puntos en el plano cartesiano.

Ejemplo

El punto $P=(3; 4)$ se representa como



El mismo punto también se puede representar con coordenadas polares.



Se denota como $P=(5; 53°)$, lo cual nos indica que el punto está a una distancia de 5 unidades del origen O y a un ángulo de 53° sobre el eje X.

En el espacio, se pueden usar coordenadas cartesianas, esféricas o cilíndricas, utilizando "ternas ordenadas" de la forma $(a; b; c)$.

Nota

Se denomina sistema de ecuaciones lineales de orden dos cuando se tienen dos ecuaciones lineales con dos incógnitas y se utiliza el par ordenado para indicar su solución.

Ejemplo

Sea el sistema de ecuaciones

$$\begin{cases} 5x+7y=43 \\ 2x-y=2 \end{cases}$$

donde los valores que lo verifican son $x=3$, $y=4$; es decir, su solución es $(3; 4)$ y su conjunto solución es $\{(3; 4)\}$.

En un sistema de ecuaciones lineales de orden tres se utilizan ternas ordenadas para indicar su solución.

10 ▸ OPERACIONES ENTRE CONJUNTOS

10.1. COMPLEMENTO

El complemento del conjunto A es el conjunto formado por los elementos que pertenecen al conjunto universal, pero no le pertenecen a dicho conjunto. También es llamado conjunto complementario de A.

Notación: A^C, A' o $\overline{A}$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$U=\{e, u, c, a, l, i, p, t, o\}$

$A=\{a, e, i, o, u\}$

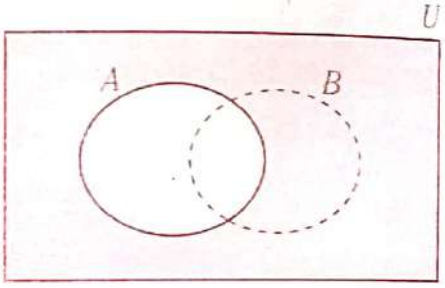
$\rightarrow\ A^C=\{c, l, p, t\}$

Al complemento de A se le asocia con la frase "No A".

Por comprensión se define como

$$A^C=\{x/x\in U \wedge x\notin A\}$$

Gráficamente,



El complemento de A es toda la región sombreada.

Observación

- $\varnothing^C=U$
- $U^C=\varnothing$
- A y A^C son conjuntos disjuntos
- $n(A)+n(A^C)=n(U)$

10.2. INTERSECCIÓN

Los elementos de la intersección de A con B son los elementos comunes de A y B.

Notación: $\cap$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A=\{a, e, i, o, u\}$

$B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$

$\rightarrow\ A\cap B=\{a, e, i, u\}$

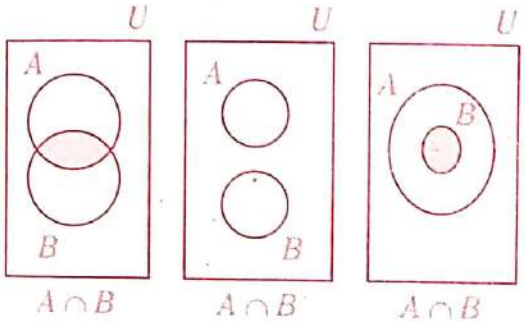
Importante

En los problemas, generalmente, la intersección de conjuntos se asocia con la palabra "y", es decir, si se desea saber cuántas personas bailan y usan lentes, entonces se debe entender que se desea saber el cardinal de la intersección de los conjuntos "personas que bailan" con "personas que usan lentes".

Por comprensión se define

$$A\cap B=\{x/x\in A \wedge x\in B\}$$

Gráficamente, $A \cap B$ se representa de las siguientes formas:



Observación

- A y B son conjuntos disjuntos si y solo si $(A \cap B) = \varnothing$.
- Si $B \subset A$, ocurre que $(A \cap B) = B$.
- $(A \cap B) \subset A$
- $A \cap A^C = \varnothing$

Aplicación 14

Si $A = \{\varnothing\}$, $B = P(A)$, $C = B - A$ y $D = P(C)$, halle $B \cap D$.

Resolución

Analizamos cada unos de los datos.

- $A = \{\varnothing\}$
- $B = P(A) = \{\varnothing, \{\varnothing\}\}$
- $C = B - A = \{\{\varnothing\}\}$
- $D = P(C) = \{\varnothing, \{\{\varnothing\}\}\}$

$\therefore \; B \cap D = \{\varnothing\} = A$

10.3. UNIÓN O REUNIÓN

La unión de A con B $(A \cup B)$ reúne los elementos de A con los elementos de B.

Notación: $\cup$

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{a, e, i, o, u\}$

$B = \{e, s, t, u, d, i, a\}$

$\rightarrow \; A \cup B = \{a, e, i, o, u, s, t, d\}$

Importante

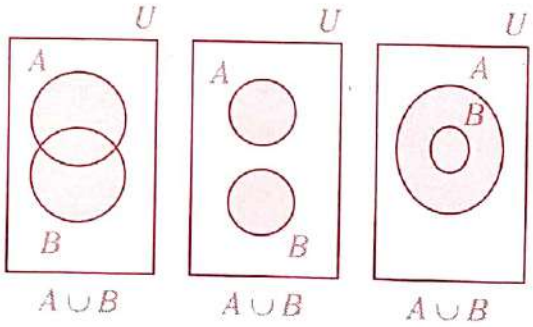
En los problemas, generalmente, la unión de conjuntos se asocia con la palabra "o", es decir, si se desea saber cuántas personas bailan o usan lentes, entonces se debe entender que se desea saber el cardinal de la unión de los conjuntos "personas que bailan" con "personas que usan lentes".

Por comprensión se define que

$$A \cup B = \{x / x \in A \vee x \in B\}$$

Es decir, basta que sea elemento de alguno de los conjuntos para que sea elemento de la unión.

Gráficamente, $A \cup B$ se representa de las siguientes formas:



Observación

- Para dos conjuntos A y B cualesquiera, ocurre que

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

- A y B son conjuntos disjuntos si y solo si $n(A \cup B) = n(A) + n(B)$.
- Si $B \subset A$, ocurre que $(A \cup B) = A$.
- $A \cup A^C = U$
- $(A \cap B) \subset (A \cup B)$

10.4. DIFERENCIA

La diferencia de los conjuntos A y B (en ese orden) está formada por los elementos de A que no pertenecen al conjunto B.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A=\{a, e, i, o, u\}$

$B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$

Operamos la diferencia entre ambos en órdenes distintos.

$A-B=\{o\}$ → "Solo A"

$B-A=\{s, t, d\}$ → "Solo B"

Observe que $A-B$ es diferente de $B-A$.

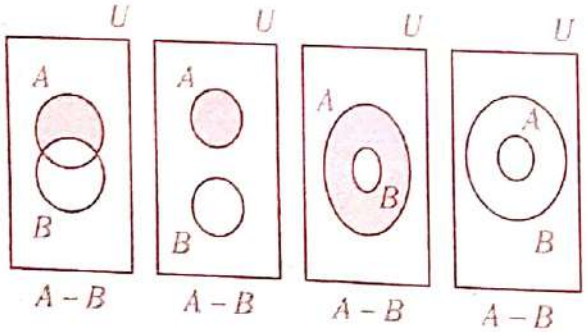
Importante

En los problemas, generalmente, la diferencia de conjuntos se asocia con la palabra "solo", es decir, si tenemos los conjuntos "personas que bailan" y "personas que usan lentes", y se desea saber cuántas personas **solo** bailan, entonces se debe entender que se desea saber cuántas personas bailan, pero no usan lentes.

Por comprensión se define

$$A-B=\{x/x\in A\wedge x\notin B\}$$

Gráficamente, $A-B$ se representa de las siguientes formas:



Observación

- Cuando A y B son disjuntos, ocurre que

$$A-B=A$$

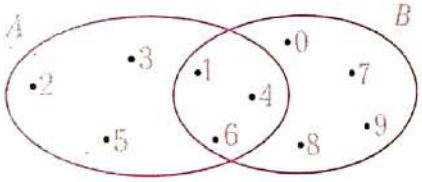
- Si $A\subset B$, ocurre que $A-B=\varnothing$.
- $n(A-B)=n(A)-n(A\cap B)$

Aplicación 15

Se tienen los conjuntos $A=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ y $B=\{0; 1; 4; 6; 7; 8; 9\}$. Sea m el número de subconjuntos no vacíos de A, que son disjuntos con B; además, n es el número de subconjuntos no vacíos de B, que son disjuntos con A. Halle $m+n$.

Resolución

Graficamos ambos conjuntos.



Los subconjuntos de A disjuntos con B son aquellos cuyos elementos pertenecen a $(A-B)$.

→ $m=2^3-1=7$

Los subconjuntos de B disjuntos con A son aquellos cuyos elementos pertenecen a $(B-A)$.

→ $n=2^4-1=15$

∴ $m+n=22$

10.5. DIFERENCIA SIMÉTRICA

La diferencia simétrica de A y B $(A\,\Delta\,B)$ está formada por los elementos que pertenecen solo a A y solo a B.

Notación: Δ

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A=\{a, e, i, o, u\}$

$B=\{e, s, t, u, d, i, a\}$

→ $A\,\Delta\,B=\{o, s, t, d\}$

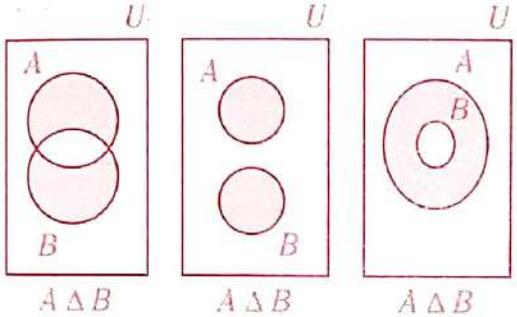
Se lee como

- "solo A o solo B"
- "todo menos lo común"

Por comprensión se define

$$A\,\Delta\,B=\{x/x\in(A-B)\vee x\in(B-A)\}$$

Gráficamente, $A \Delta B$ se representa de las siguientes formas:



Observación

- Cuando A y B son disjuntos, ocurre que
$$A \Delta B = A \cup B$$
- Si $B \subset A$, ocurre que $A \Delta B = A - B$.
- $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$
- $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$

10.6. PRODUCTO CARTESIANO

Dados los conjuntos A y B, el conjunto producto $A \times B$ (o producto cartesiano) es aquel conjunto cuyos elementos son pares ordenados, de los cuales el primer componente pertenece al conjunto A y el segundo componente pertenece al conjunto B.

Por comprensión se define

$$A \times B = \{(x; y) / x \in A \wedge y \in B\}$$

donde A y B son conjuntos no vacíos.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A = \{2; 3; 4\}$

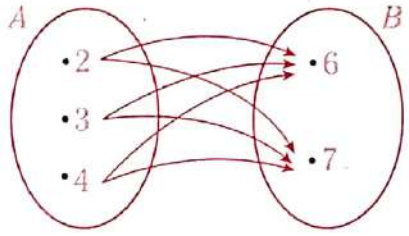
$B = \{6; 7\}$

Se tienen los siguientes conjuntos productos:

$A \times B = \{(2; 6), (2; 7), (3; 6), (3; 7), (4; 6), (4; 7)\}$

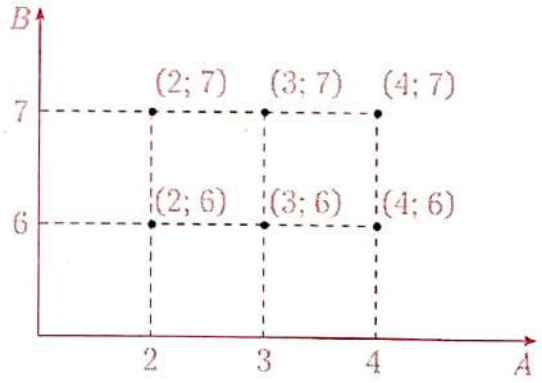
$B \times A = \{(6; 2), (7; 2), (6; 3), (7; 3), (6; 4), (7; 4)\}$

Con **diagrama sagital**, $(A \times B)$ será



El diagrama sagital es un tipo de gráfico de conjuntos y es un diagrama de flechas (sagitas) que enlazan elementos de un conjunto con los elementos de otro conjunto. Este diagrama tendrá un uso más amplio y frecuente cuando se estudie relaciones y funciones.

Con **diagrama cartesiano**, $(A \times B)$ será

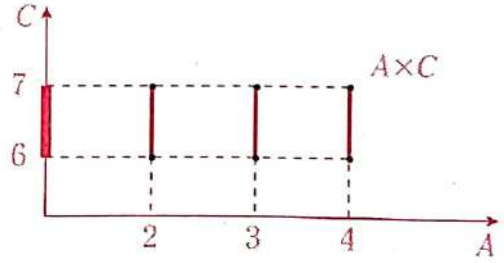


Sean los conjuntos

$A = \{2; 3; 4\}$

$C = [6; 7]$

El diagrama cartesiano de $A \times C$ es

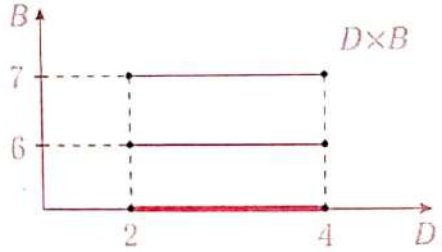


Sean los conjuntos

$D = [2; 4]$

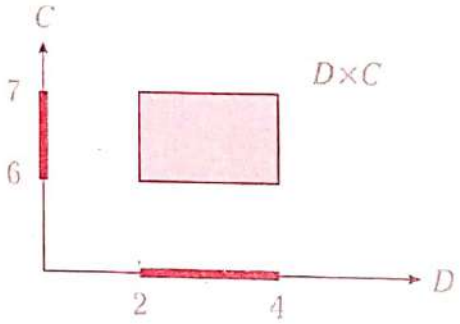
$B = \{6; 7\}$

El diagrama cartesiano de $D \times B$ es



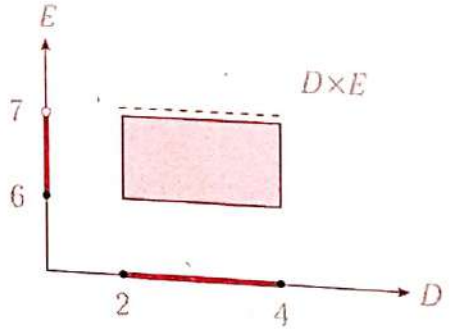
Sean los conjuntos
$D=[2; 4]$
$C=[6; 7]$

El diagrama cartesiano de $D \times C$ es



Sean los conjuntos
$D=[2; 4]$
$E=[6; 7\rangle$

El diagrama cartesiano de $D \times E$ es



Entonces la gráfica de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ es el plano cartesiano y normalmente se denota como $\mathbb{R}^2$ o $\mathbb{R}2$.

Observación

- $A \times B = B \times A \leftrightarrow A = B$
- $A \times B \neq B \times A \leftrightarrow A \neq B$
- Si A y B son conjuntos finitos, entonces
  $n(A \times B) = n(B \times A) = n(A) \times n(B)$

Nota

Se denomina **relación** a todo subconjunto no vacío de un producto cartesiano.

Ejemplo

Sean los conjuntos

$A=\{2; 3; 4\}$

$B=\{6; 7\}$

donde

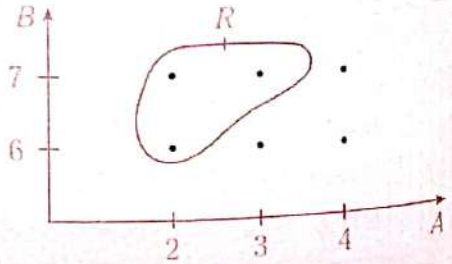
$A \times B=\{(2; 6), (2; 7), (3; 6), (3; 7), (4; 6), (4; 7)\}$

Se puede escoger R

$$R=\{(2; 6), (2; 7), (3; 7)\}$$

Se observa que R es subconjunto de $A \times B$, entonces R es una relación de A en B.

Gráficamente,



Aplicación 16

A una fiesta asisten 82 personas, de las cuales la cantidad de mujeres excede a la cantidad de varones en 6. Si en determinado momento 10 varones no bailan, ¿cuántas mujeres no bailan?

Resolución

Sea a la cantidad de varones y b la cantidad de mujeres, entonces

- $a+b=82$ (I)
- $b-a=6$ (II)

Sumamos I y II.

$2b=88$

$b=44$

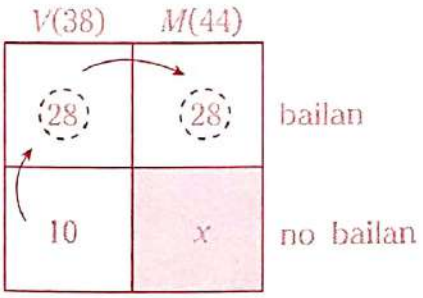
Reemplazamos el valor de b en (I).

$a+(44)=82$

$a=38$

> **Recuerde**
> Si en un problema se menciona que hay personas bailando, entonces el número de varones que bailan y el número de mujeres que bailan son iguales.

Graficamos.



$\rightarrow \quad x+28=44$

$\therefore \quad x=16$

Aplicación 17

Se tiene los conjuntos

$A=\{4; 6; 8\}$

$B=\{3; 5; 7; 11; 13\}$

Sea el conjunto $C=\{(x; y) \in B\times A / x > y\}$. Calcule $n(C)$.

Resolución

Evaluando el conjunto C se tiene que

$$C=\{(5; 4), (7; 4), (7; 6), (11; 4), (11; 6), (11; 8), (13; 4), (13; 6), (13; 8)\}$$

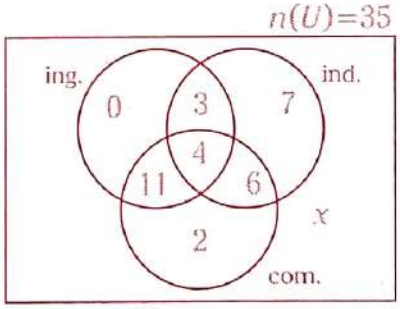
$\therefore \quad n(C)=9$

Aplicación 18

De 35 personas, 10 son ingenieros o industriales, pero no comerciantes; 15 son industriales o comerciantes, pero no ingenieros; 11 son ingenieros y comerciantes, pero no industriales; 4 son ingenieros, comerciantes e industriales; 2 son solo comerciantes; y 3 son ingenieros e industriales, pero no comerciantes. Si no hay ninguno que solo sea ingeniero, ¿cuántos no desempeñan ninguna de las tres ocupaciones?

Resolución

Dado que hay elementos comunes entre los conjuntos de ingenieros, industriales y comerciantes, se prefiere usar el diagrama de Venn-Euler.



Nos piden x.

$x=35-(3+4+11+7+6+2)$

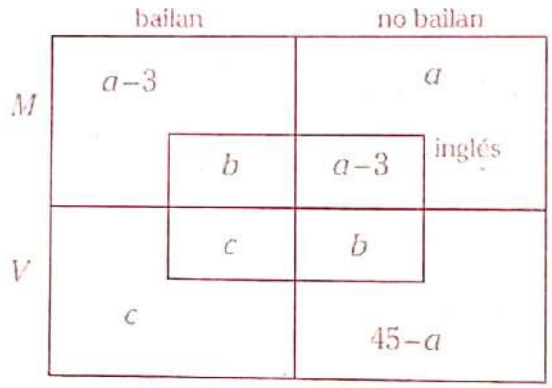
$\therefore \quad x=2$

Aplicación 19

En una reunión social se observa que hay tantos varones que bailan, pero no estudian inglés, como mujeres que ni bailan ni estudian inglés, siendo esta cantidad tres unidades mayor que la cantidad de mujeres que no estudian inglés pero sí bailan, y que coincide con la cantidad de mujeres que no bailan pero sí estudian inglés. Además, 45 varones no estudian inglés, 37 mujeres tampoco estudian dicho idioma y 53 varones estudian inglés o bailan. ¿Cuántas personas asistieron si se sabe que en los que estudian inglés hay tantas mujeres que bailan como varones que no bailan?

Resolución

Dado que el conjunto de las mujeres y el conjunto de los varones no tienen elementos en común, de igual manera que el conjunto de los que bailan y el conjunto de los que no bailan, preferimos usar el diagrama de Lewis-Carroll.



Se sabe que

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{mujeres que bailan}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{varones que bailan}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow\ a-3+b=c+a$

$c=b-3$

Además,

- $(a-3)+a=37\ \rightarrow\ a=20$
- $(b-3)+b+a=53\ \rightarrow\ b=18$

Nos piden la cantidad de personas.

$\therefore\ 45+17+20+17+18+15+18=150$

Aplicación 20

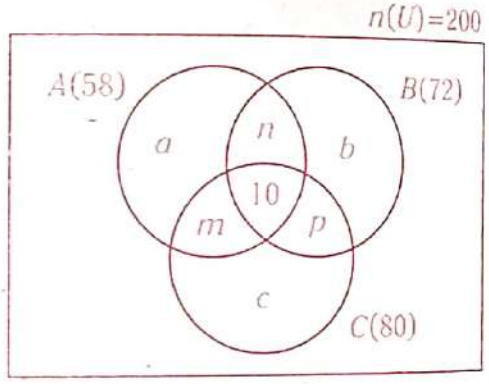
En un departamento de control de calidad de un producto se consideran tres defectos (A, B y C) como los más importantes. Se analizan 200 productos con el siguiente resultado:

- El defecto A lo presentan 58 productos.
- El defecto B lo presentan 72 productos.
- El defecto C lo presentan 80 productos.
- Solo 100 productos poseen exactamente un defecto.
- Únicamente 10 productos presentan exactamente tres defectos.

¿Cuántos productos tienen solo dos defectos?

Resolución

Graficamos.



De los datos obtenemos que

- $a+m+n+10=58$
- $b+n+p+10=72$
- $c+m+p+10=80$

Sumamos.

$$100+2(m+n+p)+30=210$$

$\therefore\ m+n+p=40$

11 ▸ LEYES DEL ÁLGEBRA DE CONJUNTOS

11.1. PARA UN CONJUNTO

Ley involutiva

$$(A^C)^C=A$$

Ley de la idempotencia

- $A\cup A=A$
- $A\cap A=A$

11.2. PARA DOS CONJUNTOS

Ley conmutativa

- $A\cup B=B\cup A$
- $A\cap B=B\cap A$
- $A\,\Delta\,B=B\,\Delta\,A$

Ley de De Morgan

- $(A\cup B)^C=A^C\cap B^C$
- $(A\cap B)^C=A^C\cup B^C$

Ley de la diferencia

- $A-B=A\cap B^C$
- $A-B=B^C-A^C$

Ley de la diferencia simétrica

- $A\,\Delta\,B=(A-B)\cup(B-A)$
- $A\,\Delta\,B=(A\cup B)-(A\cap B)$
- $(A\,\Delta\,B)^C=A^C\,\Delta\,B=A\,\Delta\,B^C$
- $(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,B^C=A^C$
- $(A\,\Delta\,B^C)\,\Delta\,B=A^C$

11.3. PARA TRES CONJUNTOS

Ley asociativa

- $(A\cup B)\cup C=A\cup(B\cup C)$
- $(A\cap B)\cap C=A\cap(B\cap C)$
- $(A\,\Delta\,B)\,\Delta\,C=A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)$

Ley distributiva

- $A\cup(B\cap C)=(A\cup B)\cap(A\cup C)$
- $A\cap(B\cup C)=(A\cap B)\cup(A\cap C)$

Ley de absorción

- $A\cup(A\cap B)=A$
- $A\cap(A\cup B)=A$
- $A\cup(A^C\cap B)=A\cup B$
- $A\cap(A^C\cup B)=A\cap B$

Leyes adicionales

- $A\cup U=U$
- $A\cup A^C=U$
- $A\cup\varnothing=A$
- $A\cap U=A$
- $A\cap A^C=\varnothing$
- $A\cap\varnothing=\varnothing$
- $U^C=\varnothing$
- $\varnothing^C=U$

Aplicación 21

Dados los conjuntos A, B y C en U, simplifique la siguiente expresión:

$$\left[A\,\Delta\,(B\Delta C)\right]\Delta\left[C\,\Delta\,B^C\right]$$

Resolución

Sea

$$H=\left[A\,\Delta\,(B\,\Delta\,C)\right]\Delta\left[C\,\Delta\,B^C\right]$$

Por la ley asociativa,

$$H=A\,\Delta\left[(B\,\Delta\,B^C)\Delta(C\,\Delta\,C)\right]$$

Luego,

$$H=A\,\Delta\left[(U)\,\Delta\,(\varnothing)\right]$$

$$H=A\,\Delta\,U$$

$$\therefore\quad H=A^C$$

Otra forma

$$H=\left[A\,\Delta\,\underbrace{(B\,\Delta\,C)}_{R}\right]\Delta\left[\underbrace{C\,\Delta\,B^C}_{R^C}\right]$$

Por la ley de la diferencia simétrica,

$$\therefore\quad H=A^C$$

Aplicación 22

Utilizando las leyes del álgebra de conjuntos, simplifique

$$[B\cup(A-B)]-[(B\cup A)^C-(A\cap C)]$$

Resolución

Se tiene

$$[B\cup\underbrace{(A-B))}_{\text{ley de la diferencia}}]-[\underbrace{(B\cup A)^C-(A\cap C)}\,]$$

$$\underbrace{[B\cup(A\cap B^C)]}_{\text{ley de absorción}}-[\underbrace{(B\cup A)^C}_{\text{ley de De Morgan}}\cap\underbrace{(A\cap C)^C}_{\text{ley de De Morgan}}]$$

$$[B\cup A]-[B^C\cap\underbrace{A^C\cap(A^C\cup C^C)}_{\text{ley de absorción}}]$$

$$\underbrace{[B \cup A]-[B^C \cap A^C]}_{\text{ley de la diferencia}}$$

$$[B \cup A] \cap \underbrace{[B^C \cap A^C]^C}_{\text{ley de De Morgan}}$$

$$\underbrace{[B \cup A] \cap [B \cup A]}_{\text{ley de la idempotencia}}$$

$\therefore\ A \cup B$

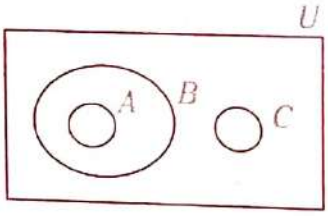
Aplicación 23

Si $A \subset B$ y $B \cap C=\varnothing$, indique lo que se obtendrá al simplificar

$E=\{[(A \cap B)^C-B] \cap C\} \cup (C-A) \cup (A-B)$

Resolución

Dado que A está incluido con B, y además B y C son disjuntos, se tiene el siguiente diagrama de Venn-Euler:



Luego,

$$E=\{\underbrace{[(A \cap B)^C-B]}_{H} \cap C\} \cup \underbrace{(C-A)}_{C} \cup \underbrace{(A-B)}_{\varnothing}$$

$E=\{H \cap C\} \cup C$ (ley de absorción)

$\therefore\ E=C$

Aplicación 24

Sean los conjuntos

$A=\{a \in \mathbb{Z}/a^5+4a=5a^3\}$

$B=\{a \in A/b \in \mathbb{Z} \wedge a=b^2\}$

Calcule $n[P(A-B)]$.

Resolución

Para A

$A=\{a \in \mathbb{Z}/a^5+4a=5a^3\}$

$a^5-5a^3+4a=0$

$a(a^4-5a^2+4)=0$

$$\begin{array}{ccc} a^2 & \times & -4 \\ a^2 & & -1 \end{array}$$

$a(a^2-4)(a^2-1)=0$

$a(a+2)(a-2)(a+1)(a-1)=0$

$\rightarrow\ A=\{0; -2; 2; -1; 1\}$

Para B

$B=\{a \in A/b \in \mathbb{Z} \wedge a=b^2\}$

$B=\{0; 1\}$

Luego,

$A-B=\{-2; 2; -1\}$

$n(A-B)=3$

$\therefore\ n[P(A-B)]=2^3=8$

Aplicación 25

Sea $n(A)=3x+1$; $n(B)=x+3$; $(x>1)$

I. ¿Cuál es el máximo valor de $n(A \cup B)$?

II. ¿Cuál es el mínimo valor de $n(A \cup B)$?

III. ¿Cuál es el máximo valor de $n(A \cap B)$?

Dé como respuesta la suma de los tres valores obtenidos.

Resolución

I. Nos piden el máximo valor de $n(A \cup B)$. El número de elementos de la unión se calcula como

$$n(A \cup B)=n(A)+n(B)-n(A \cap B)$$

Para que $n(A \cup B)$ sea máximo, entonces $n(A \cap B)$ debe ser cero, es decir, A y B deben ser disjuntos.

Luego,

$$n(A\cup B)_{\text{máx}}=n(A)+n(B)$$

$$n(A\cup B)_{\text{máx}}=3x+1+x+3$$

$$\therefore\ n(A\cup B)_{\text{máx}}=4x+4$$

II. Nos piden el mínimo valor de $n(A\cup B)$.

Dado que

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Para que $n(A\cup B)$ sea mínimo, entonces $n(A\cup B)$ debe ser máximo, y eso ocurre cuando uno de los dos conjuntos está incluido en el otro.

Ahora, ¿cuál será el conjunto que esté incluido? El que tenga menos elementos.

Del dato,

$$x>1 \quad \times 2$$

$$2x>2 \quad +x$$

$$3x>x+2 \quad +1$$

$$3x+1>x+3$$

$$n(A)>n(B)$$

$$\rightarrow\ n(A\cap B)_{\text{máx}}=n(B)$$

$$\therefore\ n(A\cup B)_{\text{mín}}=n(A)=3x+1$$

III. Nos piden el máximo valor de $n(A\cap B)$.

El máximo valor de la intersección ocurre cuando uno de los conjuntos está incluido en el otro.

$$\therefore\ n(A\cap B)_{\text{máx}}=n(B)=x+3$$

Finalmente, nos piden la suma de valores obtenidos.

$$\therefore\ (4x+4)+(3x+1)+(x+3)=8x+8$$

Aplicación 26

Se tienen dos conjuntos donde uno está incluido en el otro. Si la diferencia de los cardinales de sus conjuntos potencia es 112, indique el número de elementos que posee el conjunto que incluye al otro.

Resolución

Sean A y B dos conjuntos, tal que $A\subset B$.

$$\rightarrow\ 2^{n(A)}-2^{n(B)}=112$$

Nota

Si se tiene la expresión

$$A=2^{x+y}-2^{x}$$

Factorizando se obtiene

$$A=2^{x}(2^{y}-1)$$

Es decir, el factor 2^x de A es el sustraendo de $2^{x+y}-2^x$.

Ejemplos

- $3^5-3^3=3^3(3^2-1)=3^3\times 8$
- $2^7-2^5=2^5(2^2-1)=2^5\times 3$
- $11^4-11^2=11^2(11^2-1)=11^2\times 120$

Luego, dado que $112=7\times 2^4$

$$\rightarrow\ 2^{n(A)}-2^{n(B)}=7\times 2^4$$

$$n(B)=4$$

Finalmente,

$$2^{n(A)}=8\times 2^4=2^7$$

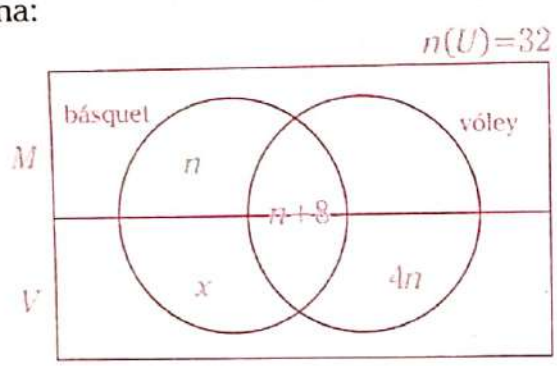
$$\therefore\ n(A)=7$$

Aplicación 27

De 32 personas que practican básquet o vóley, se sabe que el número de mujeres que practican solo básquet es menor en 8 que el número de personas que practican ambos deportes y es la cuarta parte del número de varones que practican solo vóley. Calcule la máxima cantidad de personas que practican solo básquet.

Resolución

A partir de los datos, tenemos el siguiente diagrama:



Para que $(n+x)$ sea máximo, asumimos que

$$6n+8+x=32$$

$$6n+x=24$$

$$x=24-6n$$

18	1
12	2
6	3

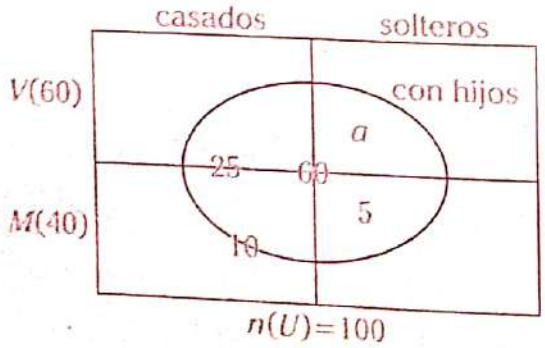
$\therefore\ (n+x)_{máx}=19$

Aplicación 28

En una reunión donde hay 100 personas, se sabe de ellas que 40 no tienen hijos, 60 son varones, 10 mujeres están casadas, 25 personas casadas tienen hijos y hay 5 madres solteras. ¿Cuántos varones son padres solteros?

Resolución

A partir de los datos, tenemos el siguiente diagrama:



En el conjunto de personas que tienen hijos

$$25+a+5=60$$

$$a=30$$

Por lo tanto, hay 30 varones que son padres solteros.

Aplicación 29

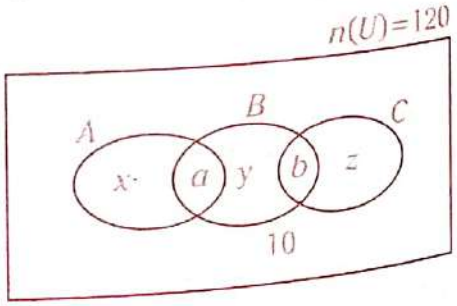
Se le preguntó a 120 personas sobre su preferencia por 3 clases de bebidas, *A*, *B* y *C*, y se tuvo la siguiente información:

- 30 personas prefieren 2 de las 3 bebidas.
- Ninguna de las personas que les gusta la bebida *A* prefiere la bebida *C*.
- 10 personas no prefieren ninguna de las bebidas.

¿A cuántas personas les gusta solo una de las bebidas?

Resolución

Dado que a ninguna persona que le gusta la bebida *A* prefiere la bebida *C*, entonces *A* y *C* son disjuntos.



Por dato, se sabe que

$$a+b=30$$

Nos piden $x+y+z$.

Luego,

$$a+b+x+y+z+10=120$$

$$\therefore\ x+y+z=80$$

Acerca de la historia de la teoría de conjuntos

El concepto de infinito fue tratado por Zenón de Elea y sus célebres paradojas; Bolzano defendió el concepto de conjunto infinito y pudo dar ejemplos de cómo los elementos de un conjunto infinito se colocaban en correspondencia uno a uno con elementos de sus propios subconjuntos. Cantor publicó varios artículos entre 1867 y 1871 sobre teoría de números, de gran calidad. No obstante, nada indicaba que su autor cambiaría el curso de la matemática.

Al empezar Cantor a trabajar con series trigonométricas, aparecen las primeras ideas sobre teoría de conjuntos. En 1874, publicó un artículo en la revista *Crelle* que marca el nacimiento de la teoría de conjuntos. En este artículo, Cantor consideraba dos clases diferentes de infinitos –hasta entonces se creía que todos los infinitos compartían el mismo tamaño–: los que se podían poner en correspondencia uno a uno con los números naturales (los que se podían numerar) y los que no.

Cantor demostró que los números reales algebraicos podían corresponderse uno a uno con los números naturales, pero que esto no ocurría con los números reales (que incluyen, además de los reales algebraicos, los transcendentes).

En 1878, Cantor envió otro artículo a la revista *Crelle*, pero la formalización de la teoría de conjuntos era una materia muy discutida, especialmente por Kronecker, quien pertenecía al equipo editor de la revista. Intentaron que Cantor retirase el artículo, mas Dedekind convenció de lo contrario a Cantor, y Weierstrass respaldó la publicación.

En 1897, se publica la primera paradoja de la teoría de conjuntos (el ordinal del conjunto de todos los ordinales debe ser un ordinal y esto es una contradicción) y dos años después, Cantor descubre otra más: ¿cuál es el cardinal del conjunto de todos los conjuntos? La última paradoja fue encontrada por Russell Zermelo en 1902 (Si $A=\{x/x$ no es miembro de $x\}$, ¿A es elemento de A?).

La paradoja de Russell minaba el edificio de las matemáticas, Russell y Whitehead intentaron fundamentar las matemáticas en la lógica, en *Principia Mathematica*.

A pesar de las paradojas, la teoría de conjuntos empezó a influir en otras áreas de la matemática. Lebesgue la utilizó en su integral.

El primer intento de axiomatizar la teoría de conjuntos lo hizo Zermelo en 1908. Después lo intentaron Fraenkel, Von Newman, Bernays y Gödel mostró las limitaciones de cualquier teoría axiomática.

Adaptado de <http://www.divulcat.com>.

Problemas resueltos

Problema 1

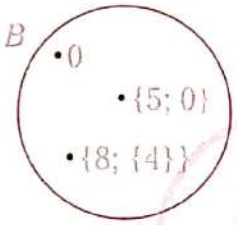
Sea $B=\{0, \{5; 0\}, \{8; \{4\}\}\}$. Determine la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. $0 \in B$ III. $8 \in B$

II. $\{5; 0\} \in B$ IV. $\{4\} \in B$

Resolución

Realizamos un diagrama de Venn-Euler.



A partir del cual, observamos que

I. $0 \in B$ (V)

II. $\{5; 0\} \in B$ (V)

III. $8 \in B$ (F)

IV. $\{4\} \in B$ (F)

Problema 2

Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in \mathbb{N}/3x=4$

II. $\exists x \in A/x+3 > 5;\ A=\{1; 2; 3; 4\}$

Resolución

I. Falso

x tendría que ser 4/3, pero $4/3 \notin \mathbb{N}$.

II. Verdadero

Basta que cumpla para un x, por ejemplo, para $x=4$

$4+3>5$

$7>5$

Problema 3

Niegue las siguientes proposiciones:

I. $\forall n \in \mathbb{Z}^+: 2n$ es par

II. $\exists x \in A/2x+1 < 5;\ A=\{2; 3; 4; 5\}$

Resolución

I. $\sim(\forall n \in \mathbb{Z}^+: 2n$ es par)

$\exists n \in \mathbb{Z}^+/\ 2n$ es impar)

II. $\sim(\exists x \in A/2x+1 < 5)$

$\forall x \in A: 2x+1 \geq 5$

Problema 4

Coloque verdadero (V) o falso (F) con relació al conjunto $A=\{a, \{b; c\}, d\}$.

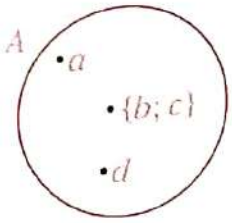
I. $\{b; c\} \subset A$ IV. $c \in A$

II. $\{b; c\} \in A$ V. $\{c\} \in A$

III. $\{\{b; c\}\} \subset A$ VI. $\{c\} \subset A$

Resolución

Realizamos un diagrama de Venn-Euler.



I. $\{b; c\} \subset A$ (F) porque $b \notin A$

II. $\{b; c\} \in A$ (V)

III. $\{\{b; c\}\} \subset A$ (V) porque $\{b; c\} \in A$

IV. $c \in A$ (F)

V. $\{c\} \in A$ (F)

VI. $\{c\} \subset A$ (F) porque $c \notin A$

Problema 5

Si $A=\{3, \{2; 8\}, 5\}$, indique el valor veritativo de las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in P(A) / \{3\} \subset x$

II. $\exists x \in P(A) / \{2; 8\} \in x$

Resolución

I. Verdadero

En $P(A)$, se tiene como elemento a $\{3\}$; si $x=\{3\}$

Luego, $\{3\} \subset \{3\}$.

II. Verdadero

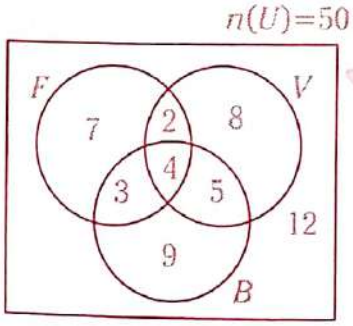
Cuando $x=\{\{2; 8\}\}$,

$\{\{2; 8\}\} \in P(A)$

$\therefore \{2; 8\} \in \{\{2; 8\}\}$

Problema 6

En el siguiente diagrama, se observa las cantidades de deportistas que practican fútbol (F), básquet (B) o vóley (V). En total son 50.



Halle cuántos practican

I. fútbol

II. fútbol y vóley

III. fútbol, vóley y básquet

IV. vóley pero no fútbol

V. solo básquet

VI. solo fútbol y básquet

VII. fútbol o vóley

Halle también cuántos no practican

VIII. fútbol

IX. vóley o básquet

X. ninguno de los tres deportes

Dé como respuesta la diferencia entre el mayor resultado y el menor resultado.

Resolución

A partir del diagrama se observa lo siguiente:

I. $7+3+2+4=16$

II. $2+4=6$

III. 4

IV. $8+5=13$

V. 9

VI. 3

VII. $7+3+2+4+8+5=29$

VIII. $8+5+9+12=34$

IX. $7+12=19$

X. 12

Nos piden la diferencia entre el mayor resultado y el menor resultado.

$\therefore 34-3=31$

Problema 7

Dados los conjuntos

$L=\{\text{limeños}\}$ $B=\{\text{bonaerenses}\}$

$P=\{\text{peruanos}\}$ $S=\{\text{sudamericanos}\}$

$A=\{\text{argentinos}\}$

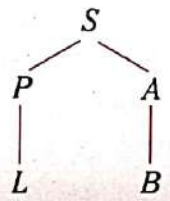
represéntelos mediante los diagramas lineales.

Resolución

A partir de los conjuntos dados:

- Todo limeño es peruano: $L \subset P$
- Todo bonaerense es argentino: $B \subset A$
- Los peruanos y argentinos son sudamericanos: $P \subset S \wedge A \subset S$

Por lo tanto, se tiene que



Problema 8

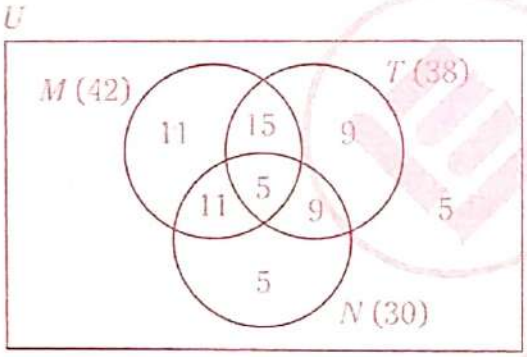
Una empresa de transporte urbano dispone de cierto número de combis, de las cuales 5 están en reparación; además, se sabe lo siguiente:

- En las mañanas circulan 42.
- En las tardes circulan 38.
- En las noches circulan 30.
- En las mañanas y en las tardes circulan 20.
- En las tardes y en las noches circulan 14.
- En las mañanas y en las noches circulan 16.

Determine cuántas combis son en total si se conoce que son 5 las que trabajan todo el día.

Resolución

Realizamos un diagrama de Venn-Euler.



Luego,

$n(U)=42+9+9+5+5$

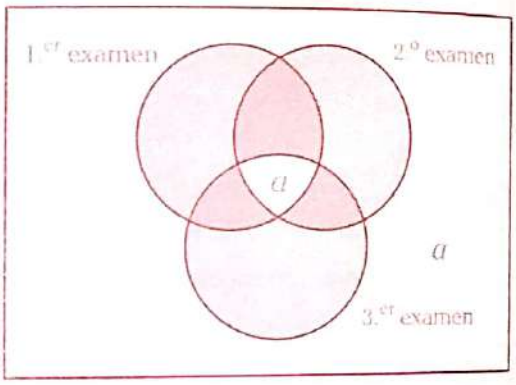
$\therefore\ n(U)=70$

Problema 9

Un total de 90 alumnos dieron tres exámenes para aprobar un curso. Se sabe que los que aprobaron solo un examen representan el quíntuplo de los que aprobaron los tres exámenes, y los que aprobaron solo dos exámenes resultan el triple de los que desaprobaron los tres exámenes. Si el número de los que desaprobaron los tres exámenes es igual al número de los que aprobaron los tres exámenes, ¿cuántos aprobaron el curso? Considere que para aprobar el curso es necesario que aprueben por lo menos dos exámenes.

Resolución

Graficamos convenientemente.



donde

Aprobaron solo un examen ($5a$)

Aprobaron solo dos exámenes ($3a$)

Del dato sabemos que en total son 90.

$\rightarrow\ 3a+a+a+5a=90$

$10a=90\ \rightarrow\ a=9$

Por lo tanto, aprobaron el curso (por lo menos dos exámenes aprobados)

$3a+a=4a=4(9)=36$ alumnos

Problema 10

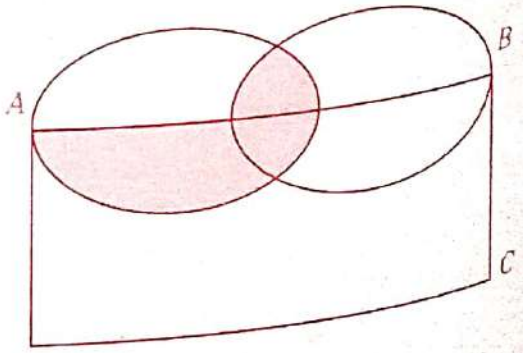
De los conjuntos

$A=\{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$B=\{2; 4; 6; 7; 8\}$

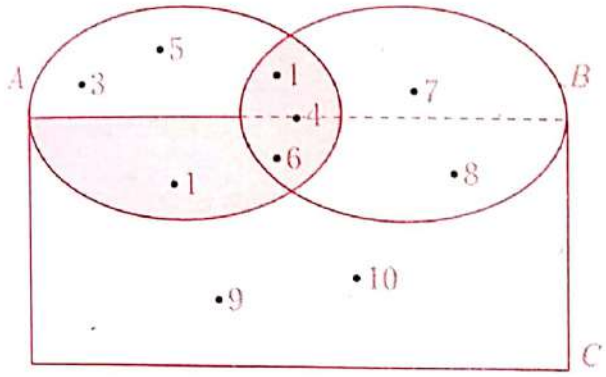
se obtiene que $C-B=\{1; 9; 10\}$.

Halle el cardinal de la región sombreada.



Resolución

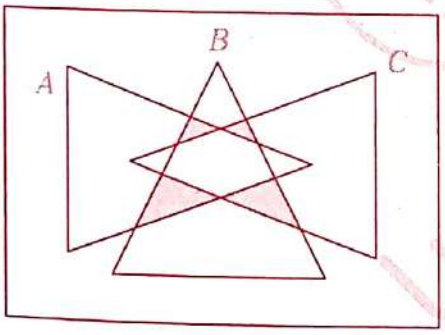
Ubicamos los elementos en el gráfico.



Por lo tanto, en la región sombreada hay cuatro elementos.

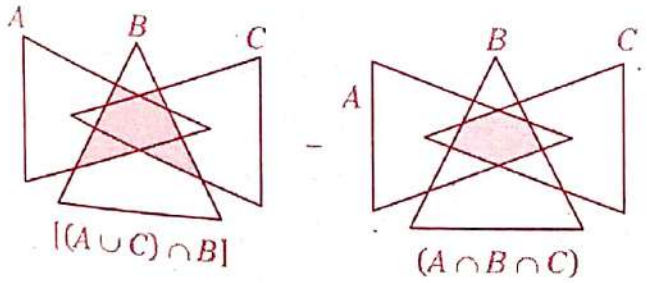
Problema 11

Represente el siguiente gráfico:



Resolución

La parte sombreada del diagrama se puede representar como



$\therefore\ [(A \cup C) \cap B] - (A \cap B \cap C)]$

Problema 12

Halle el valor veritativo de las siguientes proposiciones:

I. $(A \cap B) - C = (A - C) \cap B$

II. $(A \cap B) - C = (B - C) \cap A$

III. $A - (A \cup B) = \varnothing$

Resolución

I. Verdadero

$$\underbrace{(A \cap B) - C}_{A \cap B \cap C^C} = \underbrace{(A - C) \cap B}_{A \cap C^C \cap B} \quad \text{(ley de la diferencia)}$$

II. Verdadero

$$\underbrace{(A \cap B) - C}_{A \cap B \cap C^C} = \underbrace{(B - C) \cap A}_{B \cap C^C \cap A} \quad \text{(ley de la diferencia)}$$

III. Verdadero

Dado que $A \subset (A \cup B)$,

$A - (A \cup B) = \varnothing$

Problema 13

Dados los conjuntos

$A = \{x / x^x < 500;\ x \in \mathbb{Z}^+\}$

$B = \{x \notin A / x^2 < 100;\ x \in \mathbb{Z}^+\}$

calcule $n(A) + n(B)$.

Resolución

Hallemos el cardinal de cada conjunto.

- $A = \{x / x^x < 500;\ x \in \mathbb{Z}^+\}$

  $\hookrightarrow 1^1; 2^2; 3^3; 4^4$

  $A = \{1; 2; 3; 4\} \rightarrow n(A) = 4$

- $B = \{\underbrace{x \notin A}_{x \neq 1;\ 2;\ 3;\ 4} / \underbrace{x^2 < 100;\ x \in \mathbb{Z}^+}_{x:\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9}\}$

  $B = \{5; 6; 7; 8; 9\} \rightarrow n(B) = 5$

$\therefore\ n(A) + n(B) = 9$

Problema 14

Si $A=\{1; 2; 3; 4; 5\}$, señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. $\exists x \in A / x+3 \leq 10$

II. $\forall x \in A, \exists y \in A / x+y \leq 7$

III. $\forall x \in A; x+3 < 8$

IV. $\exists! x \in A / x+3 > 6$

Resolución

I. Verdadero
Se verifica, por ejemplo, para $x=2$.

II. Verdadero
Cuando $y=1$, se verifica para todos los valores de x.

III. Falso
Para $x=5$ no se cumple.

IV. Falso
La proposición dice que solo hay un elemento de A que verifica; sin embargo, hay 3 valores que verifican: 3; 4 y 5.

Problema 15

Dados los conjuntos A, B, C y D, tales que

- $n[(B \cup C)-D] \leq 0$
- $n[A \times (B \cup C \cup D)]=70$
- $5 \times n(B \cup C)=n(D)$

calcule $n[A \times (B \cup C)]$.

Resolución

Como el cardinal no puede ser negativo,

$\rightarrow n[B \cup C]-D=0$

Esto quiere decir que

- $(B \cup C) \subset D$
- $B \cup C \cup D = D$

Luego,

$$n[A \times \underbrace{(B \cup C \cup D)}_{D}]=70$$

Entonces

$$n(A) \times n(D)=70 \qquad \text{(I)}$$

Además,

$$5 \times n(B \cup C)=n(D) \qquad \text{(II)}$$

Multiplicamos (I) y (II).

$$n(A) \times \cancel{n(D)} \times \cancel{5} \times n(B \cup C)=\cancel{70} \times \cancel{n(D)}$$

$$n(A) \times n(B \cup C)=14$$

$$\therefore \; n[A \times (B \cup C)]=14$$

Problema 16

Sean los conjuntos no comparables A y B, t que el conjunto A posee 120 subconjunto con no menos de dos elementos, y el conju to B tiene 255 subconjuntos propios; ademá $n[P(A \cap B)^C]=16$. Si $n[(A \cup B)^C]=1$, ¿cuánto subconjuntos con más de un elemento tien el siguiente conjunto?

$Q=P[(A \times B) \cap (B \times A)]$

Resolución

Se tiene que

$$\underbrace{2^{n(A)}}_{\text{n.º de subconjuntos}} = \underbrace{1}_{\text{n.º de subconjuntos sin elementos}} + \underbrace{n(A)}_{\text{n.º de subconjuntos unitarios}} + \underbrace{120}_{\text{n.º de subconjuntos con no menos de dos elementos}}$$

$\rightarrow n(A)=7$

Además,

$$2^{n(B)}=1+255$$

$\rightarrow n(B)=8$

Luego, se sabe que

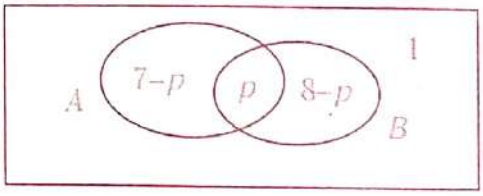
- $n\left[P(A\cap B)^C\right]=16$

  $2^{n\left[(A\cap B)^C\right]}=16=2^4$

  $\rightarrow\ n(A\cap B)^C=4 \qquad (\alpha)$

- $n\left[(A\cup B)^C\right]=1$

Realizamos un diagrama de Venn-Euler.



A partir del diagrama, reemplazamos en α

$$7-p+8-p+1=4 \ \rightarrow\ p=6$$

Luego,

$$n\left[(A\times B)\cap(B\times A)\right]=6\times 6=36$$

Por lo tanto, el número de subconjuntos con más de un elemento es $2^{36}-36-1=2^{36}-37$.

Problema 17

A, B y C son tres conjuntos, tales que satisfacen las siguientes condiciones:

- A está contenido en B y B está contenido en C.
- Si x es un elemento de C, entonces x también es un elemento de A.

Señale el enunciado correcto.

A) B no está contenido en A.
B) C no está contenido en B.
C) $A=B$, pero $C\neq B$
D) $A\cap B=C$
E) La reunión de A con B tiene elementos que no pertenecen a C.

Resolución

Se sabe que

- $A\subset B\ \wedge\ B\subset C\ \rightarrow\ A\subset C$
- $(x\in C\ \rightarrow\ x\in A)\equiv C\subset A$

Dado que $A\subset C\wedge C\subset A$, entonces $A=C$, lo cual exige que

$$A=B=C$$

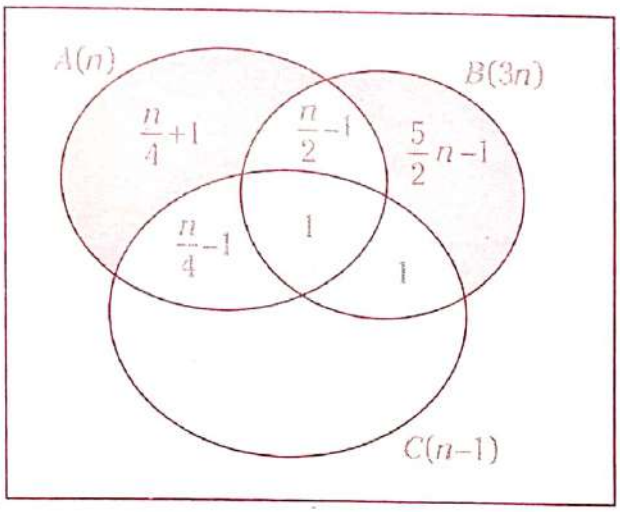
Por lo tanto, el enunciado correcto es $A\cap B=C$.

Problema 18

Dados tres conjuntos, A, B y C, con n, $3n$ y $(n-1)$ elementos, respectivamente. Si A y B tienen $n/2$ elementos comunes, A y C tienen $n/4$ elementos comunes, y B y C tienen 2 elementos comunes; además, hay un único elemento común a los tres, calcule $n[(A\,\Delta\,B)-C]$.

Resolución

Realizamos un diagrama de Venn-Euler, siendo la parte sombreada lo que nos piden.

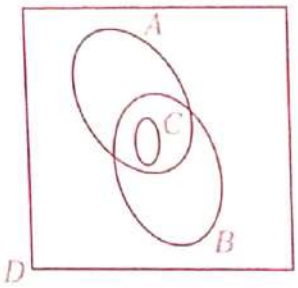


Por lo tanto,

$$\frac{n}{4}+1+\frac{5}{2}n-1=\frac{11}{4}n$$

Problema 19

De acuerdo con el diagrama siguiente, simplifique $(\overline{A \cup \overline{C}}) \cup ((\overline{A} \cap B) \cup B)$.



Resolución

Simplificamos.

$$\underbrace{(\overline{A \cup \overline{C}})}_{U} \cup \underbrace{((\overline{A} \cap B) \cup B)}_{B} \quad \text{(ley de absorción)}$$

$$U^C \cup B$$

$$\varnothing \cup B$$

$$B$$

Problema 20

Sean A y B dos conjuntos cualesquiera. Indique cuál de las siguientes expresiones es falsa.

A) $(A^C \cap B) \subset B$

B) $(A \cup B)^C \subset (A^C \cap B^C)$

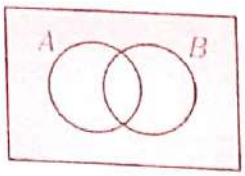
C) $(A \cap B)^C \subset A^C \cup B^C$

D) $(A \cap B) \cup (A \cap B^C) = A$

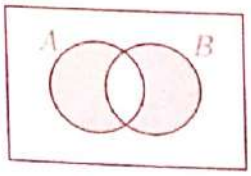
E) $(A \cap B)^C \subset [(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)]$

Resolución

Graficamos la alternativa E.



$(A \cap B)^C$



$(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)$

Por lo tanto, la expresión

$(A \cap B)^C \subset [(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B)]$ es falsa.

Además, las alternativas A, B, C y D son verdaderas.

Problema 21

Simplifique la siguiente expresión:

$$\{[C \cap (A \Delta B)] \cap (B' \cup A)'\} \cup [A - (B' \cup A \cup C')']'$$

Resolución

Simplificamos.

$$\{[C \cap (A \Delta B)] \cap \underbrace{(B' \cup A)'}_{B \cap A'}\} \cup [A - \underbrace{(B' \cup A \cup C')'}_{}]'$$

$$\{C \cap \underbrace{(A \Delta B) \cap (B - A)}_{B - A}\} \cup [\underbrace{A \cap (B' \cup A \cup C')}_{A}]'$$

$$\{C \cap B \cap A'\} \cup A' = A'$$

$$\therefore \; A^C$$

Problema 22

¿Cuántos de los conjuntos dados a continuación son vacíos?

I. $A = \{x \in \mathbb{R} / x = x; x \neq x\}$

II. $B = \{x \in \mathbb{N} / x^2 + 3x + 2 = 0\}$

III. $C = \{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 5\}$

IV. $D = \{x \in \mathbb{N} / x^2 - 1 = 0\}$

V. $E = \{x \in \mathbb{R} / x^2 = 4 \wedge 2x = 3\}$

VI. $F = \{x \in \mathbb{R} - \{0\} / -x = x^{-1}\}$

Resolución

I. $A = \{x \in \mathbb{R} / x = x; x \neq x\}$

Todo número real es igual a sí mismo; entonces la expresión $x \neq x$ no tiene valores reales que lo verifiquen.

$\therefore \; A = \varnothing$

II. $B=\{x \in \mathbb{N} / x^2+3x+2=0\}$

Si x es positivo, entonces

$$\begin{array}{r} x^2>0 \\ 3x>0 \\ 2>0 \\ \hline x^2+3x+2>0 \end{array} \quad (+)$$

$\rightarrow$ x^2+3x+2 es positivo

$\therefore$ $B=\varnothing$

III. $C=\{x \in \mathbb{R} / 3 < x < 5\}$

C es un conjunto infinito.

$\therefore$ $C=\langle 3; 5\rangle$

IV. $D=\{x \in \mathbb{N} / x^2-1=0\}$

Resolvemos la ecuación.

$x^2-1=0$

$(x+1)(x-1)=0$

Entonces x puede ser 1 o -1

Como $x \in \mathbb{N}$, entonces $x=1$.

$\therefore$ $D=\{1\}$

V. $E=\{x \in \mathbb{R} / x^2=4 \wedge 2x=3\}$

Resolvemos cada ecuación.

- $x^2=4 \rightarrow x=2 \vee x=-2$
- $2x=3 \rightarrow x=\frac{3}{2}$

No hay un valor que verifique ambas condiciones.

$\therefore$ $E=\varnothing$

VI. $F=\{x \in \mathbb{R}-\{0\} / -x=x^{-1}\}$

Resolvemos la ecuación.

$-x=\frac{1}{x}$

$0=\frac{1}{x}+x$

Si x es positivo, $\frac{1}{x}+x$ es positivo.

Si x es negativo; $\frac{1}{x}+x$ es negativo.

$\rightarrow$ $F=\varnothing$

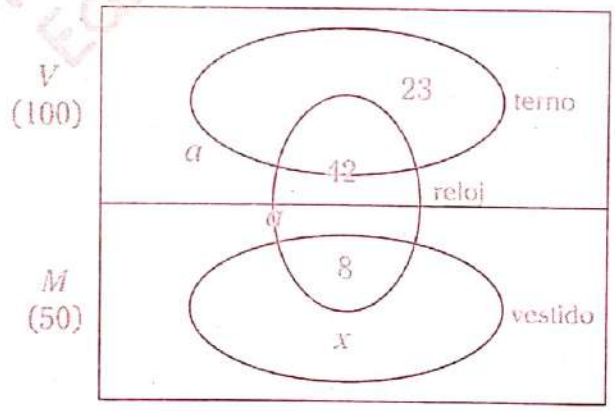
Por lo tanto, hay cuatro conjuntos vacíos.

Problema 23

A un matrimonio asistieron 150 personas. El número de varones es el doble del número de mujeres. De los varones, 23 no usan reloj pero sí tienen terno, y 42 usan reloj. De las mujeres, las que no usan vestido son tantas como los hombres que no usan terno ni reloj. Si 8 tienen vestido y reloj, ¿cuántas mujeres usan vestido pero no reloj?

Resolución

Realizamos un diagrama con los datos dados.



En los varones, se tiene que

$a+42+23=100$

$\rightarrow$ $a=35$

Nos piden

$x=50-(35+8)$

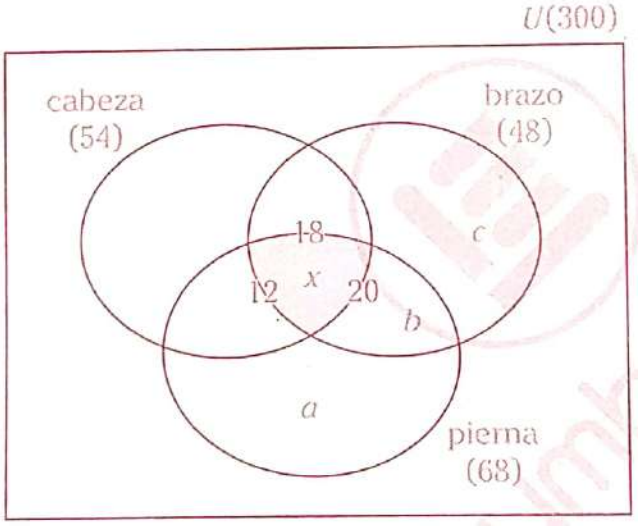
$\therefore$ $x=7$

Problema 24

En una batalla intervinieron 300 personas; 54 fueron heridos en la cabeza, 48 fueron heridos en el brazo, 18 fueron heridos en la cabeza y en el brazo, 20 fueron heridos en la pierna y en el brazo, y 12 fueron heridos en la cabeza y pierna. Si el 42% de los que intervienen en la batalla fueron heridos, averigüe cuántos fueron heridos en los 3 lugares, ya que 68 fueron heridos en la pierna.

Resolución

Realizamos un diagrama con los datos dados.



Sabemos que el total de heridos es

$$42\%300=\frac{42}{100}\times 300=126$$

Los heridos en la pierna son

$$12+a+b=68 \rightarrow a+b=56$$

En el total de heridos

$$54+a+b+c=126 \rightarrow c=16$$

En los heridos del brazo

$$18+b+c=48 \rightarrow b=14$$

En los heridos de brazo y pierna,

$$x+b=20$$

$$\therefore\ x=6$$

Problema 25

Halle el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si U: conjunto universal, entonces $\{[(A-B)\cap B]\cap[(A\cup B)\cap C]\}^C=U$

II. Si $A\subset B$, entonces $A-B=\phi$.

III. Si $n(A)=6$ y $n(B)=8$, el máximo valor de $n[P(A)\cup P(B)]$ es 320.

Resolución

I. Verdadero

$$\underbrace{\{\underbrace{[\underbrace{(A-B)}_{A\cap B^C}\cap B]}_{\varnothing}\cap[(A\cup B)\cap C]\}^C}_{\varnothing^C\equiv U}$$

II. Verdadero

Si $A\subset B$, entonces $A-B=\varnothing$

$A-B$ tiene como elementos a aquellos que pertenecen a A pero no a B, lo cual por dato no ocurre.

$\rightarrow A-B=\varnothing$

III. Falso

$n[P(A)\cup P(B)]$ es máximo si A y B son disjuntos.

Además, $P(A)$ y $P(B)$ tienen en común al conjunto vacío.

$$n[P(A)\cup P(B)]_{máx}=n[P(A)+n[P(B)]-n[P(A)\cap P(B)]$$

$$n[P(A)\cup P(B)]_{máx}=2^6+2^8-1$$

$$n[P(A)\cup P(B)]_{máx}=319$$

Test

1. Halle la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
   I. El conjunto $A=\{2; 3; 5; 7\}$ tiene 4 elementos.
   II. $3 \in A$, donde $A=\{2; 3; 5; 7\}$.
   III. $\{5\} \subset A$, donde $A=\{2; 3; 5; 7\}$.

   A) VVV B) VVF C) VFF
   D) FFF E) FFV

2. Sea el conjunto
   $B=\{2a-3/a \in \mathbb{N}; 4<a<9\}$
   Calcule $n(B)$.

   A) 2 B) 3 C) 4
   D) 6 E) 8

3. Sean los conjuntos iguales C y D.
   $C=\{a+3; 25\}$
   $D=\{3b-2; 18\}$
   Calcule $a+b$.

   A) 24 B) 31 C) 4
   D) 16 E) 21

4. Sea el conjunto
   $E=\{(3x+1) \in \mathbb{Z}/4<x<7\}$
   Calcule el número de subconjuntos de E.

   A) 8 B) 16 C) 256
   D) 64 E) 512

5. Halle la suma de elementos de F si
   $F=\{x^2+2/x \in \mathbb{Z}; -3 \leq x \leq 3\}$

   A) 18 B) 20 C) 22
   D) 19 E) 21

6. Halle $a+b$ si el conjunto G es unitario.
   $G=\{a+1; b+2; 10\}$

   A) 15 B) 17 C) 19
   D) 16 E) 18

7. Dados H y J, dos conjuntos contenidos en U; además, $n(H)=20$, $n(J)=30$, $n(H \cap J)=10$, $n(U)=45$. Halle $n(H \Delta J)+n(H \cup J)$.

   A) 75 B) 70 C) 59
   D) 86 E) 30

8. De un grupo de 180 atletas, 80 lanzan jabalina y 90 lanzan bala. Si 40 lanzan bala y jabalina, ¿cuántos no realizan ninguna de estas dos actividades?

   A) 40 B) 80 C) 45
   D) 50 E) 60

9. Son encuestadas 100 personas sobre si practican fútbol o básquet. Se sabe que 20 no practican estos dos deportes, 30 no practican fútbol y 60 no practican básquet. ¿Cuántos practican fútbol y básquet?

   A) 18 B) 21 C) 30
   D) 20 E) 24

10. En un grupo de 50 estudiantes, 24 no cursan Lenguaje y 28 no cursan Matemáticas. Si 14 estudiantes no cursan Matemáticas ni Lenguaje, ¿halle cuántos estudiantes cursan exactamente una de dichas materias?

    A) 14 B) 28 C) 24
    D) 30 E) 20

Claves

1 A 2 D 3 A 4 C 5 C 6 B 7 B 8 D 9 C 10 C

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Se tienen tres conjuntos, tales que

$A=\{a^2+b^2-5; -4a; 8\}$

$B=\{b-2c-3; a^2+4\}$

$C=\{a+b+c / A=B\}$

Además, $\{a; b; c\} \subset \mathbb{Z}$.

Calcule C si A y B son conjuntos unitarios.

A) $\{3; 12\}$
B) $\{-3; 12\}$
C) $\{3; -12\}$
D) $\{-3; -12\}$
E) $\{3; 8\}$

2. Los cardinales de los conjuntos A, B y C son números enteros consecutivos; además

$n[P(A)]+n[P(B)]+n[P(C)]=448$

Determine el valor de

$E=n(A)+n(B)+n(C)$

A) 21 B) 22 C) 20
D) 23 E) 24

3. Sean los conjuntos A, B y C contenidos en un conjunto universal (U). Si $n(U)=18$; además, A, B y C son tres conjuntos cuyos números cardinales están en progresión aritmética creciente, calcule la suma del máximo y mínimo valor de $n[P[(A \cap B) \cup C]']$. Considere que

$n[P(A)]+n[P(B)]+n[P(C)]=336$

A) 1064 B) 1040 C) 1096
D) 1088 E) 1032

4. Si Luis prepara diferentes clases de jugos con las frutas que tiene, puede obtener 31 jugos de diferentes sabores. Si Pedro puede obtener 120 jugos de diferentes sabores y en cada uno de ellos utiliza, por lo menos, 2 frutas diferentes, resulta que ambos (Pedro y Luis) pueden coincidir en preparar 6 jugos de 2 frutas diferentes. ¿Cuántas variedades de frutas tienen entre los dos?

A) 12 B) 10 C) 9
D) 6 E) 8

5. Sean A, B y C tres conjuntos contenidos en un universo finito de 60 elementos; además, se tiene que

- $n(B \Delta C)=40$
- $n(A \cap (B^C \cap C^C))=10$
- $n(A \cap B \cap C)=5$
- $B \cap C \cap A^C=\varnothing$

Calcule $n(A^C \cap B^C \cap C^C)$.

A) 10 B) 0 C) 5
D) 4 E) 3

6. En una encuesta a 198 estudiantes respecto a la profesión que van a seguir, se obtiene la siguiente información:

- Los que solo desean Sistemas son tantos como los que desean Medicina.
- Los que desean Sistemas y Medicina son la quinta parte de los que desean Sistemas o Medicina.
- Los que no desean Sistemas ni Medicina son la tercera parte de los que solo desean Medicina.

¿Cuántos desean solo Medicina?

A) 12 B) 18 C) 36
D) 42 E) 54

7. De los residentes de un barrio, se observa que 29 trabajan y 56 son mujeres, de las cuales 12 estudian. De los varones, 32 trabajan o estudian y 21 no trabajan ni estudian. Si 36 varones no trabajan y 3 mujeres estudian y trabajan, ¿cuántas mujeres no estudian ni trabajan?

A) 21 B) 28 C) 30
D) 35 E) 40

8. En los meses de enero y febrero del 2021, un joven asiste a la academia 48 días, visitó a su enamorada 31 días y tuvo que trabajar 24 días. ¿Cuántos días solo visitó a su enamorada si no hubo día en que se dedicara solo a dos actividades, tampoco hubo un día en que no realizara dichas actividades?

A) 9 B) 13 C) 17
D) 20 E) 24

9. De un grupo de 60 escolares, se observa que en sus tiempos libres hacen lo siguiente:
- A 10 de ellos les gusta la música, pero no ver televisión.
- A los que les gusta la música y ver televisión son la mitad de los que les gusta fútbol y televisión pero no música, y estos a su vez son 1/4 de los que les gusta ver televisión.
- Se sabe que a todos los que les gusta la música les gusta el fútbol.
- A 15 les gusta ver televisión y no fútbol.
- A todos les gusta la música, la televisión o el fútbol.

Halle la cantidad de personas que cumplen la siguiente condición: *No es cierto que, si les gusta el fútbol entonces les gusta la música.*

A) 32 B) 20 C) 30
D) 35 E) 40

10. De 150 personas que estudian alemán (A), inglés (I), francés (F) y ruso (R), ninguno que estudia F estudia R; 22 solo estudian A, 20 solo estudian I; 20 solo estudian F; 20 estudian A y R, pero no estudian I; 6 solo estudian F e I; 4 solo estudian A y F; 24 estudian R e I; 28 solo estudian R; y 1 solo estudia A e I. ¿Cuántas personas estudian A, I y F?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 10 E) 8

11. De un total de 100 personas, hay médicos, ingenieros y diseñadores, pero cada persona tiene una sola profesión.
- Seis son médicos que hablan español.
- Veinte que hablan inglés no son diseñadores.
- Cuatro son ingenieros que hablan español.
- Veinticuatro son diseñadores, pero no hablan español ni inglés.
- Cuarenta y uno no hablan español ni inglés.

Calcule cuántos son diseñadores que hablan español o inglés si todos hablan un solo idioma.

A) 36 B) 29 C) 27
D) 24 E) 31

12. En un grupo de 60 estudiantes, 26 hablan francés y 12 hablan solo francés, 30 hablan inglés y 8 hablan solo inglés, 28 hablan alemán y 10 hablan solo alemán, también se sabe que 4 hablan los tres idiomas. ¿Cuántos hablan inglés y alemán pero no francés si se sabe que 5 no hablan ninguno de estos idiomas?

A) 13 B) 12 C) 11
D) 10 E) 9

Nivel intermedio

13. Dados los conjuntos A, B y C

$\forall x \in C \rightarrow x \in A \wedge x \in B$

además

- $n(A-C)=a$
- $n(A \cup B)=c$
- $n(B-C)=b$
- $n(A \cap B)=d$

Halle $n(C)$ en función de a, b, c y d.

A) $\dfrac{a+b+c+d}{3}$

B) $\dfrac{a-b+c-d}{2}$

C) $\dfrac{a+b-c-d}{2}$

D) $\dfrac{c+d-a-b}{2}$

E) $\dfrac{a-b+c-d}{3}$

14. Se sabe que $a \in \mathbb{Z}$; $b \in \mathbb{Z}$, F y G son tales que $G \neq \varnothing$ y $F \cup G$ es un conjunto unitario.

$F=\{a^2+2b; b^2+1\}$

$F \cup G=\{a+4b; b+1-3a\}$

Halle $F \cap G$.

A) $\varnothing$ B) $\{0\}$ C) $\{10\}$
D) $\{1\}$ E) $\{-1\}$

15. Para los conjuntos A, B, C y D, se cumple lo siguiente:

- $C-A=\varnothing$
- $B \cap D=D$
- $n(C)=4$
- $n(A \cap (B \cup C \cup D)')=2$
- $n(P(A))=128$

Calcule $n[(A \cap B)-C-D]$.

Considere que A y D son disjuntos.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

16. Sean los conjuntos

$A = \{2^n / n \in \mathbb{Z}^+\}$

$B = \{n^2 / n \in \mathbb{Z}^+;\ n < 8\}$

¿Cuántos subconjuntos propios tiene $(B-A)$?

A) 3 B) 7 C) 63
D) 31 E) 15

17. Entre los asistentes a un circo se observó lo siguiente:

- En platea, cada niño varón fue con su mamá y cada niña fue con su papá, y por cada niño varón había dos niñas.
- Las niñas que ocupaban tribuna fueron con sus dos padres y cada una de ellas estaba con un hermanito varón.
- Solo asistieron 10 niños varones solos y estos estaban en tribuna.
- Los niños solos son 1/3 de las madres en tribuna y estas, a su vez, son la mitad del total de personas en platea.

Calcule el total de asistentes al circo si ningún adulto fue sin un niño o niña, así como ninguna niña fue sola.

A) 250 B) 120 C) 190
D) 270 E) 140

18. De un grupo de 70 ingresantes a la UNI, se observa que la cantidad de varones es cinco veces más que la de mujeres; 53 varones no son cachimbos de Ingeniería de Sistemas y las mujeres ingresantes, que no son de Ingeniería de Sistemas ni de Ingeniería Electrónica, son tantas como los cachimbos de Ingeniería de Sistemas. ¿Cuántas mujeres son cachimbas de Ingeniería Electrónica o de Ingeniería de Sistemas?

A) 4 B) 3 C) 6
D) 7 E) 8

19. En una reunión, a la que asistieron 90 deportistas, se observa que 40 practican fútbol; 39, básquet; 51, vóley; y 54, natación. Además, 15 practican fútbol, natación y básquet; 14, fútbol, básquet y vóley; 18 practican básquet, natación y vóley; 25 practican fútbol y vóley. Además, asistieron 9 personas que practicaban los cuatro deportes, 7 no practican ningún deporte y 2 practican solo natación. ¿Cuántos deportistas son los que si no practican básquet y no practican fútbol, entonces practican vóley?

A) 62 B) 55 C) 58
D) 66 E) 81

20. En cierta universidad, para ser alumno regular se requiere estar matriculado en por lo menos 2 cursos. En el presente ciclo, de un grupo de 120 alumnos, se sabe que 30 se matricularon en Física II, los 35 que se inscribieron en Álgebra Lineal también lo hicieron en Matemática III; 80 se matricularon en Estadística III o en Física II y 18 alumnos se inscribieron en Matemática III y Física II, o en Estadística III y Física II, pero no en los 3 cursos. Halle el máximo valor de la cantidad de alumnos no regulares si los que se inscriben en Física II o Estadística III no lo hicieron en Álgebra Lineal.

A) 45 B) 49 C) 67
D) 70 E) 82

21. Se tienen tres conjuntos finitos, A, B y C, para definir la operación $p*q \equiv p^C \Delta q$. Además,

- $n(U)=60$
- $n(A*B)=36$
- $n(A \cap B \cap C^C)=6$
- $n(C-(A \cup B))=12$
- $n(B * C)=30$
- $n((A \cup B)^C)=20$
- $n((B \cap C)-A)=4$

Halle $n(C^C * A^C)$.

A) 30 B) 24 C) 32
D) 18 E) 28

22. En una fiesta, se observa que la cantidad de varones menores de edad que están bailando es el doble de la cantidad de mujeres adultas que bailan y usan lentes y, a la vez, es la mitad de adultos que no bailan pero usan lentes; además, los varones adultos que bailan exceden en 12 a las mujeres menores de edad que bailan y 19 son mujeres adultas que bailan y no usan lentes. Halle cuántas personas menores de edad no bailan si se sabe que el 30 % de las personas que hay en total están bailando. Considere que el total de personas es 200; además, hay 2 personas adultas que no bailan y no usan lentes.

A) 128 B) 108 C) 110
D) 112 E) 64

23. De 39 alumnos que aprobaron al menos Aritmética (A), Álgebra (X) o Geometría (G), se sabe que los aprobados en solo dos cursos son unos tantos como otros; los aprobados en los tres cursos son 1/6 de los que aprobaron solo X, 1/5 de los que aprobaron solo A, y 1/3 de los que aprobaron solo G. Indique la cantidad de alumnos, como máximo, que si aprobaron A, no aprobaron G.

A) 30 B) 32 C) 34
D) 20 E) 22

24. Si se sabe que $A \Delta B=B-A$, halle la expresión conjuntista reducida de M.

$M=\{[(A \cap B) \Delta B] \cap B\} \cap [(A \Delta B)^C \cap (A-B)]^C$

A) $A-B$ B) $A \cap B$ C) $A^C \cup B$
D) $A^C \cap B$ E) $A \cup B$

Nivel avanzado

25. Determine la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. $\sim[\forall x \in \mathbb{R}; x^2 \geq 0] \equiv \nexists x \in \mathbb{R}/x^2 \geq 0$

II. Si $A=\{0; 2; 4; 6\} \rightarrow \forall x \in A: 2x \geq -2$

III. Si $U=\{-1; -2; 0; 3\} \rightarrow \exists x \in U/x+2 < -10$

A) VVF B) VVV C) VFV
D) FVV E) FVF

26. Sean los conjuntos A, B y C. Halle la secuencia correcta del valor veritativo (V o F) de las siguientes proposiciones:

I. $\forall A; \exists B \wedge C/B \cap C = \varnothing \wedge (B \cup C)=A$

II. $\exists C/\forall A; A \cap C=C$

III. $\forall A; \forall B; A \cup (B \cap A)=A$

A) FVV B) VVV C) FVF
D) VFV E) FFF

27. Determine la secuencia correcta de la validez (V o F) de las afirmaciones siguientes:

I. Si $A \cap B=A \cap C$, entonces $B=C$.

II. Si $(B-C) \cap A \subset (A \cap B)$, entonces $B \subset C$.

III. Si $(A \cap B) \subset C$, entonces $A \subset C \wedge B \subset C$.

IV. Si $A \subset B \subset C$, entonces
$C=A \cup (B-A) \cup (C-B)$

A) FVFF B) FFVF C) FFFV
D) FFFF E) FVVF

28. Sean los conjuntos
$A=\{x \in \mathbb{R}/2x-1=x^2\}$
$B=\varnothing$
$C=\{x \in \mathbb{R}/x < 1\}$
Determine $(A \cup B)^C \cup C$.

A) B
B) A^C
C) $A \cap B$
D) $A^C \cap B$
E) A

29. Se define
$A * B =[(A^C \cup B)^C \cup (B \cap A^C)]^C$
$A \otimes B=B \cup A^C$
Reduzca $\{[(A * B) \cup B^C] \otimes B\} * B$.

A) $\varnothing$ B) B C) U
D) A E) $A-B$

30. Se define la operación # entre conjuntos como $A \# B=A' \cap B'$.
Sean las proposiciones

I. $A \# A=A'$

II. $(A \# B) \# (A \# B)=A \cup B$

III. $(A \# A) \# (B \# B)=A' \cap B$

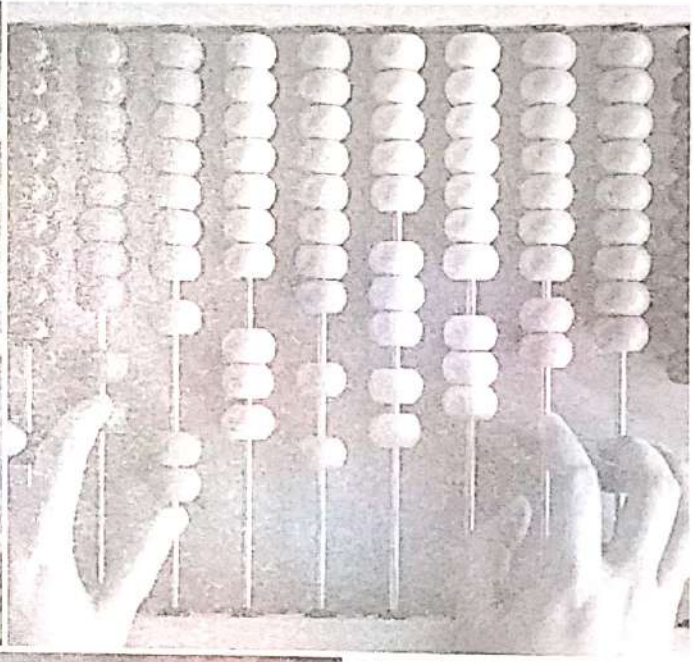
IV. $A \# (B \# C)=(A \# B) \# C$

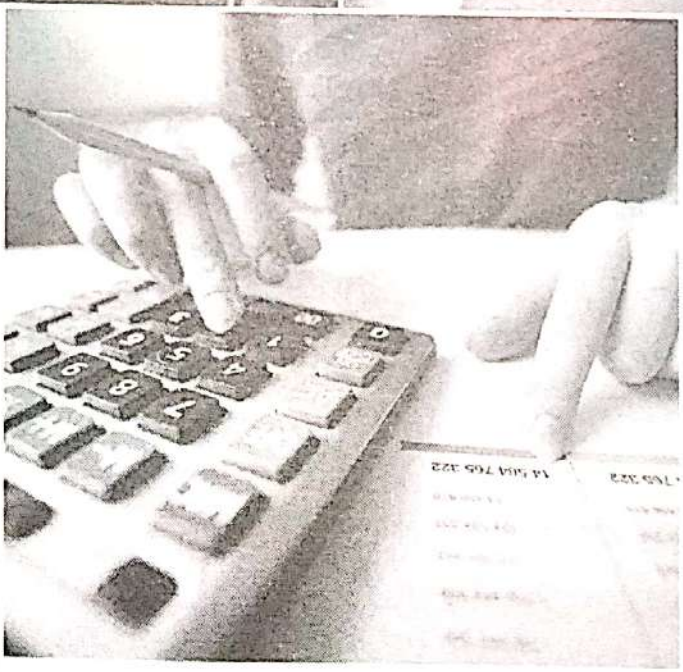
¿Cuántas de estas son falsas?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 0

Capítulo

IV





Numeración

William Nilthon Huamán Arotoma

CAPÍTULO IV

NUMERACIÓN

Objetivos

- Aprender a representar una cantidad de unidades simples en un determinado sistema posicional de numeración.
- Reconocer el orden y lugar que ocupa una cifra según su posición en un numeral, además de evaluar su valor de acuerdo a su posición.
- Aplicar la descomposición polinómica a cualquier numeral, realizando cambios de base y empleando las propiedades de un sistema de numeración.

Introducción

La idea de **número** es el principal concepto matemático y el más antiguo. Debe haber sido muy tempranamente en la evolución del hombre cuando surgió por primera vez la necesidad de un método para manejar y emplear los números.

Podemos afirmar que se han tenido que desarrollar dos nociones fundamentales durante el proceso de su evolución: la noción de **pluralidad**, que consiste en distinguir varios elementos respecto de una unidad, y la noción de **correspondencia**, que consiste en emparejar elementos de un conjunto con elementos de otro conjunto a su alcance (por ejemplo, los animales del corral con los dedos de la mano). El vínculo ideal de la correspondencia entre los elementos de ambos conjuntos es lo que proporciona la noción de número.

Cuando los objetos a contar fueron más numerosos que los diez dedos de la mano, el hombre se vio en la necesidad de agruparlos y contarlos por grupos, a la vez de darles nombres y asignarles un símbolo a cada número. Podemos decir que cada civilización, a lo largo de la historia, escogió un modo diferente de agrupar los elementos, por ejemplo, los egipcios lo hicieron de 10 en 10, los babilonios de 60 en 60, los mayas de 20 en 20, los chinos de 10 en 10, etc.

Los incas, por su parte, basaban sus cálculos en el sistema numérico decimal, es así que sus operaciones las realizaban mediante dos tecnologías: el ábaco de cinco hileras y de cuatro casilleros, en los que redistribuían series de cinco granos de maíz, y los quipus, que eran cuerdas en cuyos nudos anotaban los guarismos.

En este capítulo enfocaremos el desarrollo minucioso del sistema de numeración vigente, que es el sistema posicional.

1▸ DEFINICIÓN

Es la parte de la aritmética que se encarga del estudio de la correcta formación, representación, lectura y escritura de los números, así como también de las diversas propiedades que se derivan a partir de ellas.

2▸ NOCIONES PREVIAS

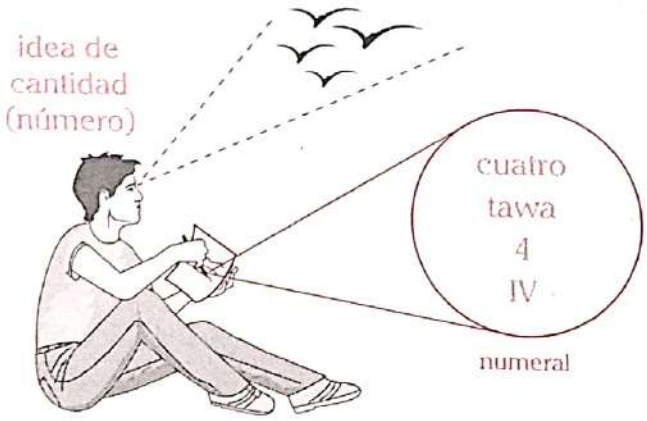
2.1. NÚMERO

Es un ente matemático que permite cuantificar los elementos que observamos en la naturaleza. Nos proporciona la idea de cantidad.

2.2. NUMERAL

Es la representación simbólica o figurativa de un número mediante determinados símbolos o guarismos convencionales.

Existen diversos sistemas de símbolos para la representación de los números, tales como los numerales egipcios, chinos, mayas, romanos y arábigos; entre estos, los últimos tuvieron mayor trascendencia y fueron divulgados por los árabes. Este sistema cuenta con 10 símbolos o guarismos, con ellos se pueden representar todos los números.



A continuación, nombramos a los diez primeros numerales en quechua.

- 1: juk
- 2: iskay
- 3: kimsa
- 4: tawa
- 5: pichka
- 6: soqta
- 7: qanchis
- 8: pusaq
- 9: isqon
- 10: chunka

2.3. CIFRA

Es aquel símbolo convencional que se utiliza para la formación de los numerales, los cuales son los siguientes:

$$0;\ \underbrace{1;2;3;4;5;6;7;8;9;(10);(11);\ldots}_{\text{cifras significativas}}$$

cifra no significativa

> ▸▸ Nota
> A la cifra también se le denomina dígito, que deriva del latín *digitos*, que significa 'dedo'.

3▸ NUMERACIÓN ROMANA

Es un sistema de numeración no posicional que se desarrolló en la antigua Roma y se utilizó en todo su imperio.

La numeración romana tiene símbolos representados por siete letras del abecedario latino:

I uno	V cinco	X diez	L cincuenta
C cien	D quinientos	M mil	

Este sistema consta de algunas reglas que son necesarias para formar números:

- Los símbolos V, L y D no se anteponen ni se repiten.
- Los símbolos I, X, C y M se pueden escribir hasta tres veces seguidas y sus valores se suman.
- Respecto a las particularidades de cada símbolo, se tiene que
  - I se antepone únicamente a V y X.
  - X se antepone únicamente a L y C.
  - C se antepone únicamente a D y M.

- Cualquier símbolo escrito a la izquierda de otro de mayor valor le resta valor a este último. Por ejemplo, IV (cuatro), XC (noventa).
- Cualquier símbolo escrito a la derecha de otro mayor o igual suma su valor al de este. Por ejemplo, VI (seis), XX (veinte).
- Un trazo horizontal sobre los símbolos multiplica por 1000 el valor de todos ellos.

Ejemplos

- $\overline{\text{XXII}} \rightarrow 22\times1000=22\,000$
- $\overline{\overline{\text{IV}}} \rightarrow 4\times1000\times1000=4\,000\,000$
- $\overline{\overline{\text{II}}}\,\overline{\text{CCCXX}}\text{DCXVIII} \rightarrow 2\,320\,618$

Los romanos, a menudo, escribían IIII (4) y no IV, y eso se observa incluso actualmente en las esferas de los relojes.

La numeración romana se utilizaba en la teneduría de libros en los países europeos hasta el siglo XVIII.

Los números romanos ya no se utilizan en la actualidad, solamente los vemos en documentos antiguos, en la expresión de siglos, en nombres de reyes y papas, en la numeración de congresos y olimpiadas, etc.; sin embargo, los números romanos siguen formando parte de nuestra cultura.

4 SISTEMA POSICIONAL DE NUMERACIÓN

Es el conjunto de normas, leyes, principios, reglas y convenciones que permiten la correcta formación, lectura y escritura de los números.

4.1. PRINCIPIOS FUNDAMENTALES

4.1.1. Primer principio: Del orden

Toda cifra que conforma un numeral tiene asociado un orden, el cual se cuenta de derecha a izquierda a partir de uno; asimismo, la cifra tiene un lugar que se cuenta de izquierda a derecha a partir de uno.

Ejemplo

orden	6	5	4	3	2	1
	8	3	4	0	7	9
lugar	1	2	3	4	5	6

Observación

En el sistema decimal, se tiene

UM	C	D	U ← orden
2	0	1	9

Aplicación 1

¿Cuántas cifras tiene el numeral en el cual se cumple que su cifra de orden 4 coincide con su cifra de tercer lugar?

Resolución

lugar	1	2	3	4	5	6	orden
	_	_	4	3	2	1	

Por lo tanto, el numeral tendrá 6 cifras.

4.1.2. Segundo principio: De la base

La base es un número entero mayor que la unidad, que indica las unidades necesarias y suficientes de un orden cualquiera para formar una unidad del orden siguiente (orden inmediato superior).

Ejemplos

- En base 10 (sistema decimal),
  - diez unidades conforman una decena.
  - diez decenas conforman una centena.
  - diez centenas conforman un millar.
- En base 5,
  - cinco unidades del orden uno conforman una unidad del orden dos.
  - cinco unidades del orden dos conforman una unidad del orden tres.
  - cinco unidades del orden tres conforman una unidad del orden cuatro.

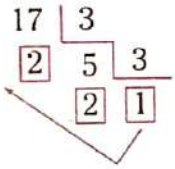
Aplicación 2

Exprese diecisiete unidades simples en los sistemas de numeración de base 10; 7; 6; 5; 3 y 2.

Resolución

Base	Orden 5	4	3	2	1
10					⁝⁝⁝⁝⁝
				1	7
7					⁝⁝⁝⁝⁝ ⁝
				2	3_7
6					⁝⁝⁝⁝⁝ ⁝⁝
				2	5_6
5					17 | 5 2 3 queda pasa
				3	2_5
3					17 | 3 2 5 queda pasa
				5 | 3 2 1 queda pasa	2
			1	2	2_3
2					17 | 2 1 8
				8 | 2 0 4	1
			4 | 2 0 2	0	1
		2 | 2 0 1	0	0	1
	1	0	0	0	1_2

Este procedimiento se puede abreviar. Veamos cómo hacerlo expresando 17 en base 3.

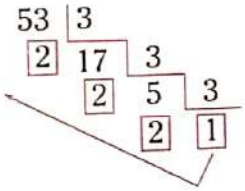


$\therefore\ 17=122_3$

Aplicación 3

Exprese 53 unidades en base 3.

Resolución



$\therefore\ 53=1222_3$

Además, en base 3 se distingue lo siguiente:

- Una unidad del orden uno representa ($1=3^0$) unidad simple.
- Una unidad del orden dos representa ($3=3^1$) unidades simples.
- Una unidad del orden tres representa ($9=3^2$) unidades simples.
- Una unidad del orden cuatro representa ($27=3^3$) unidades simples.

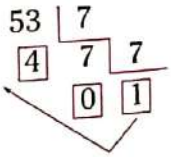
Luego,

$$1222_3=\underbrace{1\times3^3+2\times3^2+2\times3^1+2\times3^0}_{\text{unidades simples}}=53$$

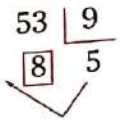
Aplicación 4

Exprese 53 unidades en base 7 y base 9.

Resolución



$\rightarrow\ 53=104_7$



$\rightarrow\ 53=58_9$

Igualamos las representaciones.

$$\overbrace{\underbrace{104_7}_{\substack{\text{menor}\\ \text{base}\\ (-)}}}^{\substack{(+)\\ \text{mayor}\\ \text{representación}}} = \overbrace{\underbrace{58_9}_{\substack{\text{mayor}\\ \text{base}\\ (+)}}}^{\substack{(-)\\ \text{menor}\\ \text{representación}}}$$

Conclusiones

1. La base en toda representación numérica es un entero positivo mayor o igual a 2.
2. Las cifras que forman parte de un numeral son siempre un número entero no negativo y menor que su respectiva base.
3. En toda igualdad de dos numerales, en diferentes bases, se cumple que a mayor numeral aparente le corresponde menor base y a menor numeral aparente le corresponde mayor base.
4. Respecto a las unidades simples, se concluye lo siguiente:

En base 10

Unidad de orden	Unidades simples
1	$1=10^0$
2	10^1
3	10^2
4	10^3
⋮	⋮

En base 3 (según lo anterior)

Unidad de orden	Unidades simples
1	$1=3^0$
2	$3=3^1$
3	$9=3^2$
4	$27=3^3$
⋮	⋮

Aplicación 5

Corrija los siguientes numerales:

I. 675_4

II. 7389_5

III. $5(-2)88_7$

Resolución

I. Para 675_4 debemos agrupar las cifras de 4 en 4 de acuerdo con la base.

orden 4	orden 3	orden 2	orden 1
2	$\underbrace{6+2}_{2(4)+0}$	$\underbrace{7+1}_{2(4)+0}$	$\underbrace{5}_{1(4)+1}$
queda	queda	queda	queda

$\rightarrow \quad 675_4=2001_4$

II. Para 7389_5 agrupamos de 5 en 5.

5	4	3	2	1
1	$\underbrace{7}_{1(5)+2}$	$\underbrace{3+1}_{4}$	$\underbrace{8+1}_{1(5)+4}$	$\underbrace{9}_{1(5)+4}$
queda	queda	queda	queda	queda

$\rightarrow \quad 7389_5=12444_5$

III. Para $5(-2)88_7$ agrupamos de 7 en 7.

4	3	2	1
5	$\underbrace{-2+1}_{-1}$	$\underbrace{8+1}_{1(7)+2}$	$\underbrace{8}_{1(7)+1}$
$4+1 \rightarrow$	$\underbrace{1(7)-1}_{6}$		

La unidad que se presta del orden superior al inmediato anterior equivale a la base.

$\therefore \quad 5(-2)88_7=4621_7$

Observación

- Para indicar que un número está representando en cierto sistema de numeración, la base se escribe como un subíndice en la parte inferior derecha. En algunos casos, se escribe dicha base entre paréntesis.
- El número de unidades de cualquier orden que coincida con la base del sistema de numeración originará una unidad del orden inmediato superior.

4.1.3. Tercer principio: De la cifra

Toda cifra que conforma un numeral es menor que la base; además, el número de cifras posibles a utilizar en cierta base es igual a la base.

A continuación, presentamos algunos sistemas de numeración más utilizados.

Base	Nombre del sistema	Cifras utilizadas
2	binario	0; 1
3	ternario	0; 1; 2
4	cuaternario	0; 1; 2; 3
5	quinario	0; 1; 2; 3; 4
6	senario	0; 1; 2; 3; 4; 5
7	heptanario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6
8	octonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7
9	nonario	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8
10	decimal (indo arábigo)	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9
11	undecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10)
12	duodecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10); (11)
16	hexadecimal	0; 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; (10); (11); (12); (13); (14); (15)

▸▸ Nota

Para un sistema de numeración en base n.

1. Por convención, solo para las cifras mayores que 9 se considera lo siguiente.

   (10) <> α

   (11) <> β

   (12) <> γ

   ⋮ ⋮

   Ejemplos

   - $11(10)2(11)_{12}$ <> $11\alpha2\beta_{12}$
   - $(12)12(10)11_{13}$ <> $\gamma12\alpha11_{13}$

2. En cualquier sistema de numeración, la cantidad de cifras a utilizar será numéricamente igual a la base.

   Es decir, en base n se utilizan las cifras

   $$\underbrace{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ (n-3),\ (n-2),\ (n-1)}_{n \text{ cifras}}$$

3. La mayor cifra que se puede utilizar en cierto sistema de numeración será igual a la base disminuida en una unidad.

4. Para leer un número en un sistema diferente al decimal se le nombra cifra por cifra de izquierda a derecha y al final se lee la base.

   Ejemplo

   1046_9 se lee: "uno, cero, cuatro y seis de la base 9".

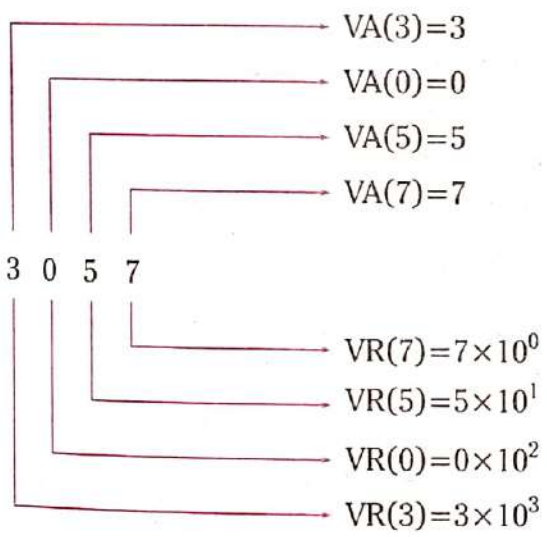
4.1.4. Cuarto principio: Del valor de las cifras

Toda cifra que conforma un numeral cuenta con dos valores:

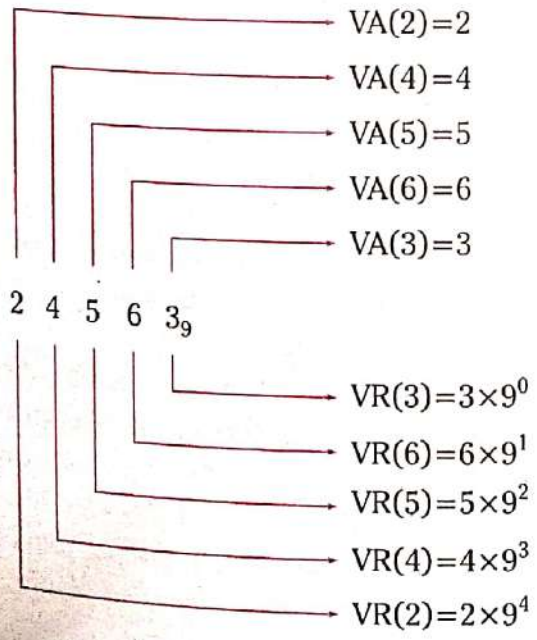
- **Valor absoluto (VA).** Es la cantidad de unidades que representa por su apariencia.
- **Valor relativo (VR).** Es el número total de unidades simples que representa por el orden que ocupa en un numeral.

Ejemplos

- 3057



- 24563_9



Conclusiones

1. El valor absoluto y el valor relativo de una cifra son iguales solo cuando esta sea la última cifra del numeral o la cifra cero.
2. Los numerales son equivalentes a la suma de valores relativos de sus cifras.

Ejemplos

- $4563_9=4\times9^3+5\times9^2+6\times9+3$

  Es decir

  $4563_9=VR(4)+VR(5)+VR(6)+VR(3)$

- $12131_4=1\times4^4+2\times4^3+1\times4^2+1\times4^1+3$

  $12131_4=VR(1)+VR(2)+VR(1)+VR(3)+VR(1)$

▸▸ Nota

Números concretos. Son aquellos números que expresan al mismo tiempo la especie de la unidad. Así, 14 kilogramos, 10 niños y 4 sillas son números concretos cuyas unidades respectivas son el kilogramo, un niño y una silla. Con los números concretos se hacen las mismas operaciones que con los abstractos.

Números homogéneos y heterogéneos. Se llaman números homogéneos a los que son de una misma especie, como 5 sillas y 13 sillas. Se llaman números heterogéneos a los que son de diferente especie, como 5 kilogramos y 12 segundos.

Números incomplejos y complejos. Se llaman números incomplejos a los números concretos cuyas unidades son todas de la misma especie, como 10 segundos, 18 segundos, etc. Se llaman números complejos a los números concretos cuyas unidades son de especies diferentes, pero del mismo género, como 4 meses, 2 semanas, 3 días, 17 horas y 43 minutos.

5▸ REPRESENTACIÓN LITERAL DE LOS NÚMEROS

Cuando no se conocen las cifras de un numeral, estas se representan mediante letras minúsculas, pero considerando lo siguiente:

- Letras diferentes no necesariamente indican cifras diferentes, a menos que se señale.

  Ejemplos

  $\overline{ab}=32$; $\overline{mnp}_4=211_4$; $\overline{amnbc}_7=23313_7$; $\overline{abc}_5=444_5$

- Toda expresión entre paréntesis representa una cifra.

$$\overline{\underbrace{a(m+3)}_{\text{una cifra}}b\underbrace{\left(\frac{c}{2}\right)}_{\text{una cifra}}}_{9}$$

  donde

  - $m+3$: 0; 1; 2; 3; ...; 8
  - $\frac{c}{2}$: 0; 1; 2; 3; ...; 8

- La cifra de mayor orden debe ser diferente de cero.

$$\overline{a(m+3)b...} \qquad \overline{\underbrace{(2m+3)}_{\text{mínimo valor: 1}}b\underbrace{c}_{\text{mínimo valor: 0}}...}$$

a: mínimo valor: 1

Aplicación 6

Si los numerales $\overline{1a0}_4$; $\overline{2bc}_a$; $\overline{bb}_c$ están correctamente escritos, calcule $a\times c\times b$.

Resolución

De los numerales $\overline{1a0}_4$; $\overline{2bc}_a$; $\overline{bb}_c$ se deduce que

$$a<4\ ;\ c<a\ ;\ b<c$$

Ordenamos.

$$0<\underset{1}{b}<\underset{2}{c}<\underset{3}{a}<4 \quad (b, c, a \text{ son enteros})$$

$\therefore\ a\times c\times b=3\times 2\times 1=6$

Aplicación 7

¿Cuántos numerales de 3 cifras impares existen en base 5?

Resolución

Elaboramos numerales de tres cifras impares según las condiciones del problema.

111_5; 113_5; 131_5; 133_5; 311_5; 313_5; 331_5; 333_5

De forma práctica, se tiene que

$$\overline{a\ b\ c}_5$$

$$\left.\begin{matrix}1 & 1 & 1\\ 3 & 3 & 3\end{matrix}\right\}\text{valores de las cifras}$$

$2\times 2\times 2=8$ números

Aplicación 8

¿Cuántos numerales de la forma $\overline{a(b+3)b(2m+3)}_8$ existen?

Resolución

se analiza uno de ellos

$$\overline{a(b+3)b\,(2m+3)}_8$$

a	b	$(2m+3)$
		0
1	0	1
2	1	2
3	2	3
4	3	4
5	4	5
6		6
7		7
7	5	8

$7\times 5\times 8=280$

Conclusiones

- En un numeral, los valores de las variables son tales que pueden formar una cifra en su base correspondiente.
- Si una variable aparece en 2 o más cifras, solo será considerada en una de ellas teniendo en cuenta las restricciones de las otras cifras en las que aparece dicha variable.
- Se tabulan los valores que adopta cada cifra, no los valores de la variable.

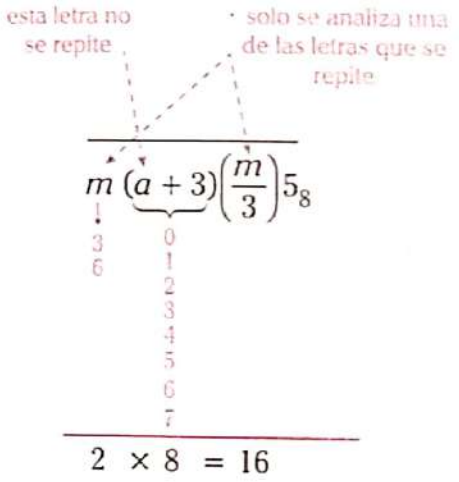
Aplicación 9

Determine la cantidad de numerales de la forma

$$\overline{m(a+3)\left(\frac{m}{3}\right)5_8}$$

Resolución

Analicemos los valores que puede tomar cada variable.



Por lo tanto, hay 16 numerales.

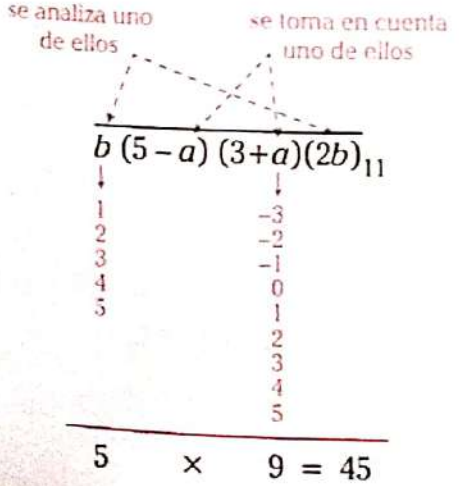
Aplicación 10

Indique cuántos numerales existen de la forma

$$\overline{b(5-a)(3+a)(2b)}_{11}$$

Resolución

Analicemos los valores que puede tomar cada variable.



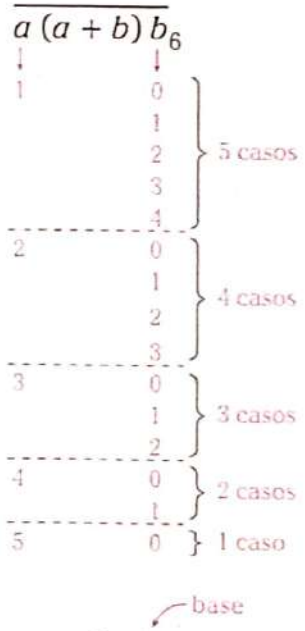
Por lo tanto, hay 45 numerales.

Aplicación 11

¿Cuántos numerales de la forma $\overline{a(a+b)b}_6$ existen?

Resolución

Observamos que una cifra depende de las otras dos cifras. En este caso hay que analizar por casos.



$\therefore$ n.º de casos: $\dfrac{5\times 6}{2}=15$

> **Importante**
> La cantidad de numerales de la forma $\overline{a(a+b)b}_n$ se calcula como
>
> $$\boxed{\frac{(n-1)n}{2}}$$

5.1. NUMERAL CAPICÚA

Es aquel numeral cuyas cifras equidistantes de los extremos son iguales, es decir, presentan una representación simétrica.

Ejemplos

- Capicúas de 2 cifras
  $\overline{aa}$: 11; 22; 33; 44; ...; 99
- Capicúas de 3 cifras
  $\overline{aba}_3$: 101_3; 111_3; 121_3; 202_3; 212_3; 222_3

- Capicúas de 4 cifras
  $\overline{abba}$: 1001; 1111; 1221; 1331; ...; 9999
- Capicúas de 5 cifras
  $\overline{abcba}_8$
- Capicúas de 6 cifras
  $\overline{abccba}_{13}$

> **Nota**
> Existen palabras o frases que se caracterizan por tener la misma lectura de izquierda a derecha o de derecha a izquierda; a dichas palabras o frases se les denomina **palíndromos**. Por ejemplo, *oso*, *salas*, *seres*, *somos*, *radar*, *reconocer*, *anita lava la tina*, *dábale arroz a la zorra el abad*, *a bartolomé nemo lo traba*.

Aplicación 12

El siguiente numeral es capicúa

$$\overline{b(b-5)\left(\frac{b-a}{3}\right)(a+b-c)\left(\frac{c}{4}\right)(a-2)8}$$

Calcule $a+b+c$.

Resolución

Como el numeral es capicúa, sus cifras equidistantes de los extremos deben ser iguales.

$$\overline{b(b-5)\left(\frac{b-a}{3}\right)(a+b-c)\left(\frac{c}{4}\right)(a-2)8}$$

Igualamos las cifras equidistantes para hallar los valores de las variables.

- $b=8$
- $a-2=b-5$
  $a-2=(8)-5$
  $a=5$
- $\dfrac{(b-a)}{3}=\dfrac{c}{4}$

  $\dfrac{8-5}{3}=\dfrac{c}{4} \quad \rightarrow \quad c=4$

$\therefore \quad a+b+c=17$

Aplicación 13

Indique cuántos numerales capicúas con las siguientes características existen.

I. tres cifras
II. cuatro cifras pares en base 9
III. cinco cifras en base 12

Resolución

I. Numeral capicúa de tres cifras: $\overline{aba}$

$$\begin{array}{ccc} a & b & a \\ \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & \\ \vdots & \vdots & \\ 9 & 9 & \\ \hline \end{array}$$

$9\times10=90$

Solo se tabulan cifras que dependen de variables diferentes.

Por lo tanto, existen 90 numerales capicúas de tres cifras.

II. Numeral capicúa de cuatro cifras: $\overline{mnnm}_9$
Como las cifras deben ser pares, entonces m y n también deben serlo.

$$\begin{array}{cccc} m & n & n & m_9 \\ \downarrow & \downarrow & & \\ 2 & 0 & & \\ 4 & 2 & & \\ 6 & 4 & & \\ 8 & 6 & & \\ & 8 & & \\ \hline \end{array}$$

$4 \times 5 = 20$

Por lo tanto, existen 20 numerales capicúas de cuatro cifras pares en base 9.

> **Observación**
> Por convención se considera al cero como cifra par.

III. Numeral capicúa de cinco cifras en base 12: $\overline{abcba}_{12}$

$$\overline{a\ \ b\ \ c\ \ b\ \ a}_{12}$$

$$\begin{array}{ccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & 0 & 0 & & \\ \vdots & 1 & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ (11) & (11) & (11) & & \\ \hline \end{array}$$

$$11 \times 12 \times 12 = 1584$$

Por lo tanto, existen 1584 numerales capicúas de cinco cifras en base 12.

6 ▸ Escritura y lectura de un número en el sistema decimal

En la representación numérica en el sistema decimal, cada cifra ocupa un orden, donde tres órdenes constituyen una clase, y dos clases o 6 órdenes constituyen un periodo.

Otra forma de leer y escribir los números es contando de derecha a izquierda, lo cual se entiende como

- cada cifra representa un orden.
- tres cifras forman una clase x.
- seis cifras forman un periodo.

Ejemplo

Consideremos un número de 18 cifras, tal como 178 343 419 586 153 227.
Su tablero posicional es el siguiente:

	centenas de millar de billón	decenas de millar de billón	unidades de millar de billón	centenas de billón	decenas de billón	unidades de billón	centenas de millar de millón	decenas de millar de millón	unidades de millar de millón	centenas de millón	decenas de millón	unidades de millón	centenas de millar	decenas de millar	unidades de millar	centenas	decenas	unidades
número	1	7	8	3	4	3	4	1	9	5	8	6	1	5	3	2	2	7
Orden	18	17	16	15	14	13	12	11	10	9	8	7	6	5	4	3	2	1
Clase	6.ª clase de los millares de billón			5.ª clase de los billones			4.ª clase de los millares de millón			3.ª clase de los millones			2.ª clase de los millares			1.ª clase de las unidades		
Periodo	3.er periodo de los billones						2.º periodo de los millones						1.er periodo de las unidades					

Como es evidente, el número dado tiene 18 órdenes, 6 clases y 3 periodos.

Podemos adelantar que este número se lee de la siguiente manera: "ciento setenta y ocho mil, trescientos cuarenta y tres billones, cuatrocientos diecienueve mil, quinientos ochenta y seis millones, ciento cincuenta y tres mil, doscientos veintisiete unidades".

Aplicación 14

Indique la cantidad de órdenes, clases y periodos que tiene el número 48 619 752.

Resolución

- Como el número tiene 8 cifras, entonces tiene 8 órdenes.
- Como una clase tiene 3 órdenes, entonces dividimos entre 3.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 3 \\ \hline 2 & ② \end{array}$$

Por lo tanto, el número tiene 2 clases.

- Como el periodo tiene 6 órdenes, entonces dividimos entre 6.

$$\begin{array}{r|l} 8 & 6 \\ \hline 2 & ① \end{array}$$

Por lo tanto, el número tiene 1 periodo.

Finalmente,

$$\overbrace{48\,\underbrace{619}_{}\,\underbrace{752}_{}}^{\text{8 órdenes}}$$

2 clases

1 periodo

6.1. REGLAS PARA ESCRIBIR UN NÚMERO

Para escribir un número, se anotan sucesivamente las unidades correspondientes a cada orden, comenzando siempre por las superiores y colocando un cero en el lugar correspondiente al orden en el cual no haya unidades.

Las clases deben estar separadas por un espacio aproximadamente igual al que ocupa una cifra.

Es importante señalar que la coma solamente se usará en la escritura de números decimales, tal como se señala en el Sistema Internacional de Unidades.

Ejemplos

- cuatrocientos cinco: 405
  Nótese que en el 2.° orden se escribe el cero por ausencia de decenas.
- doscientos cincuenta y cuatro mil, setenta y dos: 254 072
  Nótese que en el 3.er orden se escribió el cero por ausencia de centenas.
- setenta y ocho millones, cuarenta y tres mil veintinueve: 78 043 029
  Nótese que en el 3.er y 6.° orden se escribió el cero por ausencia de centenas y centenas de millar, respectivamente.

6.2. REGLAS PARA LEER UN NÚMERO

La lectura de un número se realiza de izquierda a derecha. Si se tiene que leer un número con más de siete cifras, es conveniente dividirlo (mentalmente) en grupos de seis cifras, comenzando por la derecha, con el propósito de identificar el periodo correspondiente; luego se procede a leer.

Ejemplos

- 20 946
  Se lee: "veinte mil, novecientos cuarenta y seis".
- 3 874 061
  Se lee: "tres millones, ochocientos setenta y cuatro mil, sesenta y uno".
- 35 000 432 007 180
  Se lee: "treinta y cinco billones, con cuatrocientos treinta y dos millones, con siete mil ciento ochenta".

7 DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

Dado un numeral en cualquier sistema de numeración o base, descomponerlo polinómicamente consiste en expresarlo en función de sus cifras y su respectiva base.

7.1. DESCOMPOSICIÓN CIFRA POR CIFRA

Dado el numeral

$$\underbrace{\overline{a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_3 a_2 a_1 a_0}}_{n+1 \text{ cifras}}{}_{(b)}$$

se puede expresar como un polinomio de la forma

$$a_n b^n + a_{n-1} b^{n-1} + a_{n-2} b^{n-2} + \ldots + a_2 b^2 + a_1 b^1 + a_0$$

donde

- $a_n; a_{n-1}; a_{n-2}; \ldots; a_2; a_1; a_0$: cifras del numeral
- b: base en la cual está escrito el numeral ($b \in \mathbb{Z}^+ \geq 2$)

Se puede apreciar también que el exponente de la base coincide con el orden que admite cada cifra que conforma el numeral, disminuido en uno.

A este polinomio también se le suele denominar polinomio entero.

Ejemplos

- $345 = 300 + 40 + 5$ (suma de valores relativos)
  $345 = 3 \times 10^2 + 4 \times 10^1 + 5$
- $4352_7 = 4 \times 7^3 + 3 \times 7^2 + 5 \times 7^1 + 2$
- $2003504_8 = 2 \times 8^6 + 3 \times 8^3 + 5 \times 8^2 + 4$

De manera práctica, se multiplica la cifra por la base elevada al número de cifras que siguen a la derecha de dicha cifra. En algunos casos, dada la forma del numeral, es más conveniente descomponer agrupando cierta cantidad de cifras; a dicha descomposición se le denomina descomposición por bloques.

7.2. DESCOMPOSICIÓN POR BLOQUES

Algunas veces, en los problemas se presentan numerales que tienen bloques de 2 o más cifras que se repiten; en este caso, es conveniente realizar una descomposición por bloques.

Ejemplos

- $1313 = 1300 + 13$
  $\underbrace{13}\underbrace{13} = 13 \times 10^2 + 13$
- $\underbrace{24}\underbrace{24}\underbrace{24}_7 = 24_7 \times 7^4 + 24_7 \times 7^2 + 24_7$
- $\overline{\underbrace{ab}\underbrace{ab}} = \overline{ab} \times 10^2 + \overline{ab} = 101 \times \overline{ab}$
- $\overline{\underbrace{abc}\underbrace{abc}_5} = \overline{abc_5} \times 5^3 + \overline{abc_5} = 126 \times \overline{abc_5}$
- $\overline{\underbrace{a\ b\ c\ d}_8}$

  $\overline{abc_8} \times 8 + d$

  $\overline{ab_8} \times 8^2 + \overline{cd_8}$

  $a \times 8^3 + \overline{bcd_8}$

  $a \times 8^3 + \overline{bc_8} \times 8 + d$

  $a \times 8^3 + b \times 8^2 + \overline{cd_8}$

  $\overline{ab_8} \times 8^2 + c \times 8 + d$

Si los numerales presentan estas formas, no es necesaria la descomposición por bloques, eso depende del problema al cual se le tenga que dar solución.

8 PARIDAD DE UN NUMERAL

Para averiguar si un numeral es par o impar, el análisis se debe realizar en el sistema decimal y no en otro sistema de numeración.

La descomposición polinómica nos va a permitir analizar la paridad (par o impar) de los numerales escritos en base par o impar. En principio, destaquemos lo siguiente:

- Toda potencia de un par es un número par.
- Toda potencia de un impar es un número impar.

8.1. PARA UNA BASE PAR

Sea $\overline{cdef}_{(\text{par})}$

Si descomponemos polinómicamente por bloques, tenemos

$$\overline{cdef}_{(\text{par})} = \underbrace{\overline{cde}_{(\text{par})} \times (\text{par})}_{\text{par}} + f$$

Podemos deducir que si un numeral está escrito en base par, su paridad dependerá de la última cifra; es decir, si su última cifra es par, el numeral será par, y si es impar, el numeral resultará impar.

Ejemplos

- 2341_8 es impar puesto que termina en 1.
- 34562_{12} es par puesto que termina en 2.

8.2. PARA UNA BASE IMPAR

Hay que tener presente que para saber si $a\times$(impar) es par o impar va a depender de la paridad de a; es decir, si a es par, dicho producto será par; pero si resulta impar, dicho producto también será impar.

Supongamos que

$$\overline{cdef}_{(\text{impar})}$$

Descomponemos polinómicamente.

$$\overline{cdef}_{(\text{impar})}=c\times(\text{impar})^3+d\times(\text{impar})^2+e\times(\text{impar})+f$$

$$\overline{cdef}_{(\text{impar})}=c\times(\text{impar})+d\times(\text{impar})+e\times(\text{impar})+f$$

De lo anterior, podemos deducir que si un numeral está escrito en base impar, su paridad dependerá de la suma de sus cifras; es decir, si la suma de sus cifras es par, el numeral será par, y si es impar, entonces el numeral será impar.

Ejemplos

- ¿Es 2317_9 par o impar?
  Como $2+3+1+7=13$ es impar, entonces 2317_9 es impar.
- ¿Es 4316_{11} par o impar?
  Como $4+3+1+6=14$ es par, entonces 4316_{11} es par.
- ¿Es 214_7 par o impar?
  Como $2+1+4=7$ es impar, entonces 214_7 es impar.

Aplicación 15

Se tiene la siguiente igualdad:

$\overline{(a+1)a2}_n=\overline{a23}_6$

Determine el valor de n^a.

Resolución

En la igualdad, tenemos

$$\overline{(a+1)a2}_n=\underbrace{\overline{a23}_6}_{\text{impar}}$$

Entonces $\overline{(a+1)a2}_n$ tiene que ser impar. De ello, n es impar.

Además,

$$\overset{+}{\overline{(a+1)a2}_n}=\overset{-}{\overline{a23}_6}$$

$$\rightarrow\ 2<\underset{3\ \text{o}\ 5}{n}<6\quad(n=3\ \text{o}\ n=5)$$

Los numerales tienen la misma cantidad de cifras; por ello, descomponiendo polinómicamente, tenemos

$$(a+1)\times n^2+\ldots\approx a\times 6^2+\ldots$$

De ello, $n=5$ es el valor que más se aproxima.

$\rightarrow\ \overline{(a+1)a2}_5=\overline{a23}_6$

$(a+1)5^2+a\times 5+2=a\times 6^2+2\times 6+3$

$30a+27=36a+15$

$12=6a$

$2=a$

$\therefore\ n^a=5^2=25$

Aplicación 16

Dada la siguiente igualdad:

$\overline{5m6}_n=\overline{4x5}_9$ (x: impar)

calcule el valor de $m\times n-x$.

Resolución

Como x es impar ($x<9$), entonces

$$\overline{5m6}_n=\underbrace{\overline{4x5}_9}_{\text{par}}$$

De ello, $\overline{5m6}_n$ es par.

Entonces, n es par.

Luego,

$$\overline{5m6}_n = \overline{4x5}_9$$

$$\rightarrow \quad 6<n<9 \quad \rightarrow \quad n=8$$

7 No cumple
8 Sí cumple

Descomponemos polinómicamente ambos numerales.

$$\overline{5m6}_8=\overline{4x5}_9$$

$$5\times8^2+m\times8+6=4\times9^2+x\times9+5$$

$$326+8m=329+9x$$ impar

$$8m=3+9x$$

$$\rightarrow \quad m=6 \ \wedge \ x=5$$

$$\therefore \quad m\times n-x=6\times8-5=43$$

Aplicación 17

Si $\overline{abcd}=33\overline{ab}+36\overline{cd}$, calcule el valor de $a+b+c+d$

Resolución

Dada la expresión que se tiene al lado derecho de la igualdad, se deduce que es conveniente descomponer por bloques.

$$\overline{abcd}=100\overline{ab}+\overline{cd}$$

Luego,

$$100\overline{ab}+\overline{cd}=33\overline{ab}+36\overline{cd}$$

$$67\overline{ab}=35\overline{cd}$$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}=\frac{35}{67}$$

$$\rightarrow \quad \overline{ab}=35; \ \overline{cd}=67$$

Finalmente,

$$a=3; \ b=5; \ c=6; \ d=7$$

$$\therefore \quad a+b+c+d=21$$

Aplicación 18

Si $\overline{xyxy}_n=1073$, calcule $x+y+n$.

Resolución

Descomponemos $\overline{xyxy}_n$ por bloques.

$$\overline{xyxy}_n=\overline{xy}_n\times n^2+\overline{xy}_n=(n^2+1)\overline{xy}_n$$

$$\rightarrow \quad (n^2+1)\overline{xy}_n=29\times37$$

Formamos un cuadrado aumentado en 1.

$$(n^2+1)\times\overline{xy}_n=37\times29$$

$$\rightarrow \quad n^2+1=37 \quad \rightarrow \quad n=6$$

Luego,

$$\overline{xy}_6=29=45_6 \quad \rightarrow \quad x=4; \ y=5$$

$$\therefore \quad x+y+n=15$$

Aplicación 19

Si $\overline{abca}_5=\overline{a9a}$, calcule $a+b+c$.

Resolución

Descomponemos polinómicamente.

$$\overline{abca}_5=\overline{a9a}$$

$$a\times5^3+b\times5^2+c\times5+\cancel{a}=a\times10^2+9\times10+\cancel{a}$$

$$25a+25b+5c=90$$

$$5a+5b+c=18$$

$$5\underbrace{(a+b)}_{3}+\underset{3}{c}=18$$

$$\therefore \quad a+b+c=6$$

Aplicación 20

Si $\overline{mmm}=2160_m$

halle el valor de $\overline{mm}+\overline{1m}+\overline{m1}$.

Resolución

Descomponemos polinómicamente.

$$\overline{mmm}=2160_m$$

$$100m+10m+m=2m^3+m^2+6m$$

$$111m=2m^3+m^2+6m$$

$$105m=2m^3+m^2$$

Eliminamos m.

$$105=2m^2+m$$

$$105=m(2m+1)$$

$$5\times7\times3=m(2m+1);\ m>6 \text{ (por ser base)}$$

$$\rightarrow\ 7\times5\times3=m(2m+1)$$

Luego,

$$m=7$$

$$\therefore\ \overline{mm}+\overline{1m}+\overline{m1}=77+17+71=165$$

Observación

Las representaciones literales se pueden descomponer también de otras maneras, según sus características particulares.

Ejemplos

- $\overline{(a+3)(b+2)(c+7)}=\overline{abc}+327$
- $\overline{a3b5c8}=\overline{a0b0c0}+30\,508$
- $\overline{nnnn}=n(1111)$
- $\overline{(2a)(4b)(6c)}=2(\overline{a(2b)(3c)})$

9 MÉTODOS PARA EXPRESAR UN NUMERAL EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN DIFERENTES AL QUE SE ENCUENTRA ESCRITO

9.1. PRIMER CASO: DE BASE DIFERENTE DE DIEZ A BASE DIEZ

9.1.1. Método por descomposición polinómica

Para expresar un número de base diferente de diez a la base diez, se procederá descomponiendo polinómicamente el número dado, ya que con este procedimiento averiguaremos cuántas unidades simples posee dicho número.

Ejemplos

- 142_7 a base 10

  $142_7=1\times7^2+4\times7+2$

  $142_7=49+28+2$

  $142_7=79$

- 1024_5 a base 10

  $1024_5=1\times5^3+0\times5^2+2\times5+4$

  $1024_5=125+0+10+4$

  $1024_5=139$

- 3201_7 a base 10

  $3201_7=3\times7^3+2\times7^2+0\times7+1$

  $3201_7=1029+98+1$

  $3201_7=1128$

9.1.2. Método de Ruffini

Para expresar en el sistema decimal un número de cualquier otro sistema, se escriben las cifras del número en una línea horizontal, de izquierda a derecha. Debajo de la primera cifra y separada por un trazo horizontal se escribe otra vez dicha cifra, se multiplica por la base y su producto se escribe debajo de la segunda cifra para sumarlo con ella, cuyo resultado se coloca debajo del trazo horizontal; se multiplica esta suma por la base y su producto se coloca debajo de la tercera cifra, y así sucesivamente hasta sumar la última cifra, este último resultado representará al número dado en el sistema decimal.

Ejemplos

- 142_7 a base 10

	1	4	2
7		7	77
	1	11	$\boxed{79}$

$\rightarrow\ 142_7=79$

- 1024_5 a base 10

	1	0	2	4
5	↓	5	25	135
	1	5	27	$\boxed{139}$

→ $1024_5 = 139$

- 3162_7 a base 10

	3	1	6	2
7	↓	21	154	1120
	3	22	160	$\boxed{1122}$

→ $3162_7 = 1122$

9.2. SEGUNDO CASO: DE BASE DIEZ A BASE DIFERENTE DE DIEZ

9.2.1. Método de divisiones sucesivas

Para pasar un número de la base diez a otra base, se divide el número por la base a la cual se quiere expresar; el cociente obtenido se vuelve a dividir nuevamente por dicha base, así sucesivamente hasta que se obtenga un cociente menor que la base en la cual se quiere expresar dicho número. Finalmente, se escribe el último cociente como cifra de mayor orden, y cada uno de los residuos hallados en las divisiones anteriores se van escribiendo sucesivamente a su derecha.

Ejemplos

- 452 a base 4

452 | 4
(0) 113 | 4
(1) 28 | 4
(0) 7 | 4
(3) (1)

→ $452 = 13010_4$

- 2146 a base 7

2146 | 7
(4) 306 | 7
(5) 43 | 7
(1) (6)

→ $2146 = 6154_7$

- 12 427 a base 15

12427 | 15
(7) 828 | 15
(3) 55 | 15
(10) (3)

→ $12\,427 = 3(10)37_{15}$

Observación

base m $\xrightarrow[\text{polinómica}]{\text{descomposición}}$ base 10 $\xrightarrow[\text{sucesivas}]{\text{divisiones}}$ base n

donde $m \neq n \neq 10$

Aplicación 21

Exprese $\overline{(n-4)(2m-1)(n+1)(m-3)}_7$ en el sistema quinario.

Resolución

Del numeral, deducimos los valor de n y m.

- $\left.\begin{array}{l} n-4>0 \rightarrow n>4 \\ n+1<7 \rightarrow n<6 \end{array}\right\} 4<n<6$ ($n = 5$)

- $\left.\begin{array}{l} m-3\geq 0 \rightarrow m\geq 3 \\ 2m-1<7 \rightarrow m<4 \end{array}\right\} 3\leq m<4$ ($m = 3$)

→ $\overline{(n-4)(2m-1)(n+1)(m-3)}_7 = 1560_7$

Luego, convertimos 1560_7 a base 10.

$1560_7 = 1\times 7^3 + 5\times 7^2 + 6\times 7$

$1560_7 = 343 + 245 + 42$

→ $1560_7 = 630$

Finalmente, convertimos a base 5.

$$\begin{array}{l|l} 630 & 5 \\ (0)\ 126 & 5 \\ (1)\ 25 & 5 \\ (0)\ 5 & 5 \\ (0)\ (1) & \end{array}$$

$\therefore\quad 1560_7=10010_5$

Aplicación 22

Si $\overline{a0aa0a}_x=3315$, calcule $a+x$.

Resolución

Descomponemos por bloques.

$$\overline{a0a\,a0a}_x=3315$$

$$\overline{a0a}_x\underbrace{(x^3+1)}=3\times\underbrace{5}\times\underbrace{13}\times 17\ ;\ x<10$$

$$\overline{a0a}_x\underbrace{(x^3+1)}=51\times\underbrace{65}$$

$\rightarrow\quad x^3+1=65\quad\rightarrow\quad x=4$

Reemplazamos el valor de x.

$\overline{a0a}_4=51=303_4$

$a=3$

$\therefore\quad a+x=7$

Aplicación 23

Si $\overline{abcde}_5=\overline{460(e+4)}_7$

calcule el máximo valor de $a\times b+c\times d+e$.

Resolución

Sabemos que la última cifra es independiente de la base. Esto se verifica mediante la descomposición polinómica cifra por cifra.

Luego,

$\overline{abcd0}_5=4604_7$

Expresamos 4604_7 a base 5.

Primero a base 10.

$4604_7=4\times 7^3+6\times 7^2+4$

$\rightarrow\quad 4604_7=1670$

Llevamos ahora a base 5.

$$\begin{array}{l|l} 1670 & 5 \\ (0)\ 334 & 5 \\ (4)\ 66 & 5 \\ (1)\ 13 & 5 \\ (3)\ (2) & \end{array}$$

$\rightarrow\quad \overline{abcd0}_5=23140_5$

Finalmente,

$a=2;\ b=3;\ c=1;\ d=4;\ e_{\text{máx}}=2$

$\therefore\quad (a\times b+c\times d+e)_{\text{máx}}=2\times 3+1\times 4+2=12$

Aplicación 24

Si se cumple que $\overline{m24}_8=\overline{b2c6}_m$

determine el valor de $m+b+c$.

Resolución

De los numerales dados, hallamos el valor de m.

$$\underbrace{\overline{m24}_8}_{m<8}=\underbrace{\overline{b2c6}_m}_{6<m}$$

$\rightarrow\quad m=7$

Luego, reemplazamos m.

$724_8=\overline{b2c6}_7$

Expresamos 724_8 en base 10.

$724_8=7\times 8^2+2\times 8+4=468$

Convertimos ahora a base 7.

$$\begin{array}{l|l} 468 & 7 \\ (6)\ 66 & 7 \\ (3)\ 9 & 7 \\ (2)\ (1) & \end{array}$$

$\rightarrow\quad 468=1236_7$

Finalmente,

$1236_7=\overline{b2c6}_m$

$\rightarrow\quad b=1\ \wedge\ c=3$

$\therefore\quad m+b+c=11$

Aplicación 25

Se tiene que $\overline{3mn}_a=\overline{2nm}_5$

Calcule el valor de $a+m+n$.

Resolución

Del problema tenemos

$$\underset{\text{menor base}}{\overset{\text{mayor número}}{\overline{3mn}_a}} = \underset{\text{mayor base}}{\overset{\text{menor número}}{\overline{2nm}_5}}$$

A partir de ello, deducimos que

$3<a<5;\quad m<a \wedge n<a$

$\rightarrow\ a=4$

Luego,

$$\underbrace{\overline{3mn}_4}_{\text{a base 10}} = \underbrace{\overline{2nm}_5}_{\text{a base 10}}$$

$\rightarrow\ 3\times4^2+m\times4+n=2\times5^2+n\times5+m$

$48+4m+n=50+5n+m$

$$\underset{\text{par}}{3m} - \underset{\text{par}}{4n} = \underset{\text{par}}{2}$$

Además, $m<a\ \rightarrow\ m<4$

Entonces, el único valor posible de m es $m=2$.

$\rightarrow\ 3(2)-4n=2$

$n=1$

$\therefore\ m+n+a=7$

10▸ PROPIEDADES

10.1. DEL NUMERAL DE CIFRAS MÁXIMAS

Podemos observar en base 10 que

$$\begin{aligned} 9&=10^1-1\\ 99&=10^2-1\\ 999&=10^3-1\\ 9999&=10^4-1\\ &\vdots\\ \underbrace{9999\ldots9}_{K\text{ cifras}}&=10^K-1 \end{aligned}$$

En base 6

$$\begin{aligned} 55_6&=35=6^2-1\\ 555_6&=215=6^3-1\\ 5555_6&=1295=6^4-1\\ &\vdots\\ \underbrace{555\ldots555}_{K\text{ cifras}}{}_6&=6^K-1 \end{aligned}$$

Por lo tanto, en base n tenemos lo siguiente:

$$\boxed{\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}}_{K\text{ cifras}}{}_n=n^K-1}$$

Demostración

Descomponemos polinómicamente.

$$(n-1)\times n^{K-1}+(n-1)\times n^{K-2}+(n-1)\times n^{K-3}+\ldots+(n-1)n+(n-1)$$

Efectuamos.

$$(n^K-n^{K-1})+(n^{K-1}-n^{K-2})+(n^{K-2}-n^{K-3})+\ldots+(n^2-n)+(n-1)$$

Se observa que se cancelará desde el segundo al penúltimo sumando.

$$\therefore\quad \underbrace{\overline{(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}}_{K\text{ cifras}}{}_n=n^K-1$$

Aplicación 26

Si $\underbrace{\overline{aaa\ldots a}}_{j\text{ cifras}}{}_2=\overline{1net}$

calcule $j+a+n+e+t$.

Resolución

Como $0<a<2\ \rightarrow\ a=1$

Luego,

$$\underbrace{111\ldots1}_{j\text{ cifras}}{}_2=2^j-1=\overline{1net}$$

$\rightarrow\ 2^j=\overline{1net}+1$

Observamos que

$2^9=512$ No cumple

$2^{10}=1024$ Sí cumple

$2^{11}=2048$ No cumple

Luego,

$$j=10 \rightarrow 2^{10}=1024=\overline{1net}+1$$
$$\overline{1net}=1023$$

$\rightarrow$ $a=1;\ n=0;\ e=2;\ t=3$

$\therefore$ $j+a+n+e+t=16$

Aplicación 27

Exprese el menor numeral del sistema ternario, cuya suma de cifras es 100, en el sistema nonario. Dé como respuesta la suma de cifras.

Resolución

El menor numeral se formará al considerar que se debe tener la menor cantidad de cifras. Para ello, en lo posible, sus cifras deben ser máximas.

Luego,

$$\underbrace{222...222}_{50\text{ cifras}}{}_3 \quad (\text{suma de cifras}=100)$$

Por la propiedad del numeral de cifras máximas

$$\underbrace{222...222}_{50\text{ cifras}}{}_3=3^{50}-1=(3^2)^{25}-1$$
$$=9^{25}-1$$

Luego, $9^{25}-1$ representa un numeral de 25 cifras máximas en base 9.

$$\rightarrow 9^{25}-1=\underbrace{888...8}_{25\text{ cifras}}{}_9$$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$$\underbrace{8+8+8+...+8}_{25\text{ veces}}=25\times 8=200$$

10.2. DE LAS BASES SUCESIVAS

Sea

$$\overline{1a}_n=1n+a=n+a$$

$$\overline{1b}_{\overline{1a}_n}=\overline{1b}_{(n+a)}=1(n+a)+b$$
$$=n+a+b$$

$$\overline{1c}_{\overline{1b}\,\overline{1a}_n}=\overline{1c}_{(n+a+b)}=1(n+a+b)+c$$
$$=n+a+b+c$$

$$\overline{1d}_{\overline{1c}\,\overline{1b}\,\overline{1a}_n}=\overline{1d}_{(n+a+b+c)}=1(n+a+b+c)+d$$
$$=n+a+b+c+d$$

En general,

$$\overline{1e}_{\overline{1d}\,\overline{1c}\,\overline{1b}\,\overline{1a}_n}=n+a+b+c+d+e$$

Casos particulares

1. $$\underbrace{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}\cdots\overline{1a}_n}}}_{K\text{ veces}}=n+\underbrace{a+a+a+...+a}_{K\text{ veces}}$$

Finalmente,

$$\underbrace{\overline{1a}_{\overline{1a}\cdots\overline{1a}_n}}_{K\text{ veces}}=n+Ka$$

2. Sea

$$\overline{a1}_n=an+1$$

$$\overline{a1}_{\overline{a1}_n}=\overline{a1}_{(an+1)}=a(an+1)+1$$
$$=a^2n+a+1$$

$$\overline{a1}_{\overline{a1}\,\overline{a1}_n}=\overline{a1}_{(a^2n+a+1)}=a(a^2n+a+1)+1$$
$$=a^3n+a^2+a+1$$

En general,

$$\underbrace{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}\cdots\overline{1a}_{\overline{1a}_n}}}}_{K\text{ veces}}=a^K\times n+a^{K-1}+...+a^2+a+1$$

Aplicación 28

Si $11_{12_{13_{14}\ddots\overline{1(n-1)}_n}}=990$

calcule el máximo valor de

$$E=\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\left(\frac{n}{11}\right)}}}$$

Resolución

Por la propiedad de las bases sucesivas, se tiene que

$$1+2+3+\ldots+(n-1)+n=990$$

Recuerde

$$1+2+3+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\rightarrow \frac{n(n+1)}{2}=990$$

$$\underset{44}{n}\,\underbrace{(n+1)}_{45}=1980$$

$$\rightarrow n=44$$

Nos piden el máximo valor de

$$E=\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_4}}}$$

Para que sea máximo a, debe ser $a=3$.

Finalmente,

$$E=4+4\underset{3}{a}=16$$

$$\therefore E_{\text{máx}}=16$$

Aplicación 29

Si $\overline{mm}_{\underbrace{\overline{1m}_{\overline{1m}_{\ddots\overline{1m}}}}_{m\text{ veces}}}=600$

determine el valor de m.

Resolución

Analicemos la base.

$$\overline{mm}_{\underbrace{\overline{1m}_{\overline{1m}_{\ddots\overline{1m}}}}_{m\text{ veces}}}=10+m\times m=10+m^2$$

$$\rightarrow \overline{mm}_{(10+m^2)}=m(10+m^2)+m$$

$$\overline{mm}_{(10+m^2)}=m^3+11m$$

Luego,

$$m^3+11m=600$$

$$m(m^2+11)=5^2\times 2^3\times 3\ ;\ m<10$$

$$m\,(m^2+11)=2^3\times(3\times 5^2)$$

$$\therefore\ m=8$$

11 ▸ INTERVALO EN EL CUAL SE ENCUENTRAN LOS NUMERALES CON CIERTO NÚMERO DE CIFRAS

Hallemos los valores de los numerales en los siguientes casos:

- Numerales de tres cifras en base 10

  $\overline{abc}\in\{100;101;102;\ldots;999\}$

  $10^2\leq\overline{abc}\leq 999$; o también $10^2\leq\overline{abc}<10^3$

  Luego, la cantidad de numerales es

  $999-99=900$

- Numerales de cuatro cifras en base 5

  $\overline{abcd}_5\in\{1000_5;1001_5;\ldots;4444_5\}$

  $5^3\leq\overline{abcd}_5\leq 5^4-1$ o $5^3\leq\overline{abcd}_5<5^4$

  Luego, la cantidad de numerales es

  $624-124=500$

- Numerales de tres cifras en base 7

  $\overline{mnp}_7\in\{100_7;101_7;102_7;\ldots;666_7\}$

  $\rightarrow 100_7\leq\overline{mnp}_7\leq 666_7$

  $7^2\leq\overline{mnp}_7<7^3$

En general, si N_b tiene K cifras, sus valores se encontrarán en el siguiente intervalo:

$$\boxed{b^{K-1} \leq N_b < b^K}$$

Aplicación 30

¿Cuántos numerales se escriben con tres cifras en base 5 y 7 simultáneamente?

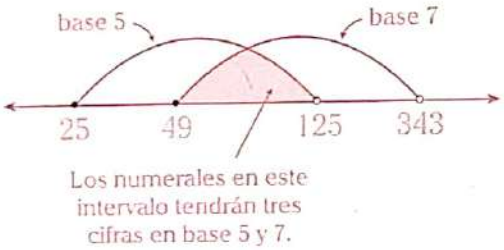
Resolución

Se tiene que

$$N=\overline{abc}_5=\overline{mnp}_7$$

Entonces

- $5^2 \leq \overline{abc}_5 < 5^3 \rightarrow 25 \leq \overline{abc}_5 < 125$
- $7^2 \leq \overline{mnp}_7 < 7^3 \rightarrow 49 \leq \overline{mnp}_7 < 343$



Luego, los valores de N estarán comprendidos desde 49 hasta 124.

$\rightarrow$ (cantidad de numerales) $=124-48=76$

Por lo tanto, hay 76 numerales que se escriben con tres cifras en bases 5 y 7.

Aplicación 31

Determine la cantidad de números impares que se escriben con 3 cifras en el sistema senario y con 4 cifras en el sistema quinario, simultáneamente.

Resolución

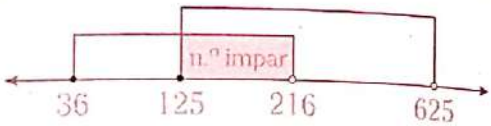
Del problema tenemos

$$\text{n.º impar}=\overline{abc}_6=\overline{mnpq}_5$$

Además, sabemos que

$$\underbrace{\overline{abc}_6}_{6^2 \leq \text{n.º impar} < 6^3} = \underbrace{\overline{mnpq}_5}_{5^3 \leq \text{n.º impar} < 5^4}$$

Luego,



$$\text{n.º impar: } \underbrace{125;\ 127;\ 129;\ ...;\ 215}_{45 \text{ números}}$$

Por lo tanto, existen 45 números.

Aplicación 32

¿En cuántos sistemas de numeración se puede expresar 251 con tres cifras?

Resolución

Del problema se tiene que

$$251=\overline{abc}_n$$

Se debe calcular la cantidad de valores de n.

$$251=\underbrace{\overline{abc}_n}_{n^2 \leq 251 < n^3}$$

$$\underbrace{n^2 \leq 251}_{...;\ 14;\ 15} \wedge \underbrace{251 < n^3}_{7;\ 8;\ 9;\ ...}$$

Entonces, 7 es mínimo y 15 es máximo.

n: 7; 8; 9; 10; 11; 12; 13; 14; 15

Por lo tanto, existen 9 sistemas.

12 ▸ CASOS ESPECIALES DE CAMBIO DE BASE

Primer caso: De base n a base n^K; $K \in \mathbb{Z}^+$

Se siguen los siguientes pasos:

1. Se forman grupos de K cifras a partir del orden uno.
2. Cada grupo formado se descompone polinómicamente, dicho resultado es la cifra en la nueva base n^K.

▸▸ Observación

Si no todos los grupos tienen K cifras, se completa el primer grupo de la izquierda con ceros a su izquierda hasta tener K cifras.

Ejemplos

- 10202112_3 en el sistema nonario

  Como $9=3^2$, cada grupo se formará con dos cifras.

10	20	21	12_3
$1\times3+0$	$2\times3+0$	$2\times3+1$	$1\times3+2$
3	6	7	5_9

$\rightarrow$ $10202112_3=3675_9$

- 10110011101111_2 en el sistema octanario

  Como $8=2^3$, cada grupo debe tener tres cifras.

  Para obtener las cifras respectivas en base 8, cada bloque se descompone polinómicamente en base 2 y el resultado será la cifra en base 8.

0 10	110	011	101	111_2
$1\times2+0$	$1\times2^2+1\times2$	$1\times2+1$	$1\times2^2+1$	$1\times2^2+1\times2+1$
2	6	3	5	7_8

$\rightarrow$ $10110011101111_2=26357_8$

Segundo caso: De base n^K a base n; $K\in\mathbb{Z}^+$

Se siguen los siguientes pasos:

1. Cada cifra del numeral de la base n^K genera un grupo de K cifras en base n.
2. Las cifras de cada grupo se obtienen por divisiones sucesivas entre n.

> **Observación**
> Si las divisiones no generan K cifras, se completará con ceros a la izquierda.

Ejemplos

- 5207_9 en el sistema ternario

  Como $9=3^2$, cada cifra del numeral de la base 9 origina 2 cifras en la base 3.

5	2	0	7_9
5 | 3 → 2 1	2 | 3 → 2 0	0 | 3 → 0 0	7 | 3 → 1 2
1 2	0 2	0 0	$2\ 1_3$

$\rightarrow$ $5207_9=12020021_3$

- 610527_8 en el sistema binario

6	1	0	5	2	7_8
6 | 2 → 0 3 | 2 → 1 1	1 | 2 → 1 0 | 2 → 0 0	0 | 2 → 0 | 2 → 0	5 | 2 → 1 2 | 2 → 0 1	2 | 2 → 0 1 | 2 → 1 0	7 | 2 → 1 3 | 2 → 1 1
110	001	000	101	010	111_2

$\rightarrow$ $610527_8=110001000101010111_2$

Aplicación 33

Si el numeral 12100102010211_n se expresa en base n^3, la suma de cifras aumenta en 38. Calcule n.

Resolución

Veamos la suma de cifras del numeral expresado en base n.

$$\text{suma de cifras}=1+2+1+0+0+1+0+2+0+1+0+2+1+1$$

$$\text{suma de cifras}=12$$

Según el dato, al expresar en base n^3, la suma de cifras aumenta en 38, es decir, será 50 (12+38).

Ahora llevemos el numeral de base n a base n^3, por cambio de base especial.

12	100	102	010	211_n
$(n+2)$	n^2	(n^2+2)	n	$(2n^2+n+1)_{(n^3)}$

Tenemos lo siguiente:

$$(n+2)+n^2+(n^2+2)+n+(2n^2+n+1)=50$$

$$4n^2+3n+5=50$$

$$4n^2+3n=45$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 3}}{n}\underbrace{(4n+3)}=\underset{\times 15}{45}$$

$\therefore\ n=3$

Aplicación 34

De la siguiente igualdad

$\overline{abc211}_4=\overline{(27)(\overline{mn})}_{64}$

determine $a+b+c+m+n$.

Resolución

Realicemos la siguiente conversión:

$\overline{abc211}_4$ a base 4^3

$$\rightarrow\ \underbrace{\overline{abc}}_{\overline{abc}_4}\ \vdots\ \underbrace{211}_{211_4}{}_4$$

Luego, $\overline{(\overline{abc}_4)(211_4)}_{64}=\overline{(27)(\overline{mn})}_{64}$

$\rightarrow\ \overline{abc}_4=27\ \wedge\ 211_4=\overline{mn}$

$$\begin{array}{r|l} 27 & 4 \\ \hline 3 & 6 \ \ 4 \\ \hline & 2 \ \ 1 \end{array}$$

$2\times 4^2+1\times 4+1=37$

$37=\overline{mn}$

$\overline{abc}_4=123_4$

$\therefore\ a+b+c+m+n=16$

Aplicación 35

Si el numeral 213111_n se expresa en base n^3, se obtiene un numeral cuya diferencia de cifras es 18. Calcule el valor de n.

Resolución

Para cambiar el numeral de base n a la base n^3, hay que separar en bloques de tres cifras a partir del menor orden.

$$213\ \vdots\ 111_n$$

Cada bloque se descompone polinómicamente.

$$\underbrace{213}_{(2n^2+n+3)}\ \vdots\ \underbrace{111_n}_{(n^2+n+1)}$$

Así obtenemos el siguiente numeral:

$$\overline{(2n^2+n+3)(n^2+n+1)}_{(n^3)}$$

Por dato, sabemos que

$$(2n^2+n+3)-(n^n+n+1)=18$$

$$n^2+2=18$$

$$n^2=16$$

$\therefore\ n=4$

Aplicación 36

Dada la siguiente igualdad:

$\overline{ab32mn}_5=\overline{(22)(\overline{pq})(19)}_{25}$

determine el valor de $a+b+m+n+p+q$.

Resolución

Para cambiar el numeral de base 5 a base 25, se debe separar en bloques de 2 en 2 a partir del menor orden.

$$\overline{a\ b\ \vdots\ 3\ 2\ \vdots\ m\ n}_5$$

Cada bloque se descompone polinómicamente.

$$\overline{\underbrace{a\ b}_{5a+b}\ \vdots\ \underbrace{3\ 2}_{3(5)+2}\ \vdots\ \underbrace{m\ n}_{5m+n}}_5$$

De ello tenemos

$$\overline{(5a+b)(17)(5m+n)}_{25}=\overline{(22)(\overline{pq})(19)}_{25}$$

Luego,

- $\underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{5a}+\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{b}=22\ \rightarrow\ a=4\ \wedge\ b=2$
- $17=\overline{pq}\ \rightarrow\ p=1\ \wedge\ q=7$

- $5\underset{3}{m}+\underset{4}{n}=19 \rightarrow m=3 \wedge n=4$

$\therefore\ a+b+m+n+p+q=21$

Aplicación 37

Se tiene la siguiente igualdad:

$$\underbrace{\overline{aaa...a}}_{a\text{ cifras}}{}_{(a+1)}=\overline{bbba}$$

Calcule $a\times b$.

Resolución

Se observa que el numeral de cifras máximas tendrá que ser cambiado al sistema de base diez.

$$\underbrace{\overline{aaa...a}}_{a\text{ cifras}}{}_{(a+1)}=(a+1)^a-1$$

Entonces

$$(a+1)^a-1=\overline{bbba}$$

$$(a+1)^a=\overline{bbb(a+1)}$$

Analizamos potencias.

- $4^3=64$ No cumple
- $5^4=625$ No cumple
- $6^5=7776$ Sí cumple
- $7^6=117649$ No cumple

La potencia que cumple con la condición es

$$6^5=(a+1)^a=\overline{bbb(a+1)}=7776$$

De ello,

$$a=5 \wedge b=7$$

$$\therefore\ a\times b=35$$

Aplicación 38

Sea la igualdad

$$\overline{ab}\,\overline{ac}\,\overline{ad}\,\overline{ae}_n=\underbrace{\overline{aa...a}}_{9\text{ cifras}}{}_2$$

Calcule el valor de $b+c+d+e+n$

Resolución

Del numeral $\underbrace{\overline{aa...a}}_{9\text{ cifras}}{}_2$

se observa que la primera cifra no debe ser cero y tiene que ser menor que dos.

$$\rightarrow\ 0<\underset{1\text{ (único valor)}}{a}<2$$

Reemplazamos en la expresión original.

$$\overline{1b}\,\overline{1c}\,\overline{1d}\,\overline{1e}_n=\underbrace{111...11}_{9\text{ cifras}}{}_2$$

Aplicamos la propiedad de las bases sucesivas en el primer numeral, y en el segundo aplicamos la propiedad del numeral de cifras máximas.

$$\rightarrow\ n+e+d+c+b=2^9-1$$

$$\therefore\ b+c+d+e+n=511$$

Aplicación 39

Si se cumple que

$$M=\overline{abcd}_4=\overline{mnpqr}_3$$

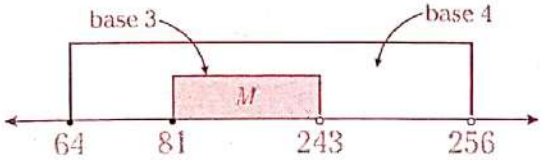
Determine la cantidad de valores que asume M.

Resolución

Se observa que el valor de M tiene que cumplir de manera simultánea tanto en base 4 como en base 3. Además, por propiedad de los intervalos tenemos:

$$M=\underbrace{\overline{abcd}_4}_{4^3\le M<4^4}=\underbrace{\overline{mnpqr}_3}_{3^4\le M<3^5}$$

Ubicamos los valores en una recta real.



De la recta, tenemos los siguientes valores de M:

$$M:\ \underbrace{81;\ 82;\ 83;\ ...;\ 242}_{162\text{ valores}}$$

Por lo tanto, M puede tomar 162 valores.

LECTURA

La numeración antigua egipcia

Una de las numeraciones más antiguas es la egipcia. Data aproximadamente de hace 7000 años, es decir, de más de 3000 años antes de nuestra era. En el transcurso de los tres primeros milenios sufrió cambios insignificantes. Relacionémonos más de cerca con dicha numeración antigua y fijemos nuestra atención en la forma en que se representaban en ella los signos numéricos; además, veamos cómo con ayuda de ellos se escribían los números.

En la numeración egipcia existían signos especiales (jeroglíficos) para los números uno, diez, cien, mil, diez mil, cien mil, un millón. Estos signos son los siguientes:

1 10 100 1000 10 000 100 000 1 000 000

Estos signos especiales (jeroglíficos) eran utilizados por los antiguos egipcios para la notación de los números.

Para representar, por ejemplo, el número entero 23 145, era suficiente escribir en serie dos jeroglíficos de diez mil, luego tres de mil, uno de cien, cuatro de diez y cinco para las unidades. El resultado es el siguiente:

Escritura del número 23 145 en el sistema de numeración egipcio.

Estos símbolos, en la escritura, no podían aparecer más de nueve veces en cada número. En el sistema egipcio de numeración no había signo alguno para el cero. Este ejemplo es suficiente para aprender a escribir los números tal y como los representaban los antiguos egipcios. Este sistema de numeración es muy simple y primitivo. Es un sistema decimal puro, puesto que en la representación de los números enteros se emplea el principio decimal conforme al orden clase. Hay que notar que cada signo numérico representa solamente un número; por ejemplo, el signo para las decenas (ver el primer gráfico) denota solamente diez unidades y no diez decenas o diez centenas, lo que pone en evidencia por qué el sistema de numeración egipcio no era posiciones.

Tomado de PERELMAN, Yakov. *Aritmética recreativa.*

Problemas resueltos

Problema 1

Los siguientes numerales están correctamente representados:

$\overline{b2d}_5$; $\overline{a1a1}_b$; $\overline{acc}_d$; $\overline{a2mb}_c$

Determine el valor de $a\times d+b\times c$.

Resolución

Como los numerales están correctamente representados, se cumple que

base > cifra

→	$\overline{b2d}_5$;	$\overline{a1a1}_b$;	$\overline{acc}_d$;	$\overline{a2mb}_c$
	$b<5$	$a<b$	$a<d$	$a<c$
	$d<5$	$0<a$	$c<d$	$m<c$
				$b<c$

Se observa que

$$\underset{1}{0}<\underset{2}{a}<\underset{3}{b}<\underset{4}{c}<d<5$$

$\therefore\ a\times d+b\times c=10$

Problema 2

Corrija los siguientes numerales y determine la suma de cifras de cada uno.

I. $(10)182_5$

II. $5(-3)3(-9)_8$

III. $\overline{20(2n+3)1(3n)}_n$; $n>5$

Resolución

I.

orden 5	orden 4	orden 3	orden 2	orden 1
	$\underbrace{10}_{2(5)+0}$	1	$\underbrace{8}_{1(5)+3}$	2_5

pasa 2 grupos de 5 y quedan 0 unidades

pasa 1 grupo de 5 y quedan 3 unidades

→ $(10)182_5=20232_5$

Por lo tanto, la suma de sus cifras es 9.

II.

orden 4	orden 3	orden 2	orden 1
$\underbrace{5}_{4+1}$	(-3)	$\underbrace{3}_{1+2}$	$(-9)_8$

regresa al orden 3 y se convierte en 8

pasa al orden 1 y se convierte en 16

Luego,

$$4(8-3)1(16-9)_8=4517_8$$

Por lo tanto, la suma de sus cifras es 17.

III.

orden 5	orden 4	orden 3	orden 2	orden 1
2	0	$(2n+3)$	1	$(3n)_n$

pasa dos grupos de n y queda 3

pasa 3 grupos de n queda cero

→ $\overline{20(2n+3)1(3n)}_n=22340_n$

Por lo tanto, la suma de sus cifras es 11.

Problema 3

Cierto juego de lotería tiene sus billetes marcados con 5 cifras en el sistema de base 11. Algunos billetes tienen la siguiente forma:

$\overline{(2m+1)m(3a+1)(b+2)(5-b)}_{11}$

¿Cuántos billetes tienen esta forma?

Resolución

Solo hay que saber cuántos numerales de la forma dada existen.

solo se analiza una de ellas

solo se analiza una de ellas

$\overline{(2m+1)m(3a+1)(b+2)(5-b)}_{11}$

no afecta a otra cifra

Luego,

$$\overline{(2m+1)m\underbrace{(3a+1)}\underbrace{(b+2)}(5-b)}_{11}$$

↓	0	0
0	1	1
1	2	2
2	3	3
3	⋮	4
4	9	5
	(10)	6
		7
5 ×	11 ×	8

Para el valor de b, se tiene que

- Si $b+2=0$,
  $b=-2 \quad \rightarrow \quad 5-b=7$
- Si $b+2=1$,
  $b=-1 \quad \rightarrow \quad 5-b=6$
- Si $b+2=2$,
  $b=0 \quad \rightarrow \quad 5-b=5$

así sucesivamente hasta $b+2=7$.

$\therefore \quad 5\times11\times8=440$ numerales

Problema 4

Pedro ha protegido una cuenta en internet con una clave de 5 cifras en base 12. Él no recuerda las cifras, pero tiene un apunte de la clave, que es de la siguiente manera:

$$\overline{(2a+1)(a-3)(a^2)(2c-b)(a+b)}_{12}$$

Además, tiene una nota que señala que su clave es capicúa. Halle el valor de $a+b+c$.

Resolución

Si la clave es capicúa, entonces las cifras equidistantes de los extremos son iguales.

$$\overline{(2a+1)(a-3)(a^2)(2c-b)(a+b)}_{12}$$

Además, el único valor de a es 3, ya que $a^2<12$.

$$\rightarrow \quad \overline{\underbrace{(2a+1)}_{7}\underbrace{(a-3)}_{0}\underbrace{(a^2)}_{9}(2c-b)(a+b)}_{12}$$

Luego,

- $a+b=7$
  $b=4$
- $2c-b=0$
  $c=2$

$\therefore \quad a+b+c=9$

Problema 5

Una familia está dedicada a la crianza de animales y tienen $\overline{aba}$ animales. Debido a una epidemia, se mueren $\overline{ab}$ vacas, $\overline{10a}$ carneros y $\overline{b0}$ conejos, hasta que al final quedan $\overline{7(3a)}$ animales. Luego de la epidemia pasan dos años y la familia llega a tener $\overline{baa}$ animales, dado que se reprodujeron rápidamente. ¿Cuántos animales habrán nacido en esos dos años que pasaron?

Resolución

Según los datos, tenemos que

$$\overbrace{\overline{aba}}^{\text{total inicio}} - \overbrace{\overline{ab} - \overline{10a} - \overline{b0}}^{\text{mueren}} = \overbrace{\overline{7(3a)}}^{\text{total final}}$$

Como $3a \leq 9$, entonces $1 \leq a \leq 3$.

Descomponemos polinómicamente.

$$100a-10a-b-100=70+3a$$

$$\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{87a}=\underset{\substack{\downarrow \\ 4}}{170+b}; \quad b<9$$

Luego de dos años la cantidad de animales es

$$\overline{baa}=422$$

Al finalizar la epidemia había

$$\overline{7(3a)}=76$$

Por lo tanto, en los dos años que pasaron nacieron 346 animales.

Problema 6

A una manifestación asistieron $\overline{abcd}$ personas, de las cuales $24\times\overline{cd}$ son varones y $51\times\overline{ab}$ son mujeres. ¿Cuántas personas asistieron a dicha manifestación?

Resolución

Se tiene

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{total de}\\ \text{personas}\end{pmatrix}}_{\overline{abcd}}=\underbrace{\begin{pmatrix}\text{n.}^{\text{o}}\text{ de}\\ \text{varones}\end{pmatrix}}_{24\overline{cd}}+\underbrace{\begin{pmatrix}\text{n.}^{\text{o}}\text{ de}\\ \text{mujeres}\end{pmatrix}}_{51\overline{ab}}$$

Descomponemos en bloques.

$$100\overline{ab}+\overline{cd}=24\overline{cd}+51\overline{ab}$$

$$\rightarrow\ 49\overline{ab}=23\overline{cd}$$

De ello se tiene lo siguiente:

- $\overline{ab}=23$
- $\overline{cd}=49$

Por lo tanto, el total de personas es

$$\overline{abcd}=2349$$

Problema 7

Si $\overline{aba}=\overline{nnn}_7$; además, $E=a+b+n$, halle el valor de E.

Resolución

Del problema, expresemos $\overline{nnn}_7$ en base 10 mediante la descomposición polinómica.

$$\overline{nnn}_7=49n+7n+n=57n$$

$$\rightarrow\ \overline{aba}=57\times n$$

$$171=57\times 3$$

$$\rightarrow\ a=1\ \wedge\ b=7$$

Luego,

$$a+b+n=11$$

$$\therefore\ E=11$$

Problema 8

Si $\overline{mn}=\overline{abc}_5=\overline{cba}_7$, halle la suma de cifras de $\overline{nm}+\overline{ac}$

Resolución

Expresemos los numerales de base 5 y 7 en el sistema decimal descomponiendo polinómicamente los términos de la siguiente igualdad:

$$\overline{abc}_5=\overline{cba}_7$$

$$25a+5b+c=49c+7b+a$$

$$24a=48c+2b$$

$$12a=24c+b$$

$$12(a-2c)=b$$

De esta relación, se tiene que $b=0$, debido a que b es una cifra de base 5.

Luego, como $b=0$

$$\rightarrow\ a=2c\quad(a<5)$$

$$2\quad 1\ \rightarrow\ \overline{abc}_5=201_5=51=\overline{mn}$$

$$4\quad 2\ \rightarrow\ \overline{abc}_5=402_5=102$$

No puede ser, ya que en base 10 tiene tres cifras.

Se obtiene que $\overline{mn}=51$.

Además,

$$a=2\ \wedge\ c=1$$

Luego,

$$\underbrace{\overline{nm}}_{15}+\underbrace{\overline{ac}}_{21}=36$$

$$\therefore\ 3+6=9$$

Problema 9

Si se cumple que

$$\overline{abacabb}_n=\overline{19(13)m}_{(n^2)}$$

calcule $a+b+c+m\times n$.

Resolución

Por la forma de las bases, se debe trabajar con cambio de base especial.

$$\overline{a\,b\;a\,c\;a\,bb}_n=\overline{19(13)m}_{(n^2)}$$

De ello, se tiene que

- $a=1$
- $\overline{ba}_n=9$

  $nb=9-a=8$

  Además, $b<n$ (I)
- $\overline{ca}_n=13$

  $cn+1=13$

  $cn=12$ (II)

  De (I) y (II), se tiene que

  $n=4;\ \ b=2;\ \ c=3$
- $\overline{bb}_n=m$

  $22_4=m$

  $2(4)+2=10 \rightarrow m=10$

$\therefore\ a+b+c+m\times n=46$

Problema 10

Cuando el número 1175 se expresa en base n, se representa como 2227_n. Halle la suma de cifras del mayor número impar de seis cifras de la base n, en el que no todas las cifras son iguales al ser llevado a base 4.

Resolución

Del dato, se tiene que

$$1175_{10}=2227_n$$

$$\rightarrow\ 7<n<10$$

$$\downarrow$$

$$8$$

$$9$$

Observemos que si $n=9$, entonces

$$2227_9=2\times 9^3+\ldots$$

$$=1458+\ldots \quad \text{(se excede)}$$

$$\rightarrow\ n=8$$

Luego, el mayor número impar de seis cifras en base n, en el que no todas las cifras son iguales es

$$N=777775_8$$

Sumamos 2 para formar un numeral de cifras máximas.

$$N+2=777777_8$$

Por propiedad del numeral de cifras máximas,

$$N+2=8^6-1=4^9-1$$

$$N+2=4^9-1$$

$$N+2=333333333_4$$

$$N=333333331_4$$

Por tanto, la suma de cifras de N es

$$3\times 8+1=25$$

Problema 11

Se cumple que

$$14\underbrace{\overline{1a}\;\overline{1a}\;\overline{1a}\;\ddots\;\overline{1a_n}}_{10\ \text{numerales}}=16_{53_6};\ (n<10)$$

Calcule $a\times n$.

Resolución

Por la propiedad de bases sucesivas tenemos

$$14_{\overline{1a}\,\overline{1a}\,\overline{1a}\,\ddots\,\overline{1a_n}} = n+10a+4=16_{(53_6)}$$

10 veces

$\downarrow$ 33

Luego,

$$10a+n+4=16_{33}=33(1)+6$$

$$10a+n+4=39$$

$$10a+n=35;\quad (a<n<10)$$

3	5	Sí cumple
2	15	No cumple

$\therefore\ a\times n=15$

Problema 12

Determine la cantidad de números impares que se expresan con tres cifras en el sistema senario y con cuatro cifras en el sistema cuaternario, simultáneamente.

Resolución

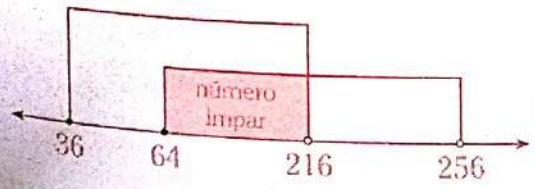
Del enunciado tenemos

número impar: $\overline{abc}_6=\overline{mnpq}_4$

Por propiedad de los intervalos

- $\underbrace{6^2}_{36} \le \overline{abc}_6 < \underbrace{6^3}_{216}$
- $\underbrace{4^3}_{64} \le \overline{mnpq}_4 < \underbrace{4^4}_{256}$

Luego tenemos



Entonces

$$64 \le \text{número impar} < 216$$

$\rightarrow$ números impares: $\underbrace{65;\ 67;\ 69;\ 71;\ ...;\ 215}_{76\ \text{números}}$

Por lo tanto, existen 76 números impares.

Problema 13

Determine la cantidad de sistemas de numeración par en el que 134 se pueda expresar con tres cifras.

Resolución

Del problema tenemos

$$134=\overline{abc}_n;\quad (n\text{: par})$$

Por propiedad de los intervalos

$$n^2 \le \underbrace{\overline{abc}_n} < n^3$$

$$n^2 \le 134 < n^3$$

De lo cual se tiene que

- $n^2 \le 134$

  $n \le 11{,}57...$

  $\downarrow$ 11 máximo

- $134 < n^3$

  $5{,}11... < n$

  $\downarrow$ 6 mínimo

$\rightarrow$ n: 6; 8; 10

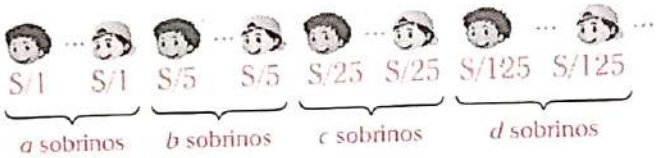
Por lo tanto, 134 se puede expresar con tres cifras en tres sistemas de numeración par.

Problema 14

A la casa de Pedro llegaron de visita sus sobrinos. Pedro decide darles de propina las siguientes cantidades: S/1; S/5; S/25; S/125; ..., así sucesivamente, con la condición de que no más de cuatro sobrinos reciban una misma cantidad. ¿Cuántos sobrinos llegaron de visita si el monto que repartió en total fue de S/653?

Resolución

Del problema tenemos



Además,

$$...+125d+25c+5b+1a=653$$

$$\underbrace{...d\times5^3+c\times5^2+b\times5+a}_{\overline{...dcba}_5}=653$$

$\rightarrow\ 653=\overline{...dcba}_5$

Luego,

$$\begin{array}{l|l} 653 & 5 \\ (3) & 130 \ |\ 5 \\ & (0)\ \ 26 \ |\ 5 \\ & \quad\ (1)\ \ 5 \ |\ 5 \\ & \qquad\ (0)\ \ (1) \end{array}$$

Por lo tanto, la cantidad de sobrinos es

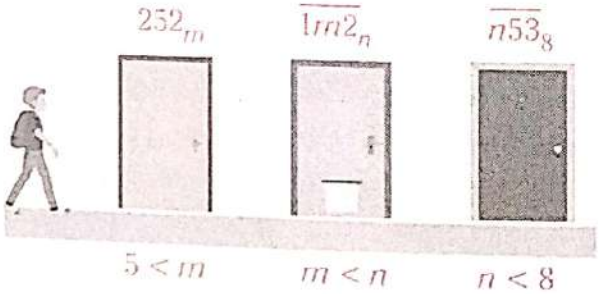
$$1+0+1+0+3=5$$

Problema 15

Dante, al pasar por una avenida, observa que en la puerta de tres viviendas están anotadas las siguientes direcciones: 252_m; $\overline{1m2}_n$ y $\overline{n53}_8$, y decide calcular el valor de $m\times n$. Determine dicho resultado si las numeraciones están correctamente escritas.

Resolución

Ya que se tienen numerales bien escritos, entonces



De lo anterior, $5<\underset{\underset{6}{\downarrow}}{m}<\underset{\underset{7}{\downarrow}}{n}<8$

$\therefore\ m\times n=42$

Problema 16

Carlos y Paulina reciben sus cheques el fin de mes. En el cheque de Carlos está impreso S/$\overline{1mm5}_n$; y en el de Paulina está impreso S/$\overline{c14}_8$. Si se sabe que ambos cobran la misma cantidad, calcule $m+n+c$.

Resolución

Sean los cheques de ambos

Si ambos cobran la misma cantidad, entonces

$$\overline{1mm5}_n=\underbrace{\overline{c14}_8}_{\text{par}}$$

Entonces $\overline{1mm5}_n$ es par.

De lo cual, se tiene que n es impar.

Además, $5<n<8$

$\rightarrow\ n=7$

Expresamos en base 10 los numerales

$$\overline{1mm5}_7=\overline{c14}_8$$

$$1\times7^3+m\times7^2+m\times7+5=c\times8^2+1\times8+4$$

$$348+56m=64c+12$$

$$336+56m=64c$$

$$42+7m=8c$$

$$\underset{\underset{2}{\downarrow}}{m}\qquad\underset{\underset{7}{\downarrow}}{c}$$

$\rightarrow\ m=2\ \wedge\ c=7$

$\therefore\ m+n+c=16$

Problema 17

Se tiene la siguiente igualdad:

$\overline{aba}_7=\overline{1(b+1)a}_9$

Calcule el valor de $a\times b$.

Resolución

Expresamos en base 10 los numerales de bases 7 y 9 mediante la descomposición polinómica.

$$\overline{aba}_7=\overline{1(b+1)a}_9$$

$$49a+7b+\cancel{a}=81+9(b+1)+\cancel{a}$$

$$49a+7b=81+9b+9$$

$$\underset{\text{par}}{49a}=\underbrace{90}_{\text{par}}+\underbrace{2b}_{\text{par}}$$

$\rightarrow$ $49a=90+2b$

2	4	Sí cumple
4	53	No cumple

Se observa que $b=53$ no es posible, ya que $b<7$.

$\rightarrow$ $b=4 \wedge a=2$

$\therefore$ $a\times b=8$

Problema 18

Si se cumple que

$\overline{a00}_9=\overline{aba}_8$

determine la suma de valores de $a+b$.

Resolución

Expresamos en base 10 ambos numerales mediante la descomposición polinómica.

$$\overline{a00}_9=\overline{aba}_8$$

$$81a+9\times 0+0=64a+8b+a$$

$$81a=65a+8b$$

$$16a=8b$$

$$2a=b$$

1	2	
2	4	
3	6	
4	8	No cumple

Se observa que b tiene que ser menor que 8.

$\rightarrow$ $a+b$: 3; 6; 9

Nos piden la suma de valores de $a+b$.

$\therefore$ $3+6+9=18$

Problema 19

Dada la siguiente igualdad:

$\overline{122abac}_4=\overline{a(\overline{am})n(n-1)}_{16}$

determine la suma de valores de $b+c$.

Resolución

Expresaremos el numeral de base 4 en la base 16 mediante cambio de base especial.

$$\overline{1\,|\,2\,2\,|\,a\,b\,|\,a\,c}_4$$

Descomponemos polinómicamente cada bloque y se igualan, respectivamente, a cada cifra correspondiente del numeral de base 16.

$$\overline{1\,|\,2\,2\,|\,a\,b\,|\,a\,c}_4=\overline{a(\overline{am})n(n-1)}_{16}$$

Luego,

- Las primeras cifras son iguales.
  $\rightarrow$ $a=1$
- $\overline{ab}_4=4a+b=n$
  $4+b=n$
- $\overline{ac}_4=4a+c=n-1$
  $4+c=n-1$
  $5+c=n$

Se observa que

$5+c=4+b$

$\rightarrow$ $1=b-c$

1	0	
2	1	
3	2	
4	3	No cumple

El valor de b no puede ser 4, ya que b es menor que 4.

$\rightarrow$ $b+c$: 1; 3; 5

Nos piden la suma de valores de $b+c$.

$\therefore$ $1+3+5=9$

Problema 20

Sea la expresión

$$\underbrace{\overline{(a-1)(a-1)...(a-1)}_a}_{16\text{ cifras}}=\underbrace{\overline{(b-1)(b-1)...(b-1)}_b}_{(b-1)\text{ cifras}}$$

Determine el mínimo valor de $a+b$.

Resolución

Se observa que ambos numerales son de cifras máximas. Entonces los cambiamos a base 10 por propiedad del numeral de cifras máximas.

- $\underbrace{\overline{(a-1)(a-1)...(a-1)}_a}_{16\text{ cifras}}=a^{16}-1$
- $\underbrace{\overline{(b-1)(b-1)...(b-1)}_b}_{(b-1)\text{ cifras}}=b^{(b-1)}-1$

Luego,

$$a^{16}-\cancel{1}=b^{(b-1)}-\cancel{1}$$

$$a^{16}=b^{(b-1)}$$

3	9
17	17
1089	33
⋮	⋮

Entonces los valores mínimos son

$a=3 \wedge b=9$

$\therefore$ $(a+b)_{\text{mín}}=12$

Problema 21

Determine qué cantidad de números enteros positivos que terminan en cifra 8 son tales que en base 5 se escriben con tres cifras y en base 3 se escriben con cuatro cifras.

Resolución

Del problema se entiende que los números que terminan en cifra 8 son tales que deben cumplir la igualdad en base 5 y base 3 de manera simultánea.

$\rightarrow$ $...8=\overline{abc}_5=\overline{mnpq}_3$

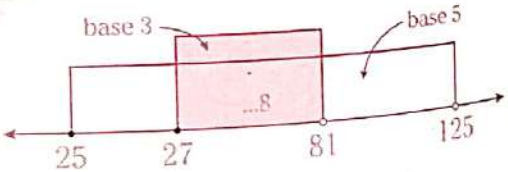
Por propiedad de los intervalos tenemos

- $5^2 \leq \overline{abc}_5 < 5^3$

  $25 \leq \overline{abc}_5 < 125$
- $3^3 \leq \overline{mnpq}_3 < 3^4$

  $27 \leq \overline{mnpq}_3 < 81$

Analizamos los valores en una recta numérica real.



Se observa que las soluciones se encuentran en la región sombreada.

$\rightarrow$ ...8: 28; 38; 48; 58; 68; 78

Por lo tanto, existen 6 enteros positivos que terminan en cifra 8 y que cumplen las condiciones del problema.

Test

1. Corrija los siguientes numerales e indique la mayor suma de sus cifras.
   - 106_4
   - $3(-1)1_9$

   A) 4 B) 11 C) 9
   D) 10 E) 12

2. Si los siguientes numerales están correctamente escritos:
   273_n; $\overline{1n2}_b$; $\overline{3mb}$
   calcule el valor de $n+b$.

   A) 17 B) 16 C) 15
   D) 18 E) 14

3. Represente B en el sistema de base cuatro e indique la suma de sus cifras.
   $B=3\times256+2\times64+3\times16+4+3$

   A) 11 B) 10 C) 9
   D) 12 E) 8

4. Se tiene el siguiente numeral capicúa:
   $\overline{(b+6)7(2m+3)(4m+1)}$
   Halle $m\times b$.

   A) 8 B) 9 C) 4
   D) 12 E) 6

5. Se tiene que $\overline{aaa}_3=\overline{b6}$.
   Calcule a^b.

   A) 27 B) 25 C) 4
   D) 5 E) 9

6. Se tiene que $\overline{abab}_n=15$.
   Halle $a+b+n$.

   A) 4 B) 2 C) 3
   D) 1 E) 5

7. Se cumple que $\overline{abb}_5=\overline{a0a}_6$.
   Calcule el máximo valor de $a+b$.

   A) 5 B) 4 C) 3
   D) 2 E) 6

8. Se tiene la siguiente expresión:
   $\overline{aaaaa}_{(a+1)}=242$
   Halle el valor de a^a.

   A) 9 B) 25 C) 16
   D) 4 E) 36

9. Sea el caso
   $$\overline{1a}_{\overline{1a}_{\overline{1a}_5}}=12_{12_{13}}$$
   Halle el valor de a.

   A) 2 B) 3 C) 4
   D) 1 E) 0

10. Se tiene $113=\overline{abc}_n$.
    Halle la suma del mínimo y máximo valor de n.

    A) 15 B) 5 C) 12
    D) 10 E) 14

CLAVES: 1 B 2 A 3 D 4 E 5 C 6 A 7 E 8 D 9 B 10 A

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Los siguientes numerales están correctamente escritos: $\overline{m2m}_a$; $\overline{ama}_b$; $\overline{bam}_c$; $\overline{abc}_6$
Calcule $a\times c+b$.

A) 12 B) 18 C) 15
D) 19 E) 20

2. Se tienen los siguientes numerales correctamente escritos: $\overline{(a-3)b}_c$; $\overline{ac2}_7$; $\overline{ma3}_b$
Calcule $a\times b\times c$.

A) 110 B) 120 C) 100
D) 15 E) 20

3. Corrija los siguientes numerales e indique la suma de sus cifras.
- $5(13)18_6$
- $20(-4)3(-10)_7$

Indique el mayor de los resultados.

A) 15 B) 12 C) 11
D) 7 E) 8

4. Un boleto de lotería tiene la siguiente numeración: $\overline{abab}_8$. ¿Cuántos boletos con dicha numeración existen?

A) 3584 B) 64 C) 72
D) 49 E) 56

5. Las páginas de un libro fueron numeradas en base 9; y algunas páginas tienen la forma $\overline{(2m+1)a(b+3)}_9$. ¿Cuántas páginas tienen dicha numeración?

A) 216 B) 640 C) 648
D) 512 E) 630

6. Karina tiene $\overline{ba}$ gallinas y m patos. ¿Cuántas aves tiene Karina si el numeral $\overline{(a+b)(b-2)(m-b)(m-5)(2a+b)}_7$ es capicúa?

A) 11 B) 5 C) 29
D) 20 E) 24

7. Se tiene que
$E=7\times4^4+5\times4^2+6+7\times4+12\times4^3$
Exprese E en base 4 e indique la suma de sus cifras.

A) 5 B) 10 C) 7
D) 6 E) 9

8. Si se cumple que
$\overline{abab}_n=434_5$
halle n^b+a.

A) 13 B) 12 C) 64
D) 17 E) 65

9. Se cumple que $\overline{mmm}=3030_m$. Halle m.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 8

10. Dada la siguiente igualdad:
$\overline{aaba0ab}_3=\overline{a(16)c}_{27}$
halle $c+b-a$.

A) 6 B) 9 C) 7
D) 10 E) 5

11. Si 12101121_n es expresado en base n^2, donde la suma de sus cifras es 29, halle el valor de n.

A) 4 B) 5 C) 6
D) 3 E) 7

12. Dada la igualdad

$$\underbrace{\overline{77...7}}_{8\text{ cifras}}{}_{8} = \underbrace{\overline{mm...m}}_{12\text{ cifras}}{}_{(m+1)}$$

halle m.

A) 3 B) 2 C) 1
D) 4 E) 5

13. Dada la expresión

$$\overline{bb}_{\overline{1b}_{\overline{1b}_{\overline{1b}_{\ddots_{\overline{1b}}}}}} = 305$$

10 numerales

halle b.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 2 E) 5

14. Determine la cantidad de números pares que se escriben con tres cifras en el sistema heptanario y con cuatro cifras en el sistema quinario, simultáneamente.

A) 109 B) 108 C) 100
D) 110 E) 98

15. Si $\overline{abab}_n=221$, halle el número de sistemas de numeración en los que $(a+b+n)$ se exprese como un numeral de dos cifras.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 8 E) 11

16. Dado que $\overline{aaaa}_5=\overline{bc8}$, halle $a+b+c$.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

17. Halle n, si

$$\overline{nn}_{\overline{1n}_{\ddots_{\overline{1n}_{\overline{1n}}}}} = 747$$

n numerales

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

18. Si $\overline{3ab}_c=\overline{2ba}_5$, calcule $(a+b+c)^2$.

A) 16 B) 25 C) 36
D) 49 E) 81

19. Un médico observa que la cantidad de pacientes que visitan su consultorio en un determinado tiempo se distribuye de la siguiente manera: algunos pacientes vienen una sola vez; otros, 4 veces; otros, 16 veces, y así sucesivamente. Además, como máximo tres pacientes han visitado el consultorio una misma cantidad de veces. Si cada paciente visita una sola vez en cada cita, halle cuántos pacientes tiene en total el doctor. Considere que hubo en total 454 citas.

A) 3 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

20. Un numeral de tres cifras consecutivas crecientes en base 9 se expresa en base 8 con tres cifras, de las cuales la primera es la cifra central del numeral inicial. ¿Cuántos números cumplen con esta condición?

A) 1 B) 3 C) 2
D) 5 E) 6

21. El numeral 102110210110001 con base n se expresa en base n^3 y resulta que la suma de cifras excede en 46 unidades a la suma de cifras del número original. ¿En cuántos sistemas de numeración n^6 se expresa con cinco cifras?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 8

Nivel intermedio

22. En la clase de Aritmética
- Rosa escribe $\overline{(a-3)2}_{(b-3)}$
- Pedro escribe $\overline{x6m}_a$
- Grecia escribe $\overline{mbx}_c$
- Karina escribe $\overline{(b+1)(a-2)c}$

El profesor indica que los numerales están correctamente escritos. Calcule $a+b+c$.

A) 72 B) 20 C) 21
D) 28 E) 24

23. Un *hacker* obtuvo una clave cifrada de la forma $\overline{(2n+3)(-1)(3n+1)0n}_n$, con $n>6$. Si para obtener las cifras se tiene que corregir dicho numeral, ¿cuál es la suma de cifras de la verdadera clave?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 11

24. Determine la cantidad de numerales que tienen la siguiente forma:

$$\overline{ba(a+3)\left(\frac{b}{2}\right)}_{11}$$

A) 40 B) 88 C) 121
D) 32 E) 120

25. Halle $m+c+b$ si

$$\overline{(3m+2)(2b+m)(\sqrt{c})(b+m)(b+3)(m+6)}_9$$

es capicúa.

A) 12 B) 9 C) 10
D) 11 E) 8

26. Se cumple que
$B=2n^3+(2n+1)n+(n+3)n^2+5$
Exprese B en base n $(n>6)$ e indique la suma de sus cifras.

A) 10 B) 12 C) 15
D) 14 E) 7

27. Una ciudad tiene $\overline{mnpq}$ habitantes, de los cuales $33\times\overline{mn}$ son varones y $32\times\overline{pq}$ son mujeres. Calcule $\overline{pq}-\overline{mn}$.

A) 98 B) 31 C) 67
D) 30 E) 36

28. Si $\overline{abmn}=70\overline{mn}+64\overline{ab}$, ¿cuántos numerales $\overline{abmn}$ cumplen dicha condición?

A) 1 B) 4 C) 3
D) 2 E) 5

29. Se cumple que
$\overline{mnp}=4(\overline{np}-5m)$
Calcule $m+n+p$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 11

30. Pedro dice que la última página del libro de aritmética es $\overline{aaa}_9$; mientras que Pamela dice que la última página del libro es $\overline{m04a}_5$. Si ambos dicen la verdad, halle m^a.

A) 8 B) 9 C) 27
D) 4 E) 64

31. Dada la siguiente igualdad:
$\overline{aaa}=2160_a$
calcule el valor de a.

A) 8 B) 6 C) 5
D) 7 E) 9

32. Se tiene que
$\overline{4b2}_8=\overline{2cc}_{12}$
Halle $b+c$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 7 E) 11

33. Se cumple que
$\overline{10abba11}_3=\overline{m75n}_9$
Halle $(a+b)\times(m+n)$.

A) 18 B) 48 C) 14
D) 6 E) 21

34. Se tiene que
$\overline{abcabbaac}_4=\overline{(30)(\overline{ba})(\overline{cc})}_{64}$
Calcule b^c+a.

A) 5 B) 28 C) 10
D) 9 E) 11

35. El menor numeral del sistema heptanario, cuya suma de cifras es 60, es representado en base 49. Halle la suma de cifras de este último numeral.

A) 120 B) 240 C) 5
D) 48 E) 100

36. Se tiene que
$\underbrace{\overline{aa...a}}_{a \text{ cifras}}{}_{(a+1)}=\overline{mmmb}$
Halle $a+m+b$.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 14 E) 18

37. Si se cumple que $\overline{aaaa}_{(a+1)}=\overline{110a}_6$ halle a.

A) 1 B) 3 C) 4
D) 2 E) 5

38. Se cumple que
$\overline{1a}_{\overline{1b}_{\overline{1c}_{\overline{1d}_{\overline{1e}_8}}}} = 10_{20_{30_{40_5}}}$
Halle $a+b+c+d+e$.

A) 72 B) 120 C) 112
D) 720 E) 102

39. Determine la cantidad de números capicúas que se expresan con tres cifras en base 8 y con cuatro cifras en base 6, simultáneamente.

A) 38 B) 19 C) 29
D) 28 E) 30

Nivel avanzado

40. Si $\overline{7a1}_n=\overline{60b}_9$, halle $(a+b)$.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

41. Convierta el mayor numeral de tres cifras diferentes de base $(n+1)$ a base $(n-1)$. Dé como respuesta el producto de cifras del numeral obtenido si $n>12$.

A) 164 B) 196 C) 229
D) 190 E) 198

42. ¿Cuántos numerales de la forma
$\overline{a\left(\frac{a}{3}\right)(\sqrt{b})(a-2)}_7$ existen?

A) 63 B) 7 C) 21
D) 100 E) 14

43. Un libro tiene 1147 páginas numeradas en base n. Si la última numeración es $\overline{pqpq}_n$, halle $p+q+n$.

A) 12 B) 11 C) 13
D) 10 E) 14

44. En la clase de Aritmética, Pedro y Rosa representaron un mismo número en bases consecutivas. Ellos escribieron, respectivamente, 103 y 124. Halle una de las bases.

A) 4 B) 3 C) 6
D) 8 E) 9

45. Si $\overline{abc}=\overline{2c1c}_7$, calcule $a+b+c$.

A) 8 B) 15 C) 3
D) 4 E) 16

46. Dada la igualdad

$\overline{20d5}_m=\overline{(m+1)0p}_8$

calcule el máximo valor de $m+d+p$.

A) 8 B) 9 C) 16
D) 7 E) 15

47. Dada la expresión

$\overline{a(b+1)5}_n=\overline{(b+1)bn}_7$

calcule $a\times b\times n$.

A) 48 B) 30 C) 12
D) 36 E) 84

48. Si se cumple que

$\overline{aabbcc}_n=\overline{5(\overline{a0})(\overline{a5})}_{(n^2)}$

calcule $a\times b\times c\times n$.

A) 24 B) 20 C) 12
D) 10 E) 6

49. Si

$$\overline{1a}\,\overline{1b}\,\overline{1a}\,\overline{1b}\cdots = \overline{10b}_9$$

14 numerales

calcule $b-a$.

A) 11 B) 2 C) 3
D) 1 E) 4

50. ¿En cuántos sistemas de numeración 213 se expresa con tres cifras?

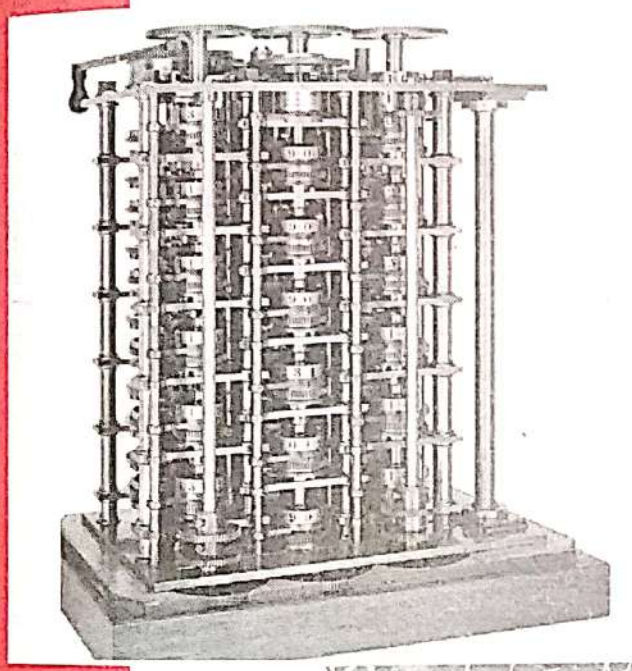
A) 14 B) 6 C) 8
D) 9 E) 7

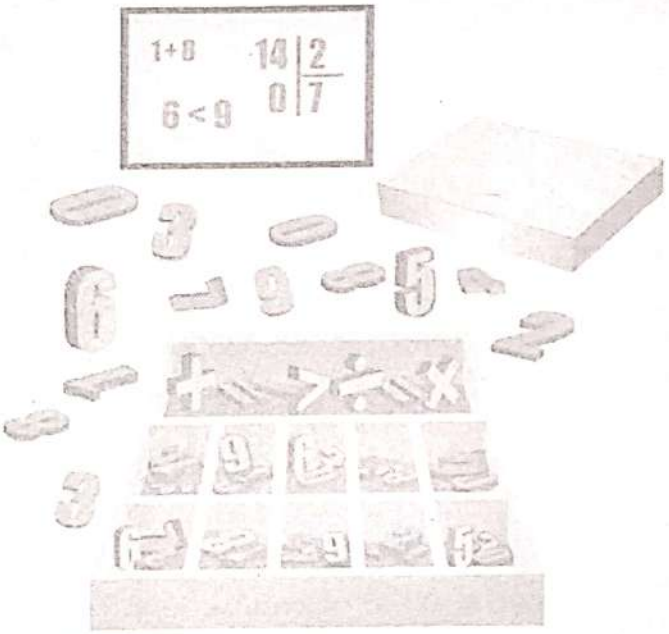
51. ¿En cuántas bases impares se representa 613 con cuatro cifras?

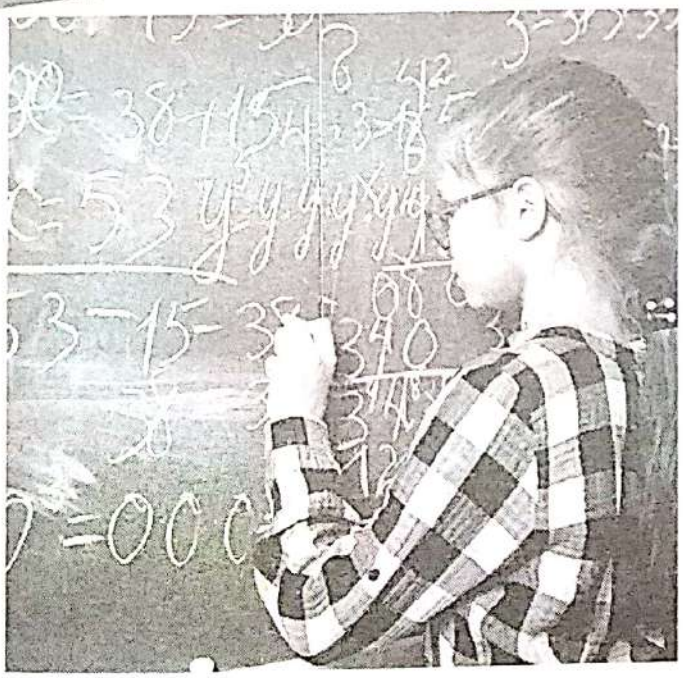
A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

Capítulo

V







Operaciones básicas en el conjunto $\mathbb{Z}^+$

Juan Esqueche Paiconcial

CAPÍTULO V

OPERACIONES BÁSICAS EN EL CONJUNTO $\mathbb{Z}^+$

Objetivos

- Reconocer y aplicar las propiedades que cumplen los elementos que forman parte de las operaciones básicas.
- Aprender a realizar las operaciones básicas en diferentes sistemas de numeración.
- Determinar la cantidad de cifras que podría tener el producto y el cociente, conociendo la cantidad de cifras de cada uno de sus componentes.

Introducción

Ante la necesidad de realizar el intercambio de los productos del trabajo, surge la necesidad de agregar o disminuir objetos en cada transacción. Esto originó el desarrollo de las operaciones matemáticas conforme aparecieron necesidades aún mayores, como manejar cantidades mucho más grandes, y permitió que se conocieran las operaciones matemáticas, desde las más elementales hasta las más complejas.

Con las operaciones aritméticas no solo se describe la realidad circundante, sino que se actúa sobre ella transformándola. En efecto, si un niño tiene cinco soles en el bolsillo, el número aquí mide una cantidad de una determinada magnitud (dinero). Si su padre le da diez soles, este nuevo número vuelve a medir otra cantidad de la misma magnitud. Con ello se describen dos cantidades presentes en la situación. Sin embargo, el niño transforma la situación en otra reuniendo las dos cantidades para dar lugar a otra que le permite afirmar lo siguiente: Tengo quince soles en total. Con ello se permite describir numéricamente una nueva situación, una situación (la del total de sus ahorros) conseguida al transformar dos situaciones previas.

¿De dónde provienen los signos de las operaciones? Por ejemplo, en cuanto al signo + y –, posiblemente fueron utilizados por los comerciantes como marcas que indicaban el exceso (+) o la falta (–). Fue Widmann (Alemania), quien, en 1489, al publicar el libro *Aritmética mercantil*, utilizó los signos + y – para indicar exceso y déficit, que al poco tiempo se comenzó a emplear como signos para la adición y sustracción. En 1631, William Oughtred (Inglaterra) usa por primera vez el signo × en su obra *Clavia mathematicae*, pero Leibnitz (Alemania) adujo que se confundía con la letra "equis", por lo que prefirió el signo (·). Los hindúes utilizaron $\frac{a}{b}$ para indicar la división, esta expresión fue usada luego por Leonardo de Pisa (1475-1250). En un libro publicado en 1669, Rahn empleó el ÷, y Leibnitz, en 1684, introdujo el signo (:).

1▸ NOCIONES PREVIAS

1.1. RELACIONES BINARIAS DE UN MISMO CONJUNTO

Dado el conjunto $A=\{2;\ 3;\ 4\}$, el conjunto producto sería

$$A\times A=\{(a;b)/a\in A\wedge b\in A\}$$

$$\rightarrow\ A\times A=\{(2;2),(2;3),(2;4),(3;2),(3;3),(3;4),(4;2),(4;3),(4;4)\}$$

Incluye relaciones binarias tales como

- $R_1=\{(a;b)/a=b\}$

  $\rightarrow\ R_1=\{(2;2),(3;3),(4;4)\}$

- $R_2=\{(a;b)/a>b\}$

  $\rightarrow\ R_2=\{(3;2),(4;2),(4;3)\}$

- $R_3=\{(a;b)/a+b=\text{par}\}$

  $\rightarrow\ R_3=\{(2;2),(2;4),(3;3),(4;2),(4;4)\}$

Nota

- En el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), la suma de dos naturales siempre es otro número natural.
  ($+$: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \rightarrow\ \mathbb{N}$).
- En el conjunto $\mathbb{N}$, la resta no es una operación interna, pues el resultado no siempre es natural, mientras que si nos atenemos al conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$), sí se trata de una operación interna.
- En el conjunto de los números naturales ($\mathbb{N}$), la operación de sustracción es externa, pues la resta de dos naturales puede resultar un número entero.
  ($-$: $\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ \rightarrow\ \mathbb{Z}$)
- El producto escalar de vectores también es externo, porque su resultado es otro conjunto (en este caso, una constante).
  ($\cdot$: $\times\mathbb{V}\ \rightarrow\ \mathbb{R}$)

1.2. OPERACIONES BINARIAS

Es aquella operación en la que un operador relaciona dos elementos de un conjunto y se obtiene como resultado un tercer elemento, generalmente del mismo conjunto.

Ejemplo

La adición es una operación binaria, se asigna a cada pareja de elementos un tercer número como resultado de la operación.

$$\underbrace{(2;3)}_{\text{par ordenado}}\ \xrightarrow[\text{operación de adición}]{(+)}\ \underbrace{2+3}_{\text{resultado (considera el orden)}}$$

Sin embargo, es usual que la expresemos así:

$$\underset{\text{primer elemento}}{2}\quad \underset{\text{operador elemento de la adición}}{+}\quad \underset{\text{segundo elemento}}{3}\ =\ \underset{\text{resultado}}{5}$$

En el caso de los sistemas de números, para respetar la terminología tradicional, usaremos simplemente la palabra **operación** en lugar de **operación binaria**.

2▸ ADICIÓN

Dados dos números naturales, A y B, la suma de A y B se denota como $A+B$ al número natural S, de modo que $A+B=S$. Se denomina adición a la operación que hace corresponder a ciertos pares $(A;B)$ su suma $A+B$.

En general, la adición presenta la siguiente forma:

$$\boxed{A+B=S}$$

donde

- A; B: sumandos
- S: suma o suma total
- $+$: signo de la adición (se lee: "más")

Ejemplo

$$\underset{\text{sumandos}}{34+18}=\underset{\text{suma}}{52}$$

adición

Nota

La operación de adición puede presentar más de dos sumandos.

Ejemplo

$$\underbrace{20 + 13 + 12}_{\text{sumandos}} = \underbrace{45}_{\text{suma}}$$

Aplicación 1

Si $a+b+c+d = 23$

calcule $S=\overline{abcd}+\overline{badc}+\overline{cdab}+\overline{dcba}$.

Dé como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución

Del dato, tenemos que $a+b+c+d=23$.

Disponemos los términos de forma vertical, lo cual no se alterará al cambiar el orden.

$$\begin{array}{r} \text{se lleva} \\ 2\ 2\ 2\ 2\ \\ a\,b\,c\,d\ + \\ b\,a\,d\,c\ \\ c\,d\,a\,b\ \\ d\,c\,b\,a\ \\ \hline 2\,5\,5\,5\,3 \end{array}$$

A continuación veamos el procedimiento de adición que se realizó en cada orden.

Procedimiento	
Orden 1 (unidades)	$a+b+c+d=23$ (2: lleva; 3: queda)
Orden 2 (decenas)	$a+b+c+d+\boxed{2}=25$ (2: lleva; 5: queda)
Orden 3 (centenas)	$a+b+c+d+\boxed{2}=25$ (2: lleva; 5: queda)
Orden 4 (unidad de millar)	$a+b+c+d+\boxed{2}=25$ (2: lleva; 5: queda)

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado es 20.

Otra forma

Disponemos los términos de forma vertical para realizar las sumas parciales.

$$\begin{array}{rccccl} & a & b & c & d & + \\ & b & a & d & c & \\ & c & d & a & b & \\ & d & c & b & a & \\ \hline \text{sumas parciales} & & & 2 & 3 & \leftarrow a+b+c+d=23 \\ & & 2 & 3 & & \leftarrow a+b+c+d=23 \\ & 2 & 3 & & & \leftarrow a+b+c+d=23 \\ & 2 & 3 & & & \leftarrow a+b+c+d=23 \\ \hline & 2 & 5 & 5 & 5 & 3 \end{array}$$

Por lo tanto, la suma de cifras del resultado es 20.

Aplicación 2

Calcule la suma de todos los numerales de dos cifras del sistema decimal.

Resolución

Primero debemos determinar la cantidad de números de dos cifras en el sistema decimal.

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 9 & 9 \end{array}$$

$9\times10=90$ (total de numerales)

cantidad de valores que adopta la cifra de unidades

cantidad de valores que adopta la cifra de las decenas

Ahora observemos

$$\begin{array}{cc} a & b \\ \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 \\ 2 & 1 \\ 3 & 2 \\ \vdots & \vdots \\ 9 & 9 \end{array}$$

Valores que adopta la cifra de las decenas; como son 9 valores y debemos formar 90 numerales, este bloque se repetirá 10 veces.

Valores que adopta la cifra de unidades; como son 10 valores y debemos formar 90 numerales este bloque de valores se repetirá 9 veces.

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b} \\ \downarrow\ \ \downarrow \\ 1\ \ 0 \\ 2\ \ 1 \\ \vdots\ \ \vdots \\ 9\ \ 9 \\ \hline 4\ 0\ 5\ + \end{array} \quad (+) \qquad \longleftarrow \overbrace{(0+1+2+\ldots+9)}^{\text{suma de cifras}} \times \frac{90}{10} = 405 \qquad \frac{\left(\text{cantidad de numerales}\right)}{\left(\text{n.º de valores de la cifra}\right)}$$

$$\begin{array}{r} 4\ 5\ 0 \\ \hline 4\ 9\ 0\ 5 \end{array} \qquad \longleftarrow (1+2+\ldots+9) \times \frac{90}{9} = 450$$

Por lo tanto, la suma será 4905.

2.1. PROPIEDADES DE LA ADICIÓN EN $\mathbb{Z}_0^+$

Propiedad de clausura

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}_0^+ \ \wedge\ b \in \mathbb{Z}_0^+ \ \rightarrow\ (a+b) \in \mathbb{Z}_0^+$$

Ejemplo

Como $8 \in \mathbb{Z}_0^+$ y $5 \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces

$8+5=13$ y $13 \in \mathbb{Z}_0^+$

Propiedad conmutativa

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}_0^+ \ \wedge\ b \in \mathbb{Z}_0^+ \ \rightarrow\ a+b=b+a$$

donde el orden de los sumandos no altera la suma.

Ejemplo

Como $7 \in \mathbb{Z}_0^+$ y $8 \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces

$7+8=8+7$

Propiedad asociativa

$$\text{Si } a \in \mathbb{Z}_0^+,\ b \in \mathbb{Z}_0^+ \text{ y } c \in \mathbb{Z}_0^+ \ \rightarrow\ (a+b)+c=a+(b+c)$$

Ejemplo

Como $3 \in \mathbb{Z}_0^+$; $6 \in \mathbb{Z}_0^+$ y $5 \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces

$(3+6)+5=3+(6+5)$

$9 + 5=3 + 11$

Elemento neutro

$$\text{Si } A \in \mathbb{Z}_0^+ \ \rightarrow\ \exists!\ 0, \text{ de modo que } A+0=0+A=A$$

Ejemplo

Como $4 \in \mathbb{Z}_0^+$, entonces $4+0=0+4=4$

Nota

Si todos los términos se escriben individualmente, se utiliza el símbolo "+" (leído "más"). Con esto, la suma de los números 1; 2 y 4 es $1+2+4=7$.

También se puede emplear el símbolo "+" cuando, a pesar de no escribirse individualmente los términos, se indican los números omitidos mediante puntos suspensivos y es sencillo reconocer los números omitidos.

Ejemplo

$2+4+8+\ldots+512+1024$ es la suma de las diez primeras potencias de 2.

En sumas largas o infinitas se emplea un nuevo símbolo, llamado sumatoria y se representa con la letra griega sigma mayúscula ($\sum$).

Ejemplo

$$\sum_{k=1}^{10} 2^k = 2+4+8+\ldots+512+1024$$

Es la suma de las diez primeras potencias de 2.

La definición de sumatorias la veremos en el capítulo de sucesiones y series.

2.2. LA ADICIÓN EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Para realizar la adición en otros sistemas de numeración se tendrá presente las siguientes condiciones:

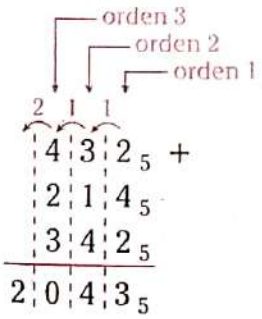
- Todos los numerales deben estar en el mismo sistema de numeración.
- Se inicia la adición desde las cifras del primer orden, luego del segundo orden, luego del tercer orden, y así sucesivamente.
- En cada orden, se realiza la adición en la base 10, y los resultados obtenidos se expresan en la base indicada (se lleva la cantidad de grupos formados por la base y lo que sobra queda como resultado en ese orden).

Aplicación 3

Halle la suma de 432_5; 214_5; 342_5.

Resolución

Colocaremos los numerales en forma vertical para efectuar la operación considerando el orden de sus cifras.

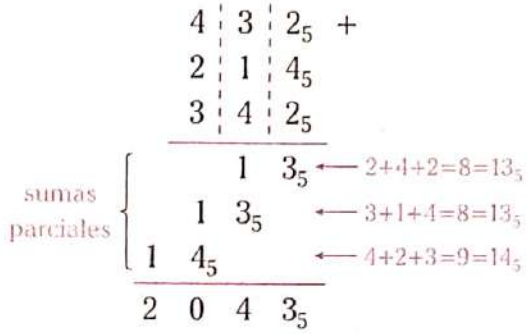


A continuación veamos el procedimiento de adición que se realizó en cada orden.

Orden	Procedimiento
Orden 1	$2+4+2=8=1\times5+3$ (lleva: 1; queda: 3)
Orden 2	$3+1+4+\boxed{1}=9=1\times5+4$ (lleva: 1; queda: 4)
Orden 3	$4+2+3+\boxed{1}=10=2\times5+0$ (lleva: 2; queda: 0)

Otra forma

El método directo de resolver mediante sumas parciales es el siguiente:

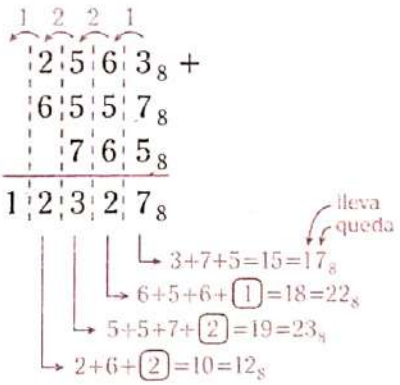


Aplicación 4

Halle la suma de $2563_8+6557_8+765_8$.

Resolución

Colocamos los numerales de forma vertical.

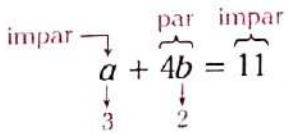


Casos particulares

1. Analizando los sumandos, se tiene que en toda suma se cumple que
   - par + par = par
   - impar + impar = par
   - par + impar = impar

   Ejemplo

   Si $a, b \in \mathbb{Z}^+$ y $a+4b=11$, entonces



$\therefore\ a=3 \wedge b=2$

2. Sobre la cantidad necesaria y suficiente que se lleva de un orden a otro orden, se tiene lo siguiente:

Para 2 sumandos

$$\begin{array}{r} \overset{0;1}{a}\ \overset{0;1}{b}_n + \\ c\ d_n \\ \hline \cdots\ x_n \end{array}$$

Para 3 sumandos

$$\begin{array}{r} \overset{0;1;2}{a}\ \overset{0;1;2}{b}_n + \\ c\ d_n \\ e\ f_n \\ \hline \cdots\ x_n \end{array}$$

Ejemplos

$$\begin{array}{r} \overset{1}{2}\ 4_6 + \\ 5\ 1_6 \\ \hline 1\ 1\ 5_6 \end{array} \qquad \begin{array}{r} \overset{1}{6}\ \overset{2}{2}\ 7_8 + \\ 1\ 1\ 5_8 \\ 2\ 1\ 7_8 \\ \hline 1\ 1\ 6\ 3_8 \end{array}$$

Observación

Observe que la última cifra de un sumando es igual a la última cifra de la suma.

$$\begin{array}{r} \cdots\ a_n + \\ \cdots\ b_n \\ \cdots\ c_n \\ \hline \cdots\ c_n \end{array}$$

Para que eso ocurra, existen dos opciones.

- $a=0$ y $b=0$
- $a+b=n$ (base)

Aplicación 5

Si se cumple que $\overline{aa}+\overline{bb}+\overline{cc}=\overline{abc}$, determine el valor de $a+b+c$.

Resolución

Escribimos de forma vertical

$$\begin{array}{r} 1\ \overset{1}{} \\ a\ a + \\ b\ b \\ \hline c\ c \\ \hline a\ b\ c \end{array}$$

- En las unidades sería $a+b=10$.
- En las decenas sería $1+a+c=10$.
- En las centenas sería $1=a$.

Luego,

$a=1;\ b=9$ y $c=8$

$\therefore\ a+b+c=18$

3 ▸ SUSTRACCIÓN

Dados dos números naturales, A y B, la diferencia de A y B se representa como $A-B$ a un número natural D; de modo que $A-B=D$.

Se denomina sustracción a la operación que hace corresponder a ciertos pares de números naturales $(A;B)$ su diferencia $A-B$.

En general, la sustracción presenta la siguiente forma:

$$\boxed{M-S=D}$$

donde

- M: minuendo
- S: sustraendo
- D: diferencia
- $-$: signo de la sustracción (se lee: "menos")

Nota

La operación de sustracción presenta solo tres términos.

Ejemplo

$$\underset{\text{minuendo }(M)}{47} - \underset{\text{sustraendo }(S)}{23} = \underset{\text{diferencia }(D)}{24}$$

Aplicación 6

Se sabe que

$\overline{a(b+3)c(d+1)}-\overline{(a-2)(b+5)c(d-3)}=\overline{mnpq}$

Halle $m+n+p+q$.

Resolución

Disponemos los términos en forma vertical.

$$\begin{array}{cccc} & 1 & & \\ a & (b+3) & c & (d+1) \\ (a-2) & (b+5) & c & (d-3) \\ \hline m & n & p & q \end{array} \; -$$

Se observa lo siguiente:

- En la columna de las unidades
  $(d+1)-(d-3)=q \;\rightarrow\; q=4$
- En la columna de las decenas
  $c-c=p \;\rightarrow\; p=0$
- En la columna de las centenas
  $(b+3+10)-(b+5)=n \;\rightarrow\; n=8$
- En la columna de los millares
  $(a-1)-(a-2)=m \;\rightarrow\; m=1$

$\therefore\; m+n+p+q=1+8+0+4=13$

3.1. PROPIEDADES DE LA SUSTRACCIÓN

Propiedad 1

$$\boxed{M=\frac{M+S+D}{2}} \rightarrow \underbrace{\boxed{M+S+D=2M}}_{\text{La suma de términos de una sustracción es igual al doble del minuendo.}}$$

Demostración

Sabemos que

$M-S=D$

$M=S+D$

$M+\boldsymbol{M}=S+D+\boldsymbol{M}$

$2M=M+S+D$

$\therefore\; M=\dfrac{M+S+D}{2}$

Aplicación 7

La suma de los términos de una sustracción es 1456. Si el sustraendo excede a la diferencia en 12, calcule la suma de cifras de la diferencia.

Resolución

Por dato tenemos que

$$\underbrace{M+S+D}_{2M}=1456$$

Luego,

$2M=1456$

$M=728$

Es decir,

$$\begin{array}{rcl} S+D &=& 728 \\ S-D &=& 12 \\ \hline 2S &=& 740 \\ S &=& 370 \end{array} \quad (+) \quad \text{(dato)}$$

Reemplazamos.

$D=358$

Por lo tanto, la suma de cifras de D es 16.

Propiedad 2

Se sabe que $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{xyz}$

Para $a>c$, se cumple lo siguiente

- $y=9$
- $x+z=9$
- $a-c=x+1$
- b: 0; 1; 2; ...; 9

Demostración

Como

$$\begin{array}{l} \overline{abc} \; - \\ \overline{cba} \\ \hline \overline{xyz} \end{array}$$

En las unidades se observa

$c+10-a=z$ (I)

En las decenas,

$(b-1)+10-b=y$

$\rightarrow\; y=9$

Observe que el valor de y no depende de b, entonces b toma los siguientes valores:

b: 0; 1; 2; ...; 9

En las centenas,

$$(a-1)-c=x$$
$$a-c=x+1 \qquad \text{(II)}$$

Sumamos (I)+(II).

$$(a-1)+(10-a)=z+x$$

$\therefore\ x+z=9$

Aplicación 8

Se sabe que $\overline{ab(a-3)}-\overline{(a-3)ba}=\overline{mnp}$

Halle $m\times n\times p$.

Resolución

Por dato

$$\begin{array}{r} \overline{a\quad b\,(a-3)}\,- \\ \overline{(a-3)\ b\quad a} \\ \hline \overline{m\quad n\quad p} \end{array}$$

En las unidades tenemos que

$$(a-3)+10-a=p \ \rightarrow\ p=7$$

Por propiedad,

- $n=9$
- $m+p=9 \ \rightarrow\ m=2$

$\therefore\ m\times n\times p=2\times 9\times 7=126$

Propiedad 3

Si $\overline{abcd}-\overline{dcba}=\overline{xyzw}$ y se cumple que $a>d$:

$$\left.\begin{array}{ll} \text{Cuando } b>c, & w+x=10 \\ & y+z=8 \\ \text{Cuando } b<c, & w+x=9 \\ & y+z=9 \end{array}\right\} \begin{array}{l}\text{Cuando } b\neq c, \\ x+y+z+w=18\end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \text{Cuando } b=c, & y=z=9 \\ & w+x=9 \end{array}$$

Demostración

- Cuando $b>c$

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c\,d}\,- \\ \overline{d\,c\,b\,a} \\ \hline \overline{x\,y\,z\,w} \end{array} \qquad (a>d \wedge b>c)$$

En el orden 1, se presta una unidad del orden 2 al orden 1.

$$w=10+d-a$$

En el orden 2, como se prestó una unidad al orden 1, queda $c-1$; además, $b>c$. Se tendrá que prestar una unidad del orden 3.

$$z=\boxed{10}+(c-1)-b=9+c-b$$

En el orden 3, como se prestó una unidad al orden 2, queda $b-1$.

$$y=b-1-c$$

En el orden 4, $x=a-d$.

Luego,

$$\begin{array}{r} x=a-d \\ w=10+d-a \\ \hline \therefore\ x+w=10 \end{array}(+) \qquad \begin{array}{r} y=b-1-c \\ z=9+c-b \\ \hline y+z=8 \end{array}(+)$$

- Cuando $b<c$

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c\,d}\,- \\ \overline{d\,c\,b\,a} \\ \hline \overline{x\,y\,z\,w} \end{array} \qquad (a>d)$$

En el orden 1, se presta una unidad del orden 2 al orden 1.

$$w=10+d-a$$

En el orden 2, al prestar una unidad al orden 1 queda $c-1$.

$$z=c-1-b$$

En el orden 3, como $b<c$, se presta una unidad del orden 4 al orden 3.

$$y=b+10-c$$

En el orden 4, como se prestó una unidad al orden 3, queda $a-1$.

$$x=a-1-d$$

Luego,

$$\begin{array}{r} w=10+d-a \\ x=a-1-d \\ \hline \therefore\ w+x=9 \end{array}(+) \qquad \begin{array}{r} z=c-1-b \\ y=b+10-c \\ \hline z+y=9 \end{array}(+)$$

- Cuando $b=c$

$$\begin{array}{l} \overline{abcd}- \\ \overline{dcba} \\ \hline \overline{xyzw} \end{array} \qquad (a>d)$$

En el orden 1, se presta una unidad del orden 2 al orden 1.

$w=d+10-a$

En el orden 2, como se prestó una unidad al orden 1, queda $c-1$; además, $b=c$, entonces se tendrá que prestar una unidad del orden 3 al orden 2.

$z=\boxed{10}+(c-1)-b \quad (c-b=0;$ son iguales$)$

$z=9$

En el orden 3, como se prestó una unidad al orden 2, queda $b-1$; además, $b=c$. Se tendrá que prestar una unidad del orden 4 al orden 3.

$y=\boxed{10}+(b-1)-c$

$\therefore\ y=9\ (b-c=0;\ b$ y c son iguales$)$

En el orden 4,

$x=a-1-d$

Luego,

$$\left.\begin{array}{r} w=d+10-a \\ x=a-1-d \end{array}\right)(+) \qquad \begin{array}{l} y=9 \\ z=9 \end{array}$$

$\therefore\ w+x=9$

Aplicación 9

Sea $b>c$; además, $\overline{abcd}-\overline{dcba}=\overline{3m7n}$. Calcule $a\times b\times c\times d$ si $\overline{ab}+\overline{dc}=96$.

Resolución

Como $b>c$, se cumple que

$$\begin{array}{l} \overline{abcd}- \\ \overline{dcba} \\ \hline \overline{3m7n} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 3+n=10 \ \rightarrow\ n=7 \\ m+7=8 \ \rightarrow\ m=1 \end{array}$$

Se observa que

$10+d-a=7$ (orden 1)

$a-d=3$ (impar)

$\rightarrow$ $(a+d)$ tendrá que ser impar.

En el orden 3,

$b-1-c=1$

$b-c=2$

Por dato

$$\begin{array}{l} \overline{ab}+ \\ \overline{dc} \\ \hline 96 \end{array} \qquad \text{Se tendrá} \qquad \begin{array}{l} b+c=6 \\ a+d=9 \text{ (impar)} \end{array}$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{r} b+c=6 \\ b-c=2 \end{array}\right)(+) \qquad \left.\begin{array}{r} a+d=9 \\ a-d=3 \end{array}\right)(+)$$

$$\begin{array}{r} 2b=8 \\ b=4 \\ c=2 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 2a=12 \\ a=6 \\ d=3 \end{array}$$

Finalmente,

$a\times b\times c\times d=6\times 4\times 2\times 3$

$\therefore\ a\times b\times c\times d=144$

Nota

La **resta** o **sustracción** es una de las cuatro operaciones básicas de la aritmética; se trata básicamente de la operación inversa a la suma. Por ejemplo, si $a+b=c$, entonces, $c-b=a$.

En el conjunto de los números naturales, $\mathbb{N}$, solo se puede restar dos números si el minuendo es mayor que el sustraendo. De lo contrario, la diferencia sería un número negativo que, por definición, estaría excluido del conjunto. Esto es así para otros conjuntos con ciertas restricciones, como los números reales positivos.

En matemáticas avanzadas no se habla de restar, sino de sumar el opuesto. En otras palabras, no se tiene $a-b$, sino $a+(-b)$, expresión en la cual $-b$ es el elemento opuesto de b respecto de la suma.

3.2. LA SUSTRACCIÓN EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Para realizar la sustracción en otros sistemas de numeración se tienen las siguientes condiciones:

- Todos los numerales deben estar en el mismo sistema de numeración.
- Se inicia la sustracción desde las cifras del primer orden, luego del segundo orden, luego del tercer orden, y así sucesivamente.
- Si la cifra del minuendo fuese menor que la cifra del sustraendo, la cifra correspondiente al orden superior prestará una unidad para poder realizar la operación, considerando que la unidad prestada del orden superior inmediato equivale a tantas unidades como indica la base.

Ejemplo

Para hallar la diferencia de 431_7 y 252_7 debemos realizar lo siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 3 & 2 & 1 \leftarrow \text{orden} \\ \hline 4 & 3 & 1_7 - \\ 2 & 5 & 2_7 \\ \hline 1 & 4 & 6_7 \end{array}$$

A continuación explicaremos el procedimiento de la sustracción.

Orden	Procedimiento
1	Como a 1 no se le puede disminuir en 2, lo que se hace es prestar del orden 2 una unidad, que en el orden 1 equivale a 7 unidades. $\boxed{7}+1-2=6$
2	Debido a que se prestó una unidad de este orden, quedaron 2 y no se puede disminuir 5, entonces se prestará una unidad del orden 3, que en el orden 2 equivale a 7 unidades. $\boxed{7}+2-5=4$
3	Se prestó una unidad y quedaron 3. Luego, $3-2=1$.

Otra forma

La forma directa de resolver es la siguiente:

$$\begin{array}{ccc} 1<>7 & 1<>7 & \\ 4 & 3 & 1_7 + \\ 2 & 5 & 2_7 \\ \hline 1 & 4 & 6_7 \end{array}$$

$\boxed{7}+1-2=6$

$\boxed{7}+(3-1)-5=4$

$(4-1)-2=1$

Aplicación 10

Si $\overline{4a5}_7-\overline{24b}_7=\overline{1c2}_7$

calcule $a+b+c$ máximo.

Resolución

Escribimos de forma vertical.

$$\begin{array}{l} \overline{4a5}_7- \\ \overline{24b}_7 \\ \hline \overline{1c2}_7 \end{array}$$

En el orden 1,

$$5-b=2 \quad \rightarrow b=3$$

En el orden 2, la diferencia es c. Se observa que en el orden 3 la diferencia es 1, lo cual significa que se prestó una unidad del orden 3 al orden 2.

Así tendremos

$$\boxed{7}+a-4=c \quad \rightarrow \quad \begin{array}{cc} a+3 & =c \\ \downarrow & \downarrow \\ 0 & 3 \\ 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \text{ (máximo)} \end{array}$$

$\therefore \quad a+b+c=3+3+6=12$

3.2.1. Propiedades

Propiedad 1

Si $\overline{ab}_n-\overline{ba}_n=\overline{xy}_n$

y se cumple que $n\geq 3 \wedge a>b$

entonces, $x+y=n-1$.

Demostración

$$\begin{array}{l} \overline{ab}_n - \\ \underline{\overline{ba}_n} \\ \overline{xy}_n \end{array}$$

En el orden 1, como $a > b$, se tiene que prestar una unidad del orden 2 al orden 1.

$$\boxed{n} + b - a = y$$

En el orden 2, $(a-1)-b=x$.

Luego,

$$\begin{array}{l} x = a - 1 - b \\ y = n + b - a \\ \hline \therefore\ x + y = n - 1 \end{array} \Big)(+)$$

Aplicación 11

Si $\overline{ab}_7 - \overline{ba}_7 = \overline{xy}_7$, calcule $E = \overline{x6y}_9 + \overline{y3x}_9$.

Resolución

Como $\overline{ab}_7 - \overline{ba}_7 = \overline{xy}_7$

por propiedad, $x+y=6$.

Luego,

$$\begin{array}{l} \overline{x\,6\,y}_9 + \\ \underline{\overline{y\,3\,x}_9} \\ \overline{7\,0\,6}_9 \end{array}$$

orden 1: $x+y=6$

orden 2: $6+3=9=\underset{\text{lleva}}{1}\times 9+\underset{\text{queda}}{0}$

orden 3: $\boxed{1}+\underbrace{x+y}_{6}=7$

$\therefore\ E=706_9$

Propiedad 2

Si $\overline{abc}_n - \overline{cba}_n = \overline{xyz}_n$

y se cumple que $n \geq 3$; $a > c$

entonces

- $y=n-1$
- $x+z=n-1$
- $a-c=x+1$
- b: 0; 1; 2; ...; $(n-1)$

Demostración

$$\begin{array}{l} \overline{abc}_n - \\ \underline{\overline{cba}_n} \\ \overline{xyz}_n \end{array}$$

En el orden 1, como $a > c$, del orden 2 se presta una unidad al orden 1, con lo que se tendrá

$$z=n+c-a$$

En el orden 2, como se prestó una unidad al orden 1 quedó $b-1$; del orden 3 se tendrá que prestar nuevamente una unidad al orden 2. Tendremos lo siguiente:

$$y=n+(b-1)-b$$

$$\therefore\ y=n-1$$

Observe que el valor de y no depende de b, entonces se cumple que b toma los siguientes valores:

b: 0; 1; 2; ...; $(n-1)$

En el orden 3, como se prestó una unidad se tendrá

$$x=a-1-c$$

$$\therefore\ a-c=x+1$$

Finalmente, sumamos las expresiones.

$$\begin{array}{l} x = a - 1 - c \\ z = n + c - a \\ \hline \therefore\ x + z = n - 1 \end{array}$$

Aplicación 12

Calcule m^2+n^2 si $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{mn3}$.

Resolución

Como

$$\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{mn3}$$

por propiedad, $n=9$

$$m+3=9 \rightarrow m=6$$

$$\therefore\ m^2+n^2=6^2+9^2=117$$

Aplicación 13

Si $\overline{mnp}_7 + \overline{def}_7 = \overline{fed}_7$,

calcule $E = \overline{mnp} + \overline{pmn} + \overline{npm}$.

Resolución

Como $\overline{mnp}_7 + \overline{def}_7 = \overline{fed}_7$

se puede escribir

$$\overline{mnp}_7 = \overline{fed}_7 - \overline{def}_7.$$

Por propiedad, $n=6$ y $m+p=6$

Escribimos de manera vertical lo que nos piden calcular.

$$\begin{array}{r} \overline{m\,n\,p}\ + \\ \overline{p\,m\,n} \\ \overline{n\,p\,m} \\ \hline 1\,3\,3\,2 \end{array}$$

Sabemos que $m+n+p=12$

Veamos el procedimiento.

- unidades: $m+n+p=12=1\times10+2$
- decenas: $\boxed{1}+m+n+p=13=1\times10+3$
- centenas: $\boxed{1}+m+n+p=13=1\times10+3$

$\therefore\ E=1332$

3.3. COMPLEMENTO ARITMÉTICO (CA)

Se le denomina así a la cantidad que le falta a un número para ser igual a una unidad del orden inmediato superior, con respecto de su cifra de mayor orden.

Ejemplos

- Hallemos el CA(76).

  Se observa que su cifra de mayor orden corresponde a las decenas, así que tendremos que averiguar la cantidad que le falta para completar una centena (orden inmediato superior).

$$\begin{array}{rl} 3\ 2\ 1 & \leftarrow \text{orden} \\ 1\,0\,0\ - & \text{(una unidad del orden tres)} \\ 7\,6 & \\ \hline 2\,4 & \end{array}$$

$\therefore$ CA(76) = 24

- Hallemos el CA(238).

  La cifra de mayor orden corresponde a las centenas, veremos cuánto le falta para completar un millar (orden inmediato superior).

$$\begin{array}{rl} 4\ 3\ 2\ 1 & \leftarrow \text{orden} \\ 1\,0\,0\,0\ - & \text{(una unidad de orden cuatro)} \\ 2\,3\,8 & \\ \hline 7\,6\,2 & \end{array}$$

$\therefore$ CA(238) = 762

- Hallemos el CA(5136).

$$\begin{array}{rl} 5\ 4\ 3\ 2\ 1 & \leftarrow \text{orden} \\ 1\,0\,0\,0\,0\ - & \text{(una unidad de orden cinco)} \\ 5\,1\,3\,6 & \\ \hline 4\,8\,6\,4 & \end{array}$$

$\therefore$ CA(5136) = 4864

- Hallemos el $CA(23_7)$

$$\begin{array}{rl} 3\ 2\ 1 & \leftarrow \text{orden} \\ 1\,0\,0_7\ - & \text{(una unidad de orden tres en base 7)} \\ 2\,3_7 & \\ \hline 4\,4_7 & \end{array}$$

$\therefore\ CA(23_7)=44_7$

- Hallemos el $CA(312_5)$.

$$\begin{array}{rl} 4\ 3\ 2\ 1 & \leftarrow \text{orden} \\ 1\,0\,0\,0_5\ - & \text{(una unidad de orden cuatro en base 5)} \\ 3\,1\,2_5 & \\ \hline 1\,3\,3_5 & \end{array}$$

$\therefore\ CA(312_5)=133_5$

En forma general, si N tiene K cifras y b es base se cumple

$$CA(N_b) = 1\underbrace{000\ldots0}_{\substack{K\ \text{cifras} \\ \text{ceros}}}{}_b - N_b$$

Observación

El complemento aritmético se determina siempre en su respectiva base.

Ejemplo

Forma incorrecta	Forma correcta
$CA(21_7)=N$	$CA(21_7)=M$
$CA(2\times7+1)=N$	$\downarrow$
$CA(15)=N$	100_7 −
$\downarrow$	21_7
100 −	46_7
15	$\rightarrow M=46_7$
85	$\therefore CA(21_7)=46_7$
$\rightarrow N=85$	(Sí cumple)
$\therefore CA(21_7)=85=151_7$	
(No cumple)	

3.3.1. Forma práctica para calcular el CA de un numeral

Se ubica la cifra de menor orden y además significativa, dicha cifra se le quita a la base; las demás cifras (de orden mayor a la anterior) se quitarán del número de la base disminuido en uno. Si el numeral terminase en cierta cantidad de ceros, su CA terminará en la misma cantidad de ceros.

$$CA(\overset{9}{7}\ \overset{10}{6})=24$$

$$CA(\overset{9}{2}\ \overset{9}{3}\ \overset{10}{8})=762$$

$$CA(\overset{9}{7}\ \overset{9}{3}\ \overset{10}{2}\ 0\ 0)=26\ 800$$

$$CA(\overset{9}{4}\ \overset{9}{1}\ \overset{9}{5}\ \overset{10}{7}\ 0\ 0\ 0\ 0)=58\ 430\ 000$$

$$CA(\overset{6}{2}\ \overset{7}{3}_7)=44_7$$

$$CA(\overset{4}{3}\ \overset{4}{1}\ \overset{5}{2}\ 0\ 0_5)=13\ 300_5$$

$$CA(\overset{7}{4}\ \overset{7}{2}\ \overset{8}{1}\ 6\ 0\ 0_8)=356\ 200_8$$

3.3.2. Propiedades

Propiedad 1

Veamos qué sucede con la diferencia de CA de dos numerales consecutivos que presentan la misma cantidad de cifras.

- $\underbrace{CA(75)}_{25} - \underbrace{CA(76)}_{24} = 1$
- $\underbrace{CA(242)}_{758} - \underbrace{CA(243)}_{757} = 1$
- $\underbrace{CA(43_7)}_{24_7} - \underbrace{CA(44_7)}_{23_7} = 1$
- $\underbrace{CA(351_9)}_{538_9} - \underbrace{CA(352_9)}_{537_9} = 1$

En conclusión, si N_b y (N_b+1) presentan la misma cantidad de cifras se cumple que

$$\boxed{CA(N_b)-CA(N_b+1)=1}$$

Propiedad 2

Veamos qué sucede con la diferencia de CA de dos numerales consecutivos de diferente cantidad de cifras.

Tengamos en cuenta que como son numerales consecutivos, solo podrán diferenciarse máximo en una cifra. Para ello, el menor tendrá que ser un número de cifras máximas en su base respectiva.

Tenemos lo siguiente:

- $\underbrace{CA(100)}_{900} - \underbrace{CA(99)}_{1} = 899$
- $\underbrace{CA(1000)}_{9000} - \underbrace{CA(999)}_{1} = 8999$
- $\underbrace{CA(10\ 000)}_{90\ 000} - \underbrace{CA(9999)}_{1} = 89\ 999$

- $\underbrace{CA(100_6)}_{500_6} - \underbrace{CA(55_6)}_{1_6} = 455_6$

- $\underbrace{CA(1000_6)}_{5000_6} - \underbrace{CA(555_6)}_{1_6} = 4555_6$

- $\underbrace{CA(10_8)}_{70_8} - \underbrace{CA(7_8)}_{1_8} = 67_8$

En conclusión, si N_b y (N_b+1) tienen diferente cantidad de cifras, N_b será de cifras máximas. Ahora, supongamos que N_b tiene K cifras, entonces

$$E = CA(N_b+1) - CA(N_b)$$

$$E = \underbrace{\overline{(b-2)(b-1)(b-1)\ldots(b-1)}_b}_{K \text{ cifras maximas}}$$

Aplicación 14

Si $\overline{1mn} \times CA(\overline{mn}) = 8151$, calcule $m \times n$.

Resolución

De $\overline{1mn} \times CA(\overline{mn}) = 8151$

se tiene lo siguiente:

$$(100+\overline{mn}) \times (100-\overline{mn}) = 8151$$

$$100^2 - \overline{mn}^2 = 8151$$

$$\overline{mn}^2 = 43^2$$

$$\overline{mn} = 43$$

$$\therefore\ m \times n = 12$$

Propiedad 3

Cuando las primeras cifras del numeral son cifras máximas, la cantidad de cifras en su CA disminuye.

- $CA(\overset{9\ 9\ 9\ 9\ 9\ 10}{9\ 9\ 9\ 9\ 6\ 2}) = 38$

- $CA(\overset{5\ 5\ 5\ 5\ 5\ 6}{5\ 5\ 5\ 2\ 1\ 4}_6) = 342_6$

- $CA(\overset{7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 7\ 8}{7\ 7\ 7\ 7\ 5\ 1\ 3}_8) = 265_7$

Se deduce que

$$CA(\overline{abcde}) = \overline{xy} \rightarrow \begin{cases} \bullet\ a=b=c=9 \\ \bullet\ CA(\overline{de}) = \overline{xy} \end{cases}$$

$$CA(\overline{abcdef}_5) = \overline{xyz}_5 \rightarrow \begin{cases} \bullet\ a=b=c=4 \\ \bullet\ CA(\overline{def}_5) = \overline{xyz}_5 \end{cases}$$

Aplicación 15

Si $CA(\overline{mnpq}) = \overline{mnp}$, calcule $m \times n + p \times q$.

Resolución

Por regla práctica

$$CA(\overset{9\ 9\ 9\ 10}{\overline{mnpq}}) = \overline{mnp}$$

Se tendrá

$$10-q=p$$
$$9-p=n$$
$$9-n=m$$
$$9-m=0$$

De esto último, $m=9$

$$9-n=9 \rightarrow n=0$$
$$9-p=0 \rightarrow p=9$$
$$10-q=9 \rightarrow q=1$$

Entonces $m=9$; $n=0$; $p=9$; $q=1$

$$\therefore\ m \times n + p \times q = 9$$

Aplicación 16

Si $CA(\overline{mn}_7) = \overline{pq}_8$ y $CA(\overline{pq}_8) = \overline{nm}$ halle $m+n$. Considere que $m \neq n$.

Resolución

- De $CA(\overline{mn}_7) = \overline{pq}_8$
  por definición se tiene (I)
  $$100_7 - \overline{mn}_7 = \overline{pq}_8$$

- De $CA(\overline{pq}_8) = \overline{nm}$
  por definición se tiene (II)
  $$100_8 - \overline{pq}_8 = \overline{nm}$$

Luego, restamos (I) y (II).

$$100_7-\overline{mn}_7-100_8+\overline{pq}_8=\overline{pq}_8-\overline{nm}$$

$$49-\overline{mn}_7-64=-\overline{nm}$$

$$\overline{nm}-\overline{mn}_7=15$$

Descomponemos polinómicamente.

$$10n+m-7m-n=15$$

Se cumple que $m, n < 7$.

$$9n-6m=15 \qquad \underbrace{3n}_{\text{impar}} - \underbrace{2m}_{\text{par}} = \underset{\text{impar}}{5} \qquad n\text{: impar}$$

$$3n-2m=5$$

3	2	$(m\neq n)$	Sí cumple
5	5	$(m=n)$	No cumple

Entonces $m=2$; $n=3$

$\therefore\ m+n=5$

Propiedad 4

Veamos que sucede cuando la primera cifra del numeral no es cifra máxima de la base.

- $\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(627))=627$
- $\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(3162_8))=3162_8$
- $\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(4263_7))=4263_7$
- $\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(86353)))=\mathrm{CA}(86353)$

Nota

Cuando la primera cifra del numeral es cifra máxima de la base

$\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(974))$ no es 974.

lo correcto es

- $\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(974))=\mathrm{CA}(26)=74$
- $\mathrm{CA}(\mathrm{CA}(5234_6))=\mathrm{CA}(322_6)=234_6$

4 Multiplicación

Dados dos números naturales A y B, el producto de A y B se denota $A\times B$ al número natural P, de modo que $P=A\times B$.

Se denomina multiplicación a la operación que hace corresponder a ciertos pares de números naturales $(A; B)$ su producto $A\times B$.

En general, la multiplicación presenta la siguiente forma:

$$\boxed{M\times m=P}$$

donde

- M: multiplicando
- m: multiplicador
- P: producto

Así tenemos

$$\underbrace{15}_{\text{multiplicando}} \times \underbrace{11}_{\text{multiplicador}} = \overset{\text{producto}}{165}$$

Ejemplo

multiplicando	543 ×
multiplicador	89
productos parciales	4887
	4344
producto final	48327

En general,

$$\begin{array}{r} \overline{abcd}\times \\ \overline{mnp} \\ \hline \boxed{} \leftarrow p\times\overline{abcd} \\ \boxed{} \leftarrow n\times\overline{abcd} \\ \boxed{} \leftarrow m\times\overline{abcd} \\ \hline \boxed{} \end{array}$$

productos parciales

Aplicación 17

Si al multiplicando se le disminuye en dos unidades, el producto disminuye en 26; pero si al multiplicador se le aumenta cinco unidades, el producto aumenta en 80. Calcule el producto inicial y dé como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución

Sea $M \times m = P$

donde

- M: multiplicando
- m: multiplicador
- P: producto

Luego,

$$(M-2)\times m = P-26$$
$$M\times m - 2m = P-26$$
$$2m=26 \rightarrow m=13$$

También

$$M\times(m+5)=P+80$$
$$M\times m+5M=P+80$$
$$5M=80 \rightarrow M=16$$

De lo anterior,

$$m=13 \quad \text{y} \quad M=16$$
$$P=M\times m=16\times 13=208$$

Por lo tanto, la suma de cifras del producto P será

$$2+0+8=10$$

Aplicación 18

Si $\overline{abc}\times 49=\overline{minni}$

y la suma de productos parciales es 4836 calcule $a+b+c+m+i+n$.

Resolución

Disponemos los términos en forma vertical.

$$\begin{array}{r} \overline{a\,b\,c}\ \times \\ 4\,9 \\ \hline \overline{abc}\times 9 \\ \overline{abc}\times 4\ \ \\ \hline \overline{minni} \end{array}$$

productos parciales

$\rightarrow$ producto final

Por dato

$$\overline{abc}\times 9+\overline{abc}\times 4=4836$$
$$13\times\overline{abc}=4836$$
$$\overline{abc}=372$$
$$\rightarrow a=3;\ b=7;\ c=2$$

Reconstruimos la multiplicación.

$$\begin{array}{r} 3\,7\,2\ \times \\ 4\,9 \\ \hline 3\,3\,4\,8 \\ 1\,4\,8\,8\ \ \\ \hline 1\,8\,2\,2\,8 \end{array}$$

Se observa $\overline{minni}=18\,228$

De ahí que

$$m=1;\ i=8;\ n=2$$

$$\therefore\ a+b+c+m+n+i=23$$

4.1. PROPIEDADES DE LA MULTIPLICACIÓN EN $\mathbb{N}$

4.1.1. Propiedad de clausura

$$\boxed{\text{Si } a\in\mathbb{N} \text{ y } b\in\mathbb{N} \rightarrow (a\times b)\in\mathbb{N}}$$

Ejemplo

Como $7\in\mathbb{N}$ y $3\in\mathbb{N}$, entonces

$$7+3=21 \text{ y } 21\in\mathbb{N}$$

4.1.2. Propiedad conmutativa

$$\boxed{\text{Si } a\in\mathbb{N} \wedge b\in\mathbb{N} \rightarrow a\times b=b\times a}$$

donde el orden de los factores no altera el producto.

Ejemplo

Si $6\in\mathbb{N}$ y $4\in\mathbb{N}$,

$$\rightarrow 6\times 4=4\times 6$$

4.1.3. Propiedad asociativa

Si $A \in \mathbb{N}, B \in \mathbb{N}$ y $C \in \mathbb{N}$
$\rightarrow (A \times B) \times C = A \times (B \times C)$

Ejemplo

Si $4 \in \mathbb{N}; 7 \in \mathbb{N}$ y $5 \in \mathbb{N}$, entonces

$(4 \times 7) \times 5 = 4 \times (7 \times 5)$

$28 \times 5 = 4 \times 35$

$140 = 140$

4.1.4. Propiedad distributiva

Si $A \in \mathbb{N}, B \in \mathbb{N}, C \in \mathbb{N}$ y $B > C$
$\rightarrow A \times (B + C) = A \times B + A \times C$
$\rightarrow A \times (B - C) = A \times B - A \times C$

Ejemplo

Si $4 \in \mathbb{N}; 6 \in \mathbb{N}$ y $3 \in \mathbb{N}$, entonces

- $4 \times (6+3) = 4 \times 6 + 4 \times 3$

  $4 \times 9 = 24 + 12$

  $36 = 36$

- $4 \times (6-3) = 4 \times 6 - 4 \times 3$

  $4 \times 3 = 24 - 12$

  $12 = 12$

4.1.5. Elemento neutro

Si $A \in \mathbb{N} \rightarrow \exists!\ 1$, de modo que
$A \times 1 = 1 \times A = A$

Ejemplos

- Como $8 \in \mathbb{N}$, entonces
  $8 \times 1 = 1 \times 8 = 8$

- $12 \in \mathbb{N}$, además
  $12 \times a = a \times 12 = 12$
  Se afirma que $a = 1$.

Observación

La **multiplicación** es una operación aritmética que se puede explicar como una manera de sumar números idénticos.

Es decir:

$$\underbrace{M + M + M + \ldots + M}_{m \text{ veces}} = P$$

$$\rightarrow M \times m = P$$

La multiplicación se suele indicar con el aspa $\times$ o el punto centrado. En ausencia de estos caracteres se suele emplear el asterisco *. Por último, se puede omitir el signo de multiplicación, a menos que se multipliquen números o se pueda generar confusión sobre los nombres de las incógnitas, constantes o funciones.

En productos extensos o infinitos se emplea un nuevo símbolo llamado productoria y se representa con la letra griega mayúscula pi (π).

Ejemplos

$\prod_{k=1}^{50} k$ Es el producto de los 50 primeros números naturales.

$\prod_{k=1}^{10} 3^k$ Es el producto de las 10 primeras potencias de 3.

4.2. MULTIPLICACIÓN EN OTROS SISTEMAS DE NUMERACIÓN

Para realizar la multiplicación en otros sistemas de numeración se tendrá presente que todos los numerales (multiplicando y multiplicador) deben estar en el mismo sistema de numeración. Además cada multiplicación se realiza en la base 10, y los resultados obtenidos se expresan en la base indicada.

Ejemplo

Efectuaremos la siguiente multiplicación:

$543_7 \times 36_7$

El procedimiento es el siguiente:

Se dispondrán los términos de la siguiente forma para efectuar la operación de acuerdo con el orden que ocupan sus cifras.

$$\begin{array}{r} 3\ 2\ 1 \leftarrow \text{orden} \\ 5\,4\,3_7 \times \\ 3\,6_7 \\ \hline --- \end{array}$$

Evaluamos.

- Para la cifra de orden uno del multiplicador.
  - $6\times3=18=\underbrace{\mathbf{2}}_{\text{lleva}}\times7+\underbrace{\mathbf{4}}_{\text{queda}}$
  - $6\times4+2=26=\underbrace{\mathbf{3}}_{\text{lleva}}\times7+\underbrace{\mathbf{5}}_{\text{queda}}$
  - $6\times5+3=33=\underbrace{\mathbf{4}}_{\text{lleva}}\times7+\underbrace{\mathbf{5}}_{\text{queda}}$

- Para la cifra de orden dos del multiplicador.
  - $3\times3=9=\underbrace{\mathbf{1}}_{\text{lleva}}\times7+\underbrace{\mathbf{2}}_{\text{queda}}$
  - $3\times4+1=13=\underbrace{\mathbf{1}}_{\text{lleva}}\times7+\underbrace{\mathbf{6}}_{\text{queda}}$
  - $3\times5+1=16=\underbrace{\mathbf{2}}_{\text{lleva}}\times7+\underbrace{\mathbf{2}}_{\text{queda}}$

Finalmente se tendrá

$$\begin{array}{lr} \text{multiplicando} & 543_7 \times \\ \text{multiplicador} & 36_7 \\ \hline & \left.\begin{array}{r} 4554_7 \\ 2262_7 \end{array}\right\} \text{productos parciales} \\ \hline & 30504_7 \longrightarrow \text{producto final} \end{array}$$

Aplicación 19

Al efectuar la siguiente multiplicación $\overline{abcd}_7\times243_7$ se obtuvo como suma de los productos parciales a un número que termina en 4241_7. Halle $a+b+c+d$.

Resolución

Se tiene

$$\begin{array}{r} \overline{abcd}_7 \times \\ 243_7 \\ \hline \left.\begin{array}{r} 3\times\overline{abcd}_7 \\ 4\times\overline{abcd}_7 \\ 2\times\overline{abcd}_7 \end{array}\right\} \text{productos parciales} \\ \hline \end{array}$$

Por condición

$$3\times\overline{abcd}_7+4\times\overline{abcd}_7+2\times\overline{abcd}_7=...4241_7$$
$$9\times\overline{abcd}_7=...4241_7$$
$$12_7\times\overline{abcd}_7=...4241_7$$

Luego,

$$\begin{array}{r} \overline{abcd}_7 \times \\ 12_7 \\ \hline ...4601_7 \\ ...5634_7 \\ \hline ...4241_7 \end{array}$$

Reconstruimos la multiplicación.

$d=4;\ c=3;\ b=6;\ a=5$

$\therefore\ a+b+c+d=18$

Observación

En toda multiplicación se cumple

- (par)(entero)=(par)
- (impar)(impar)=(impar)
- (impar)(...5)=...5
- (par)(...5)=...0
- $n(n+1)=\begin{cases}...0\\...2\\...6\end{cases}$

4.3. MULTIPLICACIÓN DONDE UNO DE LOS FACTORES ES UN NUMERAL DE CIFRAS MÁXIMAS

Tengamos en cuenta que se debe cumplir que uno de los factores debe ser un numeral de cifras máximas.

Ejemplo

Sea $\overline{abcd}_9 \times 888_9 = ...2573_9$.

Entonces

$$\overline{abcd}_9 \times \underbrace{888_9}_{(1000_9-1)} = ...2573_9$$

$$\boxed{\overline{abcd}_9} \times (1000_9 - 1) = ...2573_9$$

$$\overline{abcd000}_9 - \overline{abcd}_9 = ...2573_9$$

$$\overline{abcd000}_9 = \overline{abcd}_9 + ...2573_9$$

Escribimos la adición de forma vertical.

$$\begin{array}{r} ...2\,5\,7\,3_9 \; + \\ a\,b\,c\,d_9 \\ \hline a\,b\,c\,d\,0\,0\,0_9 \end{array}$$

$3+d=10_9=9 \rightarrow d=6$

$1+7+c=10_9=9 \rightarrow c=1$

$1+5+b=10_9=9 \rightarrow b=3$

$1+2+a=6_9=6 \rightarrow a=3$

$\therefore\ \overline{abcd}_9 = 3316_9$

Caso 1

Cuando el factor de cifras máximas tiene exponente impar

Sea

$$\underbrace{\overline{ab...c}_n}_{m \text{ cifras}} \times \left[\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}_n}_{p \text{ cifras}}^{\text{impar}}\right] = \underbrace{\overline{...xy...z}_n}_{q \text{ cifras}}$$

Si $m=p=q$; además $x=(n-1)$, entonces

$$\underbrace{\overline{ab...c}_n}_{m \text{ cifras}} = \text{CA}\left(\underbrace{\overline{xy...z}_n}_{q \text{ cifras}}\right)$$

Ejemplos

- $\underbrace{\overline{abcd}}_{4 \text{ cifras}} \times \underbrace{9999}_{4 \text{ cifras}} = ...\underbrace{6713}_{4 \text{ cifras}}$

  Observe que $m=p=q=4$; además, $6 \neq 9$ (cifra máxima de la base 10) y el exponente es igual a 1 (impar).

  Luego,

  $\overline{abcd} = \text{CA}(6713)$

  $\therefore\ \overline{abcd} = 3287$

- $\underbrace{\overline{abc}_6}_{3 \text{ cifras}} \times \underbrace{555_6^{\overline{CV2019}}}_{3 \text{ cifras}} = ...\underbrace{125_6}_{3 \text{ cifras}}$

  Observe que $m=p=q=3$

  $1 \neq 5$ (cifra máxima de la base 6) y el exponente es igual a $\overline{CV2019}$ (impar)

  Luego,

  $\overline{abc}_6 = \text{CA}(125_6)$

  $\therefore\ \overline{abc}_6 = 431_6$

Caso 2

Cuando el factor de cifras máximas tiene exponente par

Sea

$$\underbrace{\overline{ab...c}_n}_{m \text{ cifras}} \times \left[\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)...(n-1)}_n}_{p \text{ cifras}}^{\text{par}}\right] = \underbrace{\overline{...xy...z}_n}_{q \text{ cifras}}$$

Si $m=p=q$; además, $x=(n-1)$, entonces

$$\underbrace{\overline{ab...c}_n}_{m \text{ cifras}} = \underbrace{\overline{xy...z}_n}_{q \text{ cifras}}$$

Ejemplos

- $\underbrace{\overline{abc}}_{3 \text{ cifras}} \times \underbrace{999^2}_{3 \text{ cifras}} = ...\underbrace{681}_{3 \text{ cifras}}$

  Observe que $m=p=q=3$; además, $6 \neq 9$ (cifra máxima de la base 10) y el exponente es igual a 2 (par).

  Luego,

  $\overline{abc} = 681$

- $\underbrace{\overline{abcd}_9}_{4\text{ cifras}} \times \underbrace{8888_9^{\overline{UNI2020}}}_{4\text{ cifras}} = \ldots\underbrace{3715_9}_{4\text{ cifras}}$

  Observe que $m=p=q=4$; además, $3 \neq 8$ (cifra máxima de la base 9) y el exponente es igual a $\overline{UNI2020}$ (par).

  Luego,

  $\overline{abcd}_9 = 3715_9$

5 ▸ DIVISIÓN

Dados dos números naturales D y d ($d \neq 0$), el cociente de D y d se denota como D/d al número natural q, tal que $D=d\times q$.

Se llama división a la operación que hace corresponder a ciertos pares (D; d) de números naturales con sus cocientes D/d.

En general, la división presenta la siguiente forma:

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ \hline r & q \end{array}$$

donde

- D: dividendo
- d: divisor
- q: cociente
- r: residuo

Ejemplos

- Dividamos 72 entre 9.

  $$\begin{array}{r|l} 72 & 9 \\ \hline & 8 \end{array}$$

  Se observa que $72=9\times 8$.

- Dividamos 149 entre 11, con la condición de que el cociente sea entero.

  Como el cociente debe ser entero, se va a tener un nuevo término llamado residuo. Tenemos

  $$\begin{array}{rl} \text{dividendo } (D) \rightarrow & 149 \,|\, 11 \leftarrow \text{divisor } (d) \\ & \underline{11} \quad 13 \leftarrow \text{cociente } (q) \\ & \;\;39 \\ & \;\;\underline{33} \\ \text{residuo } (r) \rightarrow & \;\;\;6 \end{array}$$

Además, se puede observar que

$149=11\times 13+6$

De los ejemplos anteriores se puede tener en cuenta que al dividir dos números, si el cociente es entero, dicha división podrá ser exacta, ya que el residuo es cero; o podría ser inexacta si el residuo es diferente de cero.

5.1. CLASES DE DIVISIÓN

5.1.1. División exacta

Una división será exacta si el residuo es cero.

$$\begin{array}{r|l} 91 & 13 \\ \hline 0 & 7 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 24 & 6 \\ \hline 0 & 4 \end{array}$$

$91=13(7)$ $\qquad$ $24=6\times 4$

En general

$$\begin{array}{r|l} D & d \\ \hline 0 & q \end{array}$$

$$\boxed{D=d\times q}$$

Aplicación 20

¿Cuál es el menor número por el que se debe multiplicar a 91 para que el producto obtenido esté formado por cifras 7 únicamente?

Resolución

Siendo N el número, se tendrá lo siguiente:

$91\times N=777\ldots7$

Se observa que $N=\dfrac{777\ldots7}{91}$.

Dividimos para hallar el valor de N.

$$\begin{array}{r|l} 777 & 91 \\ \hline \underline{728} & 8547 \\ 497 & \\ \underline{455} & \\ 427 & \\ \underline{364} & \\ 637 & \\ \underline{637} & \\ \cdots & \end{array}$$

Vamos agregando cifras 7 hasta obtener una división exacta.

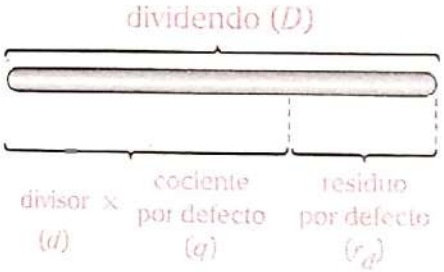
$\therefore\ N=8547$

5.1.2. División inexacta

Una división será inexacta si el residuo es diferente de cero. Esta división se puede realizar de dos maneras.

a. División inexacta por defecto

Es cuando el producto del divisor por el cociente es menor al dividendo. Al número de unidades que le falta a dicho producto para ser igual al dividendo se le llama residuo por defecto.



De ahí que $D=d\times q+r_d$.

Ejemplo

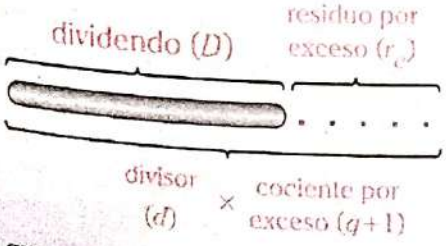
Dividamos 123 entre 13.

$$\begin{array}{r|l} 123 & 13 \\ \hline 117 & 9 \\ \hline 6 & \end{array} \qquad 13\times 9 < 123$$

$\rightarrow$ $123=13\times 9+6$

b. División inexacta por exceso

Es cuando el producto del divisor por el cociente es mayor al dividendo. El número de unidades que exceden en dicho producto al dividendo es llamado residuo por exceso, considerando que dicho cociente es el menor posible $(q+1)$.



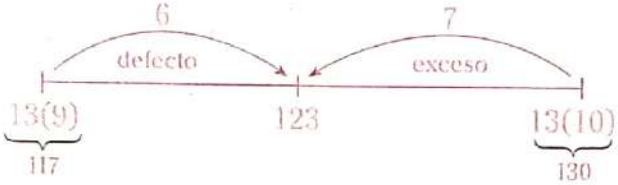
De ahí que

$D=d(q+1)-r_e$

Ejemplo

Dividamos 123 entre 13.

Buscamos ciertos números que multiplicados por 13 de un resultado que esté próximo a 123.



En resumen,

DIVISIÓN INEXACTA POR	
Defecto	Exceso
$\begin{array}{r\|l} 123 & 13 \\ \hline 6 & 9 \end{array}$ $123=13\times 9+6$	$\begin{array}{r\|l} 123 & 13 \\ \hline 7 & 10 \end{array}$ $123=13\times 10-7$

En general,

DIVISIÓN INEXACTA POR	
Defecto	Exceso
$\begin{array}{r\|l} D & d \\ \hline r_d & q \end{array}$ $D=d\times q+r_d$	$\begin{array}{r\|l} D & d \\ \hline r_e & q+1 \end{array}$ $D=d\,(q+1)-r_e$

Las propiedades de la división entera inexacta son las siguientes:

1. $0 < \text{residuo} < d$

2. residuo máximo$=d-1$

Demostración

Como el residuo debe ser menor que el divisor, para que sea máximo, ya que es entero, tendría que ser una unidad menor que el divisor.

$\therefore$ residuo máximo$=d-1$

3. $\boxed{r_d+r_e=d}$

Demostración

De lo anterior sabemos lo siguiente:

$$D=d\times q+r_d$$
$$D=d(q+1)-r_e$$

Como ambas expresiones son equivalentes, tendremos

$$d\times q+r_d=d(q+1)-r_e$$
$$d\times q+r_d=d\times q+d-r_e$$
$$r_d=d-r_e$$
$$\therefore\ r_d+r_e=d$$

Aplicación 21

Al dividir $\overline{abc}$ entre $\overline{bc}$, se obtuvo 11 de cociente y 80 de residuo. Calcule $a+b+c$.

Resolución

Del enunciado tenemos

$$\begin{array}{l|l} \overline{abc} & \overline{bc} \\ \hline 80 & 11 \end{array}$$

Observe que $\overline{bc}>80$.

$$\overline{abc}=\overline{bc}\times 11+80$$

Descomponemos polinómicamente por bloques a $\overline{abc}$.

$$\overline{a00}+\overline{bc}=\overline{bc}\times 11+80$$
$$\overline{a00}=10\times\overline{bc}+80$$

Dividimos entre 10.

$$\overline{a0}=\overline{bc}+8$$

Además, c debe ser 2, ya que la expresión de la izquierda termina en cero.

Luego, tenemos

$$\overline{a0}=\overline{b2}+8 \qquad \overline{b2}>80 \quad b\text{: 8 o 9}$$

$90 = 82+8$ Sí cumple

$100 = 92+8$ No cumple

Entonces

$$a=9;\ b=8;\ c=2$$
$$\therefore\ a+b+c=19$$

Aplicación 22

Halle un número que dividido entre 148 genere un cociente igual al residuo por defecto, siendo este igual al residuo por exceso. Dé como respuesta la suma de cifras de dicho número.

Resolución

De acuerdo con el enunciado, $q=r_d=r_e$.

Por propiedad sabemos que

$$r_d+r_e=148 \quad (\text{como } r_d=r_e)$$
$$\rightarrow\ 2r_d=148$$
$$r_d=74$$

Reconstruimos la división.

$$\begin{array}{l|l} D & 148 \\ \hline 74 & 74 \end{array}$$

$$\rightarrow\ D=148\times 74+74$$
$$D=11\,026$$

Por lo tanto, la suma de cifras del número es

$$1+1+0+2+6=10$$

5.2. ALTERACIONES DE LA DIVISIÓN INEXACTA

5.2.1. Por adición de unidades al dividendo

Al sumarle una cierta cantidad al dividendo, dicha cantidad se suma al residuo. Si esta cantidad es menor al divisor, entonces tendremos que el nuevo residuo y el cociente no se verán alterados; pero si el nuevo residuo no es menor al divisor, se divide entre él. El cociente obtenido será el número de unidades que aumenta el cociente de la división inicial, y el residuo que deje será el nuevo residuo.

Ejemplos

- Sea la división inicial

$$\begin{array}{l|l} 353 & 25 \\ \hline 3 & 14 \end{array}$$

Aumentamos 10 unidades al dividendo.

$$\begin{array}{l} 353 + \mathbf{10} \,|\, 25 \\ \underbrace{3 + \mathbf{10}}_{\text{residuo} < \text{divisor}} \;\; 14 \end{array}$$

← El cociente no varía

13 < 25

Aumentamos 60 unidades al dividendo.

$$\begin{array}{l} 353 + \mathbf{60} \,|\, 25 \\ \underbrace{3 + \mathbf{60}}_{\text{residuo} > \text{divisor}} \;\; 14 \end{array}$$

63 > 25 → $\begin{array}{l} 63 \,|\, 25 \\ 13 \;\; 2 \end{array}$

nuevo residuo ↑ ↑ aumento del cociente

Luego,

$$\begin{array}{l} 413 \;\; |\, 25 \\ 13 \;\;\; 16 = 14 + \mathbf{2} \end{array}$$

- Sea la división inicial

$$\begin{array}{l} 1723 \,|\, 32 \\ 27 \;\;\; 53 \end{array}$$

Aumentamos 3 unidades al dividendo.

$$\begin{array}{l} 1723 + \mathbf{3} \,|\, 32 \\ \underbrace{27 + \mathbf{3}}_{\text{residuo} < \text{divisor}} \;\; 53 \end{array}$$

← El cociente no varía

30 < 32

Aumentamos 115 unidades al dividendo.

$$\begin{array}{l} 1723 + \mathbf{115} \,|\, 32 \\ \underbrace{27 + \mathbf{115}}_{\text{residuo} > \text{divisor}} \;\; 53 \end{array}$$

142 > 32 → $\begin{array}{l} 142 \,|\, 32 \\ 14 \;\; 4 \end{array}$

nuevo residuo ↑ ↑ aumento del cociente

Luego,

$$\begin{array}{l} 1838 \,|\, 32 \\ 14 \;\;\; 57 = 53 + \mathbf{4} \end{array}$$

5.2.2. Al multiplicar por cierto número al dividendo y al divisor

Si el dividendo y divisor de una división entera se multiplican por un mismo número entero positivo, el cociente entero no varía, pero el resto queda multiplicado por dicho número entero.

Demostración

Sea la división entera $\begin{array}{l} D \,|\, d \\ r \;\; q \end{array}$.

De ahí que $D = dq + r$.

Ahora multipliquemos por n.

$Dn = dnq + rn$

Por lo tanto, se puede observar que el dividendo es Dn y el divisor es dn.

Como $r < d$, entonces, $rn < dn$.

De lo último se deduce que

$$\begin{array}{l} D \times n \,|\, d \times n \\ r \times n \;\; q \end{array}$$

Ejemplo

Sea la división inicial

$$\begin{array}{l} 37 \,|\, 8 \\ 5 \;\; 4 \end{array}$$

Multiplicamos por 5 al dividendo y divisor.

$$\begin{array}{l} 37 \times \mathbf{5} \,|\, 8 \times \mathbf{5} \\ 5 \times \mathbf{5} \;\; 4 \end{array} \rightarrow \begin{array}{l} 185 \,|\, 40 \\ 25 \;\; 4 \end{array}$$

5.2.3. Al multiplicar por cierto número al dividendo, pero no al divisor

Si al dividendo se le multiplica por un entero positivo, pero no al divisor, entonces el residuo quedará multiplicado por dicho entero positivo. Si el nuevo residuo es menor que el divisor, entonces, el cociente también estará multiplicado por dicho entero. Pero si el nuevo residuo es mayor que el divisor, se divide entre él: el cociente obtenido será el número de unidades que aumenta el producto del cociente por el entero y el residuo que deje será el nuevo residuo.

Ejemplos

- Sea la división inicial

$$\begin{array}{l} 67 \,|\, 9 \\ 4 \;\; 7 \end{array}$$

Multiplicamos por 2 al dividendo, pero no al divisor.

$$\begin{array}{l} 67\times\mathbf{2}\,\underline{|\,9} \\ \underbrace{4\times\mathbf{2}}_{\text{residuo} < \text{divisor}}\ 7\times\mathbf{2} \end{array}$$

← El cociente queda multiplicado por 2

$8 < 9$

Multiplicamos por 8 al dividendo, pero no al divisor.

$$\begin{array}{l} 67\times\mathbf{8}\,\underline{|\,9} \\ \underbrace{4\times\mathbf{8}}_{\text{residuo} > \text{divisor}}\ 7\times\mathbf{8} \end{array}$$

$32 > 9 \rightarrow$

$$\begin{array}{l} 32\,\underline{|\,9} \\ 5\ \ 3 \end{array}$$

aumento del cociente multiplicado por 8

nuevo residuo

Luego,

$$\begin{array}{l} 536\,\underline{|\,9} \\ 5\ \ 59=7\times\mathbf{8}+\mathbf{3} \end{array}$$

- Sea la división inicial

$$\begin{array}{l} 42\,\underline{|\,8} \\ 2\ \ 5 \end{array}$$

Multiplicamos por 3 al dividendo, pero no al divisor.

$$\begin{array}{l} 42\times\mathbf{3}\,\underline{|\,8} \\ \underbrace{2\times\mathbf{3}}_{\text{residuo} < \text{divisor}}\ 5\times\mathbf{3} \end{array}$$

← El cociente queda multiplicado por 3

$6 < 87$

Multiplicamos por 17 al dividendo, pero no al divisor.

$$\begin{array}{l} 42\times\mathbf{17}\,\underline{|\,8} \\ \underbrace{2\times\mathbf{17}}_{\text{residuo} > \text{divisor}}\ 5\times\mathbf{17} \end{array}$$

$34 > 8 \rightarrow$

$$\begin{array}{l} 34\,\underline{|\,8} \\ 2\ \ 4 \end{array}$$

aumento del cociente multiplicado por 17

nuevo residuo

Luego,

$$\begin{array}{l} 714\,\underline{|\,8} \\ 2\ \ 89=5\times\mathbf{17}+\mathbf{4} \end{array}$$

Aplicación 23

El dividiendo de una división entera es 842 y el residuo es 25. ¿Cuántas unidades, como mínimo, se debe agregar al dividendo para que el residuo sea el mayor posible?

Resolución

Tenemos

$$\begin{array}{l} 842\,\underline{|\,d} \\ \quad\ \ q \\ \underbrace{25}_{\text{división inicial}} \end{array}$$

$(d > 25)$

De ahí obtenemos

$842=d\times q+25$

$817=d\times q$

$19\times 43=d\times q$

Luego, $d=43$; $q=19$

$$\begin{array}{l} 842\,\underline{|\,43} \\ \underbrace{25\ \ 19}_{\text{división inicial}} \end{array} \qquad \begin{array}{l} 842+x\,\underline{|\,43} \\ \underbrace{25+x\ \ 19}_{\text{residuo} < \text{divisor}} \end{array}$$

(ya que dice como mínimo)

Finalmente,

$25+x=42$ (residuo máximo)

$x=17$

Por lo tanto, se debe agregar, como mínimo, 17.

6 ▸ DETERMINACIÓN *A PRIORI* DE LA CANTIDAD DE CIFRAS DE UN PRODUCTO Y UN COCIENTE

6.1. CON RESPECTO AL PRODUCTO DE DOS NÚMEROS

Aplicación 24

Si A tiene tres cifras y B tiene dos cifras, ¿cuántas cifras tendrá $A\times B$?

Resolución

Sean

$A=\overline{mnp} \rightarrow 10^2 \leq A < 10^3$

$B=\overline{xy} \rightarrow 10 \leq B < 10^2$

Multiplicamos.

$$10^3 \leq \underbrace{A \times B}_{1000;\ 1001;\ \ldots;\ 99\,999} < 10^5$$

Nos damos cuenta de que $A \times B$ puede tener 4 o 5 cifras.

Aplicación 25

Si C tiene cuatro cifras y D tiene cinco cifras, ¿cuántas cifras tendrá $C^2 \times D^3$?

Resolución

Sea $C = \overline{abcd} \rightarrow 10^3 \leq C < 10^4$

Elevamos al cuadrado.

$$10^6 \leq C^2 < 10^8 \qquad \text{(I)}$$

Sea $D = \overline{xyzwp} \rightarrow 10^4 \leq D < 10^5$

Elevamos al cubo.

$$10^{12} \leq D^3 < 10^{15} \qquad \text{(II)}$$

Multiplicamos (I) y (II).

$$10^{18} \leq C^2 \times D^3 < 10^{23}$$

Observamos que $C^2 \times D^3$ podría tener 19; 20; 21; 22 o 23 cifras.

6.2. CON RESPECTO AL COCIENTE DE LA DIVISIÓN DE DOS NÚMEROS

Aplicación 26

Si A tiene cuatro cifras y B tiene tres cifras, ¿cuántas cifras tendrá $\frac{A}{B}$?

Resolución

Sean

$$A = \overline{abcd} \rightarrow 10^3 \leq A < 10^4 \qquad \text{(I)}$$

$$B = \overline{mnp} \rightarrow 10^2 \leq B < 10^3$$

Tomamos el inverso de B.

$$\frac{1}{10^3} < \frac{1}{B} < \frac{1}{10^2} \qquad \text{(II)}$$

Luego, multiplicamos (I) y (II).

$$10^3 \times \frac{1}{10^3} < A \times \frac{1}{B} < 10^4 \times \frac{1}{10^2}$$

$$1 < \frac{A}{B} < 10^2$$

Observamos que $\frac{A}{B}$ podría tener 1 o 2 cifras.

Aplicación 27

Si A tiene cinco cifras y B tiene tres cifras, ¿cuántas cifras tendrá $\frac{A^3}{B^2}$?

Resolución

Sea $A = \overline{xyzwp} \rightarrow 10^4 \leq A < 10^5$

Elevamos al cubo.

$$10^{12} \leq A^3 < 10^{15} \qquad \text{(I)}$$

Sea $B = \overline{abc} \rightarrow 10^2 \leq B < 10^3$

Elevamos al cuadrado.

$$10^4 \leq B^2 < 10^6$$

Tomamos el inverso.

$$\frac{1}{10^6} < \frac{1}{B^2} < \frac{1}{10^4} \qquad \text{(II)}$$

Luego, multiplicamos (I) y (II).

$$10^{12} \times \frac{1}{10^6} < A^3 \times \frac{1}{B^2} < 10^{15} \times \frac{1}{10^4}$$

$$10^6 < \frac{A^3}{B^2} < 10^{11}$$

Observamos que $\frac{A^3}{B^2}$ podrá tener 7; 8; 9; 10 u 11 cifras.

En general, sea N el producto o cociente de 2 o más números, se cumple lo siguiente:

> Si $10^n < N < 10^m$, entonces
> - N tendrá como mínimo $n+1$ cifras.
> - N tendrá como máximo m cifras.

LECTURA

Matemáticas en el Imperio incaico

Las matemáticas de los incas (o del Tawantinsuyu) se refieren al conjunto de conocimientos numéricos y geométricos y los instrumentos desarrollados y usados en la nación de los incas antes de la llegada de los españoles. Se puede caracterizar, principalmente, por su capacidad de cálculo en el ámbito económico. Los quipus y yupanas son muestra de la importancia que alcanzó la aritmética en la administración estatal incaica. Esto se plasmó en una aritmética sencilla pero efectiva, para fines contables, basada en el sistema decimal; conocieron el cero, y dominaron la adición, la resta, la multiplicación y la división. Tuvo un carácter eminentemente aplicativo a tareas de gestión, de estadística y de medición. Lejos del esbozo euclidiano de la matemática como un corpus deductivo. Apta y útil para las necesidades de una administración centralizada.

Representación de un quipu, instrumento de contabilidad y nemotécnico inca.

Se tiene noción que en el Imperio inca el sistema de numeración imperante era el decimal. Una de las principales referencias que confirman esto son las crónicas que presentan una jerarquía de autoridades organizadas decimalmente.

Encargado	Cantidad de familias
puriq	1 familia
pisqa kamayuq	5 familias
chunka kamayuq	10 familias
pisqa chunka kamayuq	50 familias
pachak kamayuq	100 familias
pisqa pachaka kamayuq	500 familias
waranga kamayuq	1000 familias
pisqa waranga kamayuq	5000 familias
chunka waranga kamayuq	10 000 familias

También se puede confirmar el uso del sistema decimal en el incario, por medio de la interpretación de los quipus, que están organizados de modo que los nudos de acuerdo a su ubicación pueden representar: unidades, decenas, centenas, etc. Sin embargo, la principal confirmación de este sistema se expresa en la denominación de los números en quechua, en que los números van desarrollándose de manera decimal; por ejemplo, 1, huk; 2, iskay; 3, kimsa; 4, tawa; 5, pisqa; 6, suqta; 7, qanchis; 8, pusaq; 9, isqun; 10, chunka; 20, iskay chunka, etc.

Adaptado de < http://perueduca.pe>.

Problemas resueltos

Problema 1

Si $\overline{a1}+\overline{a2}+\overline{a3}+...+\overline{aa}=\overline{bc8}$, determine el valor de $a+b+c$.

Resolución

Escribimos de forma vertical.

$$\begin{array}{r} \overline{a1}\ + \\ \overline{a2} \\ \overline{a3} \\ \vdots \\ \overline{aa} \\ \hline \overline{bc8} \end{array}$$

Se observa que a es una cifra menor que 10.

$\rightarrow\ a<10$

$\rightarrow\ 1+2+3+...+a=...8$

$$\frac{a(a+1)}{2}=\frac{7\times 8}{2}=28$$

$$\rightarrow\ \boxed{a=7}$$

$$\underbrace{a+a+a+...+a}_{a \text{ sumandos}}+\boxed{2}=\overline{bc}$$

$$a^2+\boxed{2}=\overline{bc}$$

$$7^2+\ 2\ =51$$

Luego,

$a=7;\ b=5;\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=13$

Problema 2

Alana se compró el álbum del mundial. Durante la primera semana pegó $\overline{bac}$ figuritas; en la siguiente pegó $\overline{abc}$ figuritas, faltándole aún $\overline{(2b)8}$ figuritas de las $\overline{6a0}$ figuritas en total. ¿Cuántas son las figuritas doradas que tiene dicho álbum si estas son el 5% del total?

Resolución

Del enunciado del problema, tenemos

$$\begin{array}{r} \overline{b\ a\ c}\ + \\ \overline{a\ b\ c} \\ \overline{(2b)\ 8} \\ \hline \overline{6\ a\ 0} \end{array}$$

$2c+8=...$ → 10, 20

$\downarrow$ 6

$a+3b+\square=\overline{...a}$

$3b+\square=\overline{...0}$

$3+1=10$ Sí cumple

$2=$ No cumple

$b+a+\boxed{1}=6$

$\downarrow$ 3 $\downarrow$ 2

Entonces, $a=2$, $b=3$.

El total de figuras es 620.

Por lo tanto, las figuras doradas son $5\%(620)=31$.

Problema 3

Si $\overline{19ab}+\overline{18ab}+\overline{17ab}+...+\overline{1ab}=\overline{xyz77}$, determine $a+x$.

Resolución

Hay 19 sumandos.

La suma se puede expresar como

$$100+200+...+1800+1900+19\overline{ab}=\overline{xyz77}$$

en la cual se puede observar que

$$19\overline{ab}=...77$$

$$\overline{ab}=83$$

Al reemplazar

$$\underbrace{1983+1883+1783+...+183}_{19 \text{ sumandos}}=\overline{xyz77}$$

$$1983+1883+1783+...+183=\overline{xyz77}$$

$$\left(\frac{1983+183}{2}\right)\times 19=\overline{xyz77}=20\ 577$$

Entonces

$a=8$ y $x=2$

$\therefore\ a+x=10$

Problema 4

Se cumple que

$\overline{ab6}_9+\overline{bcc}_9+\overline{aa2}_9=\overline{dc4a}_9$

Determine el valor de $a\times c+d\times b$.

Resolución

Expresamos la adición de forma vertical.

$$\begin{array}{cccc} 3 & 2 & 1 & \leftarrow \text{orden} \\ \hline a & b & 6_9 & + \\ b & c & c_9 & \\ a & a & 2_9 & \\ \hline d & c & 4 & a_9 \end{array}$$

En el orden 1,

$6+c+2=\overline{ma}_9;\ a\leq 2$

$8+c=9m+a$

10	2	0	No cumple: $c<9$ y $a\neq 0$
☐	1	☐	Sí cumple

$\rightarrow\ a=c+1$ (I)

En el orden 2,

$b+c+a=\overline{n4}_9;\ n\leq 2$

$(a-1)$

$b+2a=\overline{n5}_9$ (II)

En el orden 3,

$a+b+a=\overline{dc}_9;\ d\leq 2$

$b+2a=\overline{dc}_9$ (III)

De (II) y (III), obtenemos que $c=5$.

Al reemplazar c en (I), obtenemos que $a=6$.

Luego,

$b+2(6)=\overline{d5}_9$

$b+7=9d$

2	1	Sí cumple
11	2	No cumple

Entonces, $a=6$; $b=2$; $c=5$ y $d=1$

$\therefore\ a\times c+b\times d=32$

Problema 5

Determine la suma de todos los números de la forma $\overline{a(a-1)b(2b-1)}$. Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

Resolución

Primero debemos calcular la cantidad de número de forma dada en el sistema decimal.

$\overline{a(a-1)b(2b-1)}$

1	1
2	2
3	3
⋮	4
9	5

$9\times 5=45$ (total de números)

Luego, escribimos todos los dígitos que van a ser sumados, para luego realizar las sumas parciales.

$\overline{a(a-1)b(2b-1)}$

1	0	1	1	
2	1	2	3	
3	2	3	5	
4	3	4	7	
5	4	5	9	
6	5			
7	6			
8	7			
9	8			
	2	2	5 +	$\leftarrow (1+3+5+7+9)\times\frac{45}{5}=25\times 9$
1	3	5		$\leftarrow (1+2+3+4+5)\times\frac{45}{5}=15\times 9$
1	8	0		$\leftarrow (0+1+2+\ldots+8)\times\frac{45}{9}=36\times 5$
2	2	5		$\leftarrow (1+2+\ldots+9)\times\frac{45}{9}=45\times 5$
2	4	4	5	7 5

Entonces la suma es 244 575.

Por lo tanto, la suma de cifras es 27.

Problema 6

Determine la suma de todos los números capicúas de 3 cifras de la base 9. Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

Resolución

Calculemos la cantidad de numerales capicúas de 3 cifras de la base 9.

$$\begin{array}{ccc} a & b & a_9 \\ \downarrow & \downarrow & \\ 1 & 0 & \\ 2 & 1 & \\ 3 & 2 & \\ \vdots & \vdots & \\ 8 & 8 & \\ \hline \end{array}$$

$8\times 9=72$ (total de numerales)

Luego escribimos todos los dígitos para realizar la adición en la base 9.

$$\begin{array}{ccc} a & b & a_9 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ \vdots & 2 & \vdots \\ 8 & 8 & 8 \\ \hline \end{array}$$

$$\begin{array}{rl} 4\ 0\ 0_9\ + & \leftarrow (1+2+...+8)\times\left(\frac{72}{8}\right)=324=400_9 \\ 3\ 5\ 0_9 & \leftarrow (0+1+2+...+8)\times\left(\frac{72}{9}\right)=288=350_9 \\ 4\ 0\ 0_9 & \leftarrow (1+2+...+8)\times\left(\frac{72}{8}\right)=324=400_9 \\ \hline 4\ 4\ 0\ 0\ 0_9 & \end{array}$$

Por lo tanto, la suma es $44\ 000_9$ y la suma de sus cifras es 8.

Problema 7

Sea $\mathbb{N}$ el conjunto de números naturales. Indique el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si $a-b\in\mathbb{N}$ y $b\in\mathbb{N}$, entonces $a\in\mathbb{N}$.
II. Si $a-b\in\mathbb{N}$ y $a\in\mathbb{N}$, entonces $b\in\mathbb{N}$.
III. Si $a^2\in\mathbb{N}$, entonces $a\in\mathbb{N}$.

Resolución

I. Verdadero

Dado que $a-b\in\mathbb{N}$ y $b\in\mathbb{N}$, podemos afirmar que

$a-b=c$, tal que $c\in\mathbb{N}$

$$a=\underbrace{b}_{\mathbb{N}}+\underbrace{c}_{\mathbb{N}}$$

$\rightarrow\ a\in\mathbb{N}$

II. Falso

Dado que $a-b\in\mathbb{N}$ y $a\in\mathbb{N}$, podemos afirmar que

$a-b=c$, tal que $c\in\mathbb{N}$

$$\underbrace{a}_{\mathbb{N}}-\underbrace{c}_{\mathbb{N}}=\underbrace{b}_{¿?}$$

Entonces, b no necesariamente es un número natural, ya que b puede salir un valor negativo.

Ejemplo

$$\begin{array}{l} a=5\in\mathbb{N} \\ c=8\in\mathbb{N} \end{array} \rightarrow\ 5-8=\overbrace{-3}^{b\notin\mathbb{N}}$$

III. Falso

Dado que $a^2\in\mathbb{N}$, podemos afirmar que

$a^2=c$, tal que $c\in\mathbb{N}$

$a=\sqrt{c}$

Entonces, a no necesariamente es un número natural, ya que $\sqrt{c}$ puede salir un valor no natural.

Ejemplo

$a^2=8\quad(8\in\mathbb{N})$

$a=\sqrt{8}\ \rightarrow\ a\notin\mathbb{N}$

Problema 8

Si $\overline{abc}_8=2\times\overline{cba}_8$

además, $\overline{xyz}-\overline{yzz}=234$

determine el valor de $E=a\cdot b\cdot c+x\cdot y\cdot z$

Resolución

Por dato

- $\overline{abc}_8=2\times\overline{cba}_8$

  $\overline{abc}_8=\overline{cba}_8+\overline{cba}_8$

  $\overline{abc}_8-\overline{cba}_8=\overline{cba}_8$

  Por propiedad

  - $b=7$
  - $a+c=7$ (*)

  Además,

  $a-c=c+1 \rightarrow a=2c+1$

  Reemplazamos en (*).

  $\underset{(2c+1)}{a} + c=7 \rightarrow c=2$

  $a=5$

  Luego, $a=5$; $b=7$ y $c=2$

- $\overline{xyz}-\overline{yz7}=234$

  $\overline{xyz}=\overline{yz7}+234$

  Escribimos de forma vertical.

$$\begin{array}{r} 2\ \ 3\ \ 4\ + \\ \hline y\ \ z\ \ 7 \\ \hline x\ \ y\ \ z \end{array}$$

1

$4+7=11 \rightarrow z=1$ (lleva 1, queda 1)

$\boxed{1}+3+\underset{1}{z}=5 \rightarrow y=5$

$2+\underset{5}{y}=7 \rightarrow x=7$

Luego,

$z=1$; $y=5$ y $x=7$

$\therefore\ a\cdot b\cdot c+x\cdot y\cdot z=5\times7\times2+1\times5\times7=105$

Problema 9

Al momento de restar 2 números de 3 cifras cada uno, Jenny invierte el orden de las cifras del minuendo, obteniendo 112 de diferencia. Si se sabe que la diferencia real es de 805 y la suma de cifras del minuendo y el sustraendo es 28, halle el producto de cifras del sustraendo.

Resolución

Por dato

- Sustracción real

  minuendo sustraendo

  $\overline{abc} - \overline{xyz} = 805$ (I)

- Sustracción realizada por Jenny

  $\overline{cba}-\overline{xyz}=112$ (II)

Restamos (I) y (II).

$$\begin{array}{r} \overline{abc}-\overline{xyz}=805 \\ \overline{cba}-\overline{xyz}=112 \\ \hline \overline{abc}-\overline{cba}=693 \end{array} \ (-)$$

$\rightarrow a-c=7$

8	1	No cumple en (I)
9	2	Sí cumple

Es decir,

- $$\begin{array}{r} 9\ b\ 2- \\ \hline x\ y\ z \\ \hline 8\ 0\ 5 \end{array}$$

  1

  $z=7$

  $(b-1)-y=0$

  $b=y+1$

  $x=1$

- $a+b+c+x+y+z=28$

  9 2 1 7

  $\underbrace{b}_{(y+1)}+y=9$

  $y=4$

  $b=5$

Luego, $a=9$; $b=5$ y $c=2$

$\therefore\ a\times b\times c=90$

Problema 10

Si $CA(\overline{abc}_9)+CA(\overline{mn7}_9)=CA(\overline{cba}_9)$ determine el máximo valor de $a+b+c+m+n$.

Resolución

Por dato

$$CA(\overline{abc}_9)+CA(\overline{mn7}_9)=CA(\overline{cba}_9)$$

$$(\cancel{1000}_9-\overline{abc}_9)+CA(\overline{mn7}_9)=(\cancel{1000}_9-\overline{cba}_9)$$

$$CA(\overline{mn7}_9)=\overline{abc}_9-\overline{cba}_9$$

$$CA(\overset{8\ 8\ 9}{\overline{m\,n\,7}_9})=\underbrace{6\ 8\ 2}_{8}{}_9$$

$$\underset{2\ \ 0}{\downarrow\ \downarrow}$$

Por propiedad de la sustracción

- $\underset{8}{\underset{\downarrow}{a}}-\underset{1}{\underset{\downarrow}{c}}=7$
- b: 0; 1; 2; ...; 8
  $b_{máx}=8$

$\therefore\ (a+b+c+m+n)_{máx}=8+8+1+2+0=19$

Problema 11

Se suman los complementos aritméticos de los números de tres cifras en el sistema quinario. Indique la suma de cifras de dicho resultado en el sistema decimal.

Resolución

Los números de tres cifras en base 5 son

100_5; 101_5; 102_5; ...; 444_5

Sus complementos respectivos son

$CA(100_5)=400_5=100$

$CA(101_5)=344_5=99$

$CA(102_5)=343_5=98$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$CA(444_5)=\ \ 1_5=1$

$\rightarrow$ suma en base $10=1+2+...+98+99+100$

suma en base $10=\dfrac{100\times101}{2}=5050$

$\therefore$ suma de cifras $=5+0+5+0=10$

Problema 12

Se cumple que $\overline{abc}\times333=...856$. Calcule la suma de productos parciales del producto de $\overline{nc5}_6$ por $\overline{cab}_6$ en dicho sistema de numeración. Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

Resolución

Por dato

$$\overline{abc}\times333=...856$$

$$3(\overline{abc}\times333)=(...856)\times3 \quad \times3$$

$$\overline{abc}\times999=...568$$

$$\overline{abc}\times(1000-1)=...568$$

$$\overline{abc000}-\overline{abc}=...568$$

Realizamos la adición de forma vertical.

$$\begin{array}{r} \overset{1\ \ 1}{...5\ 6\ 8}\ + \\ a\ b\ c \\ \hline a\ b\ c\ 0\ 0\ 0 \end{array}$$

$c=2$

$b=3$

$a=4$

La multiplicación será

$425_6\times243_6$

$SPP=425_6\times(\underbrace{2+4+3}_{9=13_6})$

$SPP=425_6\times13_6$

$SPP=10413_6$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$1+0+4+1+3=9$

Problema 13

Se cumple que

$CA(\overline{abc}_7)\times333=...251$

Determine el valor de $a+b+c$.

Resolución

Por dato

$$\text{CA}(\overline{abc_7})\times 333=\ldots 251$$

Multiplicamos en ambos miembros por 3.

$$\text{CA}(\overline{abc_7})\times 333\times 3=(\ldots 251)\times 3$$

$$\text{CA}(\overline{abc_7})\times 999=\ldots 753$$

Por propiedad

$$\text{CA}(\overline{abc_7})=\text{CA}(\overset{9}{7}\,\overset{9}{5}\,\overset{10}{3})$$

$$\text{CA}(\overline{abc_7})=247$$

$$\text{CA}(\overline{\overset{6}{a}\,\overset{6}{b}\,\overset{7}{c}}_7)=502_7$$

Entonces

- $6-a=5 \rightarrow a=1$
- $6-b=0 \rightarrow b=6$
- $7-c=2 \rightarrow c=5$

$\therefore\ a+b+c=12$

Problema 14

Si se sabe que $\overline{abcd}$ es igual al producto de tres números pares consecutivos y $4\times\overline{ab}=5\times\overline{cd}$, calcule el número que al agregarle la suma de sus cifras se obtenga el CA de $\overline{abcd}$.

Resolución

Se tiene lo siguiente:

- $4\times\overline{ab}=5\times\overline{cd}$

$$\frac{\overline{ab}}{\overline{cd}}=\frac{5}{4} \rightarrow \begin{array}{l}\overline{ab}=5k\\ \overline{cd}=4k\end{array}$$

- $\overline{abcd}=n(n+2)(n+4)$

$$100\times\underbrace{\overline{ab}}_{5k}+\underbrace{\overline{cd}}_{4k}=n(n+2)(n+4)$$

$$\rightarrow\ 2^3\times 3^2\times 7\times k=\underset{\downarrow}{n}\ \underbrace{(n+2)}\underbrace{(n+4)}=\overset{\circ}{9}$$

	10	12	14	No cumple
	12	14	16	No cumple
$k=8 \leftarrow$	14	16	18	Sí cumple

Luego,

$$\overline{abcd}=4032$$

Nos piden N; además, por condición

$$N+\sum\text{cifras de } N=\text{CA}(4032)$$

$$N+\sum\text{cifras de } N=5968$$

Se observa que

$$\rightarrow\ \overline{59pq}+5+9+p+q=5968$$

$$11\underset{\underset{4}{\downarrow}}{p}+2\underset{\underset{5}{\downarrow}}{q}=54$$

$\therefore\ N=5945$

Problema 15

Se cumple que $\overline{1abc_8}\times\overline{de_8}=\ldots 464_8$; además, $\overline{de_8}\times\overline{1(a+1)(b-1)(c+1)_8}=\ldots 647_8$

Halle el residuo de dividir $\overline{cba}$ entre $\overline{ed}$.

Resolución

Partimos del dato.

$$\overline{de_8}\times\overline{1(a+1)(b-1)(c+1)_8}=\ldots 647_8$$

$$\overline{de_8}\times(\overline{1abc_8}+57)=\ldots 647_8$$

$$\underbrace{\overline{de_8}\times\overline{1abc_8}}+\overline{de_8}\times 71_8=\ldots 647_8$$

$$\ldots 464_8+\overline{de_8}\times 71_8=\ldots 647_8$$

$$\overline{de_8}\times 71_8=\ldots 163_8$$

Reconstruimos la multiplicación.

$$d=1 \text{ y } e=3$$

Luego,

$$\overline{1abc_8}\times\overline{de_8}=\ldots 464_8$$

$$\overline{1abc_8}\times 13_8=\ldots 464_8$$

Entonces

$$\begin{array}{r}\overline{1abc_8}\ \times\\ 13_8\\ \hline \ldots 124_8\\ \ldots 34_8\\ \hline \ldots 464_8\end{array}$$

Reconstruimos la multiplicación.

$c=4$

$b=3$

$a=0$

Nos piden r en

$$\begin{array}{l|l} \overline{cba} & \overline{ed} \\ r & q \end{array} \rightarrow \begin{array}{l|l} 430 & 31 \\ 27 & 13 \end{array}$$

$\therefore\ r=27$

Problema 16

En cierto país se contabiliza en el sistema quinario. Si un comerciante vende un artículo en $\overline{abcabcabc}_5$ y se observa que está ganando lo mismo que le costó, que fue $\overline{cbacbacba}_5$, calcule $a+b+c$.

Resolución

Sabemos que

precio de venta=precio de costo+ganancia

Del dato tenemos

precio de venta=2(precio de costo)

$$\overline{abcabcabc}_5=2\overline{cbacbacba}_5$$

Descomponemos en bloques.

$$\overline{abc}_5\times(5^6+5^3+1)=2\overline{cba}_5\times(5^6+5^3+1))$$
$$\overline{abc}_5=2\times\overline{cba}_5$$

De ahí

$$\overline{abc}_5=\overline{cba}_5+\overline{cba}_5$$
$$\overline{abc}_5-\overline{cba}_5=\overline{cba}_5$$

Por propiedad

$b=4$ y $a+c=4$

$\therefore\ a+b+c=8$

Problema 17

En una división por defecto, cuyo cociente es 23, si se aumenta 59 unidades al dividendo y se vuelve a realizar la división, el cociente es igual a 26 y el residuo aumenta en 8; además, si al dividendo se aumenta 60 unidades y se vuelve a realizar la división, el cociente aumenta en 4 y la división es exacta. Halle el dividendo.

Resolución

Del enunciado del problema

- $\begin{array}{l|l} D & d \\ r & 23 \end{array} \rightarrow D=23d+r$ (I)

- $\begin{array}{l|l} D+59 & d \\ r+8 & 26 \end{array} \rightarrow D+59=26d+r+8$ (II)

- $\begin{array}{l|l} D+60 & d \\ 0 & 27 \end{array} \rightarrow D+60=27d$ (III)

Reemplazamos (I) en (II).

$$D+59=26d+r+8$$
$$\downarrow$$
$$(23d+r)+51=26d+r$$
$$51=3d$$
$$d=17$$

Reemplazamos d en (III).

$$D+60=27d$$
$$D+60=27(17)$$
$$\therefore\ D=399$$

Problema 18

La suma de los cuatro términos de una división inexacta es 327, pero si el dividendo y divisor se triplican y se realiza nuevamente la división, la suma de los términos es el complemento aritmético de 9049. Determine la suma de cifras del mayor valor que toma el dividendo.

Resolución

Del enunciado del problema

$$\begin{array}{l|l} D & d \\ r & q \end{array} \rightarrow D+d+q+r=327 \quad \text{(I)}$$

Por propiedad

$$\begin{array}{l|l} 3D & 3d \\ 3r & q \end{array} \rightarrow 3D+3d+q+3r=\text{CA}(9049)$$
$$3D+3d+q+3r=951 \quad \text{(II)}$$

Multiplicamos por 3 a (I) y restamos (II).

$$\begin{array}{r} \cancel{3D}+\cancel{3d}+3q+\cancel{3r}=981 \\ \cancel{3D}+\cancel{3d}+\ \ q+\cancel{3r}=951 \\ \hline 2q=30 \\ q=15 \end{array} \quad (-)$$

Reemplazamos en (I).

$$\underset{(15d+r)}{D} + d + \underset{15}{q} + r = 327;\ r<d$$

$$16d+2r=312$$

$$\overbrace{8d}^{\text{par}} + \overset{\text{par}}{r} = \overbrace{156}^{\text{par}}\ ;\ r<d$$

19	4	Sí cumple ← máx
18	12	Sí cumple
17	20	No cumple

Luego,

$$D_{\text{máx}}=19(15)+4=289$$

Por lo tanto, la suma de cifras del mayor valor que toma el dividendo es $2+8+9=19$.

Problema 19

Se divide el CA de un número de tres cifras entre el mismo número y se obtiene residuo máximo. Halle la suma de cifras del número.

Resolución

Por condición

$$\begin{array}{l|l} \text{CA}(\overline{abc}) & \overline{abc} \\ \hline (\overline{abc}-1) & d \\ r_{\text{máx.}} & \end{array}$$

Luego,

$$\text{CA}(\overline{abc})=\overline{abc}\times d+(\overline{abc}-1)$$

$$1000-\overline{abc}=\overline{abc}\times d+\overline{abc}-1$$

$$1001=\overline{abc}\times d+2\overline{abc}$$

$$7\times 11\times 13=\underbrace{\overline{abc}}_{143}\times\underbrace{(d+2)}_{7}$$

Nos piden la suma de cifras.

$\therefore\ a+b+c=1+4+3=8$

Problema 20

Si A tiene tres cifras más que C y B tiene dos cifras más que C, calcule la suma de la mínima cantidad y máxima cantidad de cifras que puede tener $\dfrac{A^5B^4}{C^9}$.

Resolución

Sea x el número de cifras de C, entonces

- el número de cifras de A será $x+3$.
- el número de cifras de B será $x+2$.

Además,

$$10^{x+2}\leq A<10^{x+3}$$

$$10^{x+1}\leq B<10^{x+2}$$

$$10^{x-1}\leq C<10^{x}$$

Entonces

$$10^{5x+10}\leq A^5<10^{5x+15} \qquad \text{(I)}$$

$$10^{4x+4}\leq B^4<10^{4x+8} \qquad \text{(II)}$$

$$10^{9x-9}\leq C^9<10^{9x} \qquad \text{(III)}$$

Luego,

$$10^{9x+14}\leq A^5B^4<10^{9x+23}$$

Invertimos la expresión (III).

$$\frac{1}{10^{9x}}<\frac{1}{C^9}\leq\frac{1}{10^{9x-9}}$$

Multiplicamos.

$$10^{9x+14-9x}<A^5B^4\times\frac{1}{C^9}<10^{9x+23-9x+9}$$

$$10^{14}<\frac{A^5B^4}{C^9}<10^{32}$$

$\dfrac{A^5B^4}{C^9}$ puede tener 15; 16; 17; ...; 31; 32 cifras.

Mínima cantidad de cifras: 15

Máxima cantidad de cifras: 32

$\therefore\ 15+32=47$

Test

1. Si $a+b+c=13$, calcule $M=\overline{bca}+\overline{cab}+\overline{abc}$. Dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 9 B) 12 C) 13
D) 10 E) 11

2. En una empresa, entre contadores, administradores y abogados, son $\overline{ab6}$ empleados, de los cuales $\overline{b(c+1)8}$ son contadores, $\overline{3c}$ son administradores y 23 son abogados. ¿Cuántos empleados serán técnicos si están conformados por $\overline{ac}$ personas?

A) 38 B) 32 C) 35
D) 36 E) 33

3. Si $\overline{mnp}_9-\overline{pnm}_9=\overline{xy2}_9$ determine el valor de $x\cdot y$.

A) 64 B) 72 C) 40
D) 48 E) 56

4. Si se cumple que
$CA\left(\overline{(a-3)(b-2)(c-1)(c+3)}_9\right)=\overline{5a(a+2)d}_9$
calcule $a+b+c+d$.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

5. Aumentando en 10 unidades a ambos factores de una multiplicación, el producto aumenta en 650. Calcule la diferencia de cuadrados de dichos factores si se diferencian en 15.

A) 775 B) 875 C) 825
D) 925 E) 975

6. Sea $\overline{abc}\times 4=...956$ y $\overline{abc}\times 7=...173$. Determine la suma de las tres últimas cifras del producto de $\overline{abc}\times 15$.

A) 13 B) 16 C) 14
D) 18 E) 9

7. Dos números suman 146. Al realizar la división del mayor entre el menor de los números se obtiene 6 de cociente y 13 de residuo. ¿Cuál es el mayor de los números?

A) 127 B) 130 C) 113
D) 107 E) 132

8. En una división exacta, el dividendo es 136; pero al sumarle 17 y realizar nuevamente la división se obtiene que el cociente aumenta en 2 unidades y el residuo es mínimo. Calcule la suma de cifras del cociente inicial.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

9. Si A posee 9 cifras, B posee 6 cifras y C posee 4 cifras, calcule la máxima cantidad de cifras que puede tener $E=\dfrac{A^3\times B}{C^2}$.

A) 27 B) 29 C) 26
D) 28 E) 25

CLAVES
1 B 2 C 3 D 4 B 5 C 6 A 7 A 8 C 9 B

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Miguel compró $\overline{(a+1)(b-2)(c+2)}$ figuritas para su álbum; su hermano Carlos compró $\overline{(c-1)(a+1)(b+3)}$ figuritas y su primo Sebastián compró $\overline{(b+2)(c+1)(a+1)}$ figuritas. ¿Cuántas figuritas compraron entre Miguel, Carlos y Sebastián? Considere que $a+b+c=13$.

A) 1645 B) 1632 C) 1674
D) 1649 E) 1638

2. Si $\overline{an}\times\overline{a7}+\overline{a6}+\overline{a5}=\overline{14(n-1)7}$, halle $a+n$.

A) 10 B) 7 C) 8
D) 9 E) 11

3. Determine la suma de cifras de las cuatro últimas cifras del resultado de E.

$$E=3+33+333+...+\underbrace{333...3}_{53\text{ cifras}}+4+44+444+...+\underbrace{444...4}_{53\text{ cifras}}$$

A) 20 B) 18 C) 17
D) 21 E) 16

4. Se cumple que

$$\overline{a27}_9+\overline{bcc}_9+\overline{aa3}_9=\overline{dc3a}_9$$

Calcule el valor de $a\times b+c\times d$.

A) 22 B) 14 C) 23
D) 13 E) 20

5. Se sabe lo siguiente:

$$\overline{1yy}_n+\overline{2yy}_n+\overline{3yy}_n+...+\overline{(n-1)yy}_n=\overline{abc4}_n$$

Calcule $a+b+c+n+y$ si también se sabe que $n+y=12$.

A) 18 B) 27 C) 29
D) 37 E) 21

6. Se cumple que

$$S=74+7474+747474+...+\underbrace{747474...74}_{74\text{ cifras}}$$

Calcule S y dé como respuesta la suma de sus dos últimas cifras.

A) 9 B) 10 C) 11
D) 12 E) 13

7. Calcule la suma de todos los números capicúas de cuatro cifras del sistema senario. Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 10 B) 15 C) 18
D) 22 E) 32

8. Calcule la suma de todos los numerales de la forma $\overline{a(a+2)bm}_7$. Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 22 B) 18 C) 12
D) 15 E) 26

9. Si $\overline{9ba}+\overline{ac8}+\overline{d24}=\overline{cc1d}$ halle $a+b+c+d$.

A) 15 B) 16 C) 18
D) 19 E) 20

10. En una sustracción, el minuendo es el triple de la diferencia, y la suma de todos los términos de esa sustracción es 240. ¿Cuál es el complemento aritmético del sustraendo?

A) 80 B) 20 C) 880
D) 40 E) 60

11. Si $\overline{ab}-\overline{cn}=40$ y $\overline{cn}+\overline{db}=50$, halle la suma de cifras del resultado de $\overline{abdb}+\overline{dbab}$.

A) 15 B) 17 C) 19
D) 18 E) 20

12. Si $\overline{abc}-\overline{cba}=\overline{mnp}$

halle $a+b+c$, dado que $\overline{abc}$ es máximo y $\overline{mnp}$ es el menor posible.

A) 13 B) 18 C) 19
D) 21 E) 25

13. Si $\overline{abc}_m-\overline{cba}_m=\overline{xyz}_m$

$\overline{xyz}_m+\overline{zyx}_m=\overline{defg}_m$

además $d+e+f+g=16$,

calcule m.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

14. En 1977, la edad de Juan era el inverso de las dos últimas cifras del año de su nacimiento, lo mismo sucede con la edad de su abuelo. Si la diferencia de sus edades es 45 y la edad del abuelo en 1977 era la inversa de la edad de Juan, ¿cuál fue la edad del abuelo en 1972?

A) 56 B) 55 C) 54
D) 53 E) 52

15. Se cumple que $\overline{(2a)bc}-\overline{cd(a-3)}=\overline{def}$

además, $c-d=4$ y $b+e=10$.

Halle $d+e+f$.

A) 10 B) 11 C) 12
D) 14 E) 20

16. Si $\overline{abc}_8=2(\overline{cba}_8)$

calcule $\overline{ab}_8+c$ en base 10.

A) 26 B) 30 C) 40
D) 49 E) 52

Nivel intermedio

17. Se cumple lo siguiente:

$\overline{abcd}_9-\overline{dcba}_9=\overline{mnmb}_9$, $b>c$

Además, $\overline{ab}_9+\overline{cd}_9=\overline{ee}_9$.

Calcule la suma de los numerales de la forma $\overline{abcde}_9$ que satisfacen lo anterior.

A) 263183_9 B) 185046_9 C) 197633_9
D) 368658_9 E) 216383_9

18. Si $b>c$; $\overline{abcd}-\overline{dcba}=\overline{2m7n}$ y $\overline{ab}+\overline{dc}=96$, calcule $a\times b\times c\times d$.

A) 900 B) 945 C) 495
D) 895 E) 800

19. Dado que $\text{CA}(\overline{abcd})=a+b+c+d$, halle $a+b+c+d$.

A) 30 B) 36 C) 24
D) 32 E) 28

20. Si $\text{CA}(\overline{mnp})+\text{CA}(\overline{pnm})=1031$, calcule $\text{CA}(m+n+p)$.

A) 82 B) 85 C) 88
D) 89 E) 91

21. Si $\text{CA}(\overline{abcd})=\overline{(e^2)e1b}$,

además, $\text{CA}(\overline{ab})-\text{CA}(\overline{cd})=\overline{ef}$ y

$\overline{ab}+\overline{cd}+\overline{ef}=166$, calcule $a+b+c+d+e+f$.

A) 25 B) 28 C) 31
D) 36 E) 41

22. Si a un número de tres cifras se le suma dos veces la cifra de las decenas, se obtiene el complemento aritmético de dicho número, siendo la cifra de unidades significativa. Calcule la suma de los cuadrados de las cifras del número.

A) 98 B) 49 C) 126
D) 63 E) 48

23. Si $CA(\overline{aba0})=\overline{7(b+1)(4a)m}$

halle $a+b+m$.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

24. El complemento aritmético del numeral $\overline{a(a+1)(a+2)}$ es igual a 34 veces el complemento aritmético de $\overline{(2a)a}$. Calcule la suma de cifras del $CA[\overline{(a-1)a(a+1)}]$.

A) 20 B) 12 C) 8
D) 10 E) 16

25. Si $CA(\overline{abcd}_8)=\overline{(a+1)c}$

calcule $a+b+c+d$.

A) 25 B) 19 C) 25
D) 18 E) 21

26. En el sistema de numeración octal, determine un número capicúa de cuatro cifras, tal que su complemento aritmético sea otro número capicúa de tres cifras. Dé como respuesta la suma de las cifras del número pedido.

A) 26 B) 32 C) 30
D) 28 E) 34

27. Se cumple lo siguiente:

$CA(\overline{abc})+CA(\overline{den})=\overline{mpq}$

$CA(\overline{mpq})=75$

Halle la suma de cifras del resultado de $\overline{137den}+\overline{54abc}$

A) 20 B) 24 C) 30
D) 17 E) 19

28. Se cumple que

$CA(\overline{abc})\times 999^{2018}=...476$

Calcule el valor $a+b+c$.

A) 10 B) 11 C) 18
D) 12 E) 17

29. La suma de los productos parciales de un número M multiplicado por 234 es 24 633. Si multiplicamos M por otro número N de cuatro cifras, el resultante termina en 1672, calcule la suma de cifras de $M+N$.

A) 13 B) 24 C) 26
D) 15 E) 27

30. Se multiplica un numeral capicúa de cuatro cifras por otro de tres cifras impares consecutivas crecientes y se obtiene que la suma de los productos parciales es 43 956. Halle la suma de las cifras diferentes del numeral capicúa.

A) 12 B) 10 C) 14
D) 8 E) 16

31. Si $\dfrac{\overline{abcd}}{9}=\dfrac{\overline{ab}\times\overline{cd}}{8}$, calcule la suma de valores posibles de $\overline{acdb}$.

A) 8689 B) 9846 C) 8468
D) 9864 E) 8754

32. Si $\overline{abcd}\times 117_8=\overline{xy8953}$, calcule $m+n$.

Además, se sabe que

$\overline{m(b-1)(d+1)}_a=\overline{nn(b-1)(c+4)}_{(x+1)}$

A) 6 B) 10 C) 8
D) 19 E) 7

33. Si $\overline{cvcv}_7 \times \overline{cv}_7 = \overline{aaccaa}_7$; $a < c < v$, calcule $S = \overline{cva}_7 + \overline{vac}_7 + \overline{acv}_7$.

A) 1332_7 B) 1232_7 C) 1552_7
D) 1442_7 E) 1333_7

34. Se cumple lo siguiente:

$\overline{ab}_7 \times \overline{ba}_7 = \overline{bb(a-1)(b+1)}_7$

$\overline{ab}_8 \times \overline{ba}_8 = \overline{(b-1)(a+1)(a+1)(b-1)}_8$

Calcule $a \times b$.

A) 24 B) 15 C) 18
D) 21 E) 16

35. Dado que $\overline{mnpq}_6 \times 5555_6 = ...2142_6$. ¿Cuánto se le debe sumar, como mínimo, a $\overline{mnp}$ para que al dividirse entre $\overline{qp}$ la división resulte exacta?

A) 7 B) 12 C) 28
D) 17 E) 23

36. Al dividir $\overline{ab7a}$ entre $\overline{ba}$, se obtuvo como cociente 67 y residuo $\overline{(b-a)(b-a)}$. Calcule $(a+b)$.

A) 6 B) 8 C) 5
D) 7 E) 9

Nivel avanzado

37. Se divide 135 472 entre cierto número de tres cifras y se observa que los primeros restos parciales fueron 82 y 191; además, el resto final fue 4. Calcule la suma del cociente y divisor si este último es menor que 300.

A) 527 B) 581 C) 851
D) 724 E) 990

38. Halle el mayor número entero, que al dividirlo entre 137 se obtenga por resto un número que es el cuádruple del cociente.

A) 3148 B) 5124 C) 5117
D) 4794 E) 4612

39. Se tiene un número que al ser dividido por 23 da como residuo el doble del cociente. ¿Cuántos números cumplen con esta condición?

A) 12 B) 10 C) 11
D) 13 E) 14

40. Halle $a+b+c$ si se cumplen las siguientes condiciones:

$$\begin{array}{r|l} \overline{abab1} & \overline{ba} \\ \hline --- & \overline{66c} \\ \overline{abb} & \\ --- & \\ \overline{ac1} & \\ --- & \\ 0 & \end{array}$$

A) 10 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

41. Se divide $\overline{ab5}$ entre cierto número y se observa que el producto de los cocientes por defecto y por exceso es 306; además, el residuo por defecto es 18. ¿Cuántos valores puede tomar el divisor?

A) 6 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

42. En una división inexacta, al residuo le faltan 35 unidades para ser máximo y le sobran 29 unidades para ser mínimo. ¿Cuál es el valor del dividendo si el cociente es 23?

A) 1629 B) 1654 C) 1548
D) 1327 E) 1249

43. Cierto ganadero agrupa sus animales en grupos de 19 cada uno, tras lo cual le sobran ciertos animales. Si compra 264 animales y los vuelve agrupar, el número de grupos aumenta en 14 y le sobrarían 5 animales. Indique la suma de cifras de la mayor cantidad de animales que tenía inicialmente si esta era menor de 550.

A) 539 B) 541 C) 543
D) 545 E) 547

44. En una división inexacta se observa que el divisor es cuatro veces más que el residuo, y si al residuo se le disminuye 17 este sería mínimo (la división sigue siendo inexacta). Halle la suma de cifras del dividendo si el cociente es los 5/3 del residuo.

A) 18 B) 19 C) 20
D) 24 E) 27

45. En una división entera inexacta, la suma de los 4 términos es 795. Si se multiplica el dividendo y el divisor por 5, la nueva suma es 3899. ¿Cuántos valores diferentes puede tomar el divisor?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

46. Con dos números enteros positivos fueron realizadas las cuatro operaciones siguientes:
- Los sumaron.
- Restaron el menor del mayor.
- Los multiplicaron.
- Dividieron el mayor por el menor.

La suma de los resultados obtenidos es 243. ¿Cuáles son esos números?

A) 7 y 22 o 3 y 62
B) 8 y 24 o 2 y 54
C) 5 y 20 o 7 y 45
D) 4 y 29 o 9 y 25
E) 6 y 30 o 3 y 50

47. Si en una división inexacta, al dividendo se le multiplica por 3 (pero no al divisor), el residuo se hace cero. Halle la suma del cociente y residuo original si la suma de los cocientes es 22 y el nuevo cociente excede en 5 al residuo original.

A) 8 B) 17 C) 10
D) 11 E) 12

48. Al dividir $\overline{abcd}_{11}$ entre $\overline{cd}_{11}$, la división es exacta con cociente igual a 121_{11}. Si $\overline{cdab}_{11}$ es igual al producto de tres números pares consecutivos, halle el menor valor de $\overline{ab}+\overline{cd}$.

A) 44 B) 63 C) 54
D) 45 E) 66

49. Si A posee 4 cifras, B posee 3 cifras y C posee 5 cifras, ¿cuántas cifras como máximo podría tener $\dfrac{A^6 \times B^3}{C^5}$?

A) 15 B) 24 C) 13
D) 16 E) 12

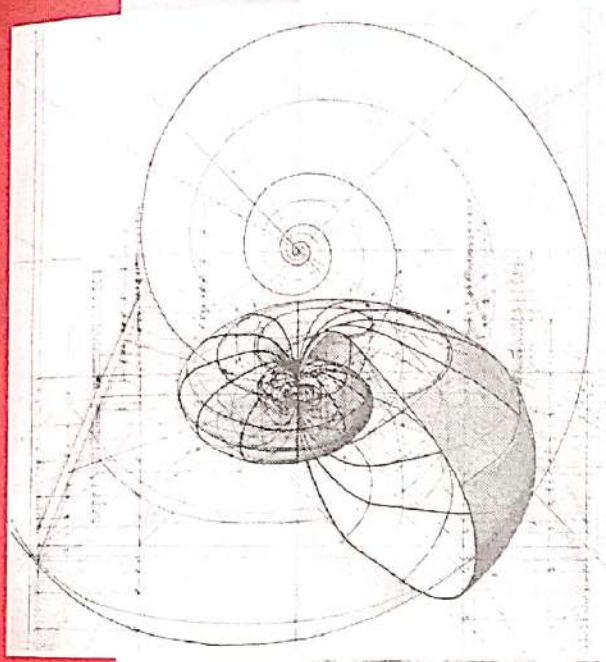
50. Si A tiene cuatro cifras más que B, y C tiene dos cifras menos que B, calcule la suma de la mínima cantidad y la máxima cantidad de cifras puede tener M.

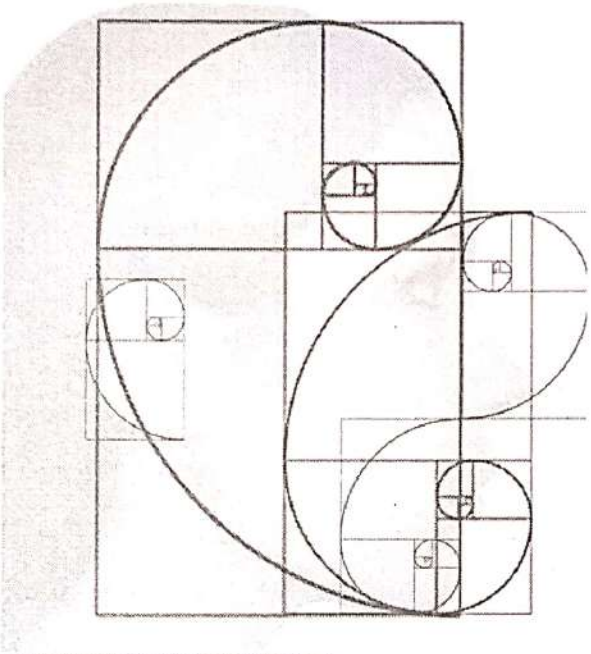
$$M = \frac{A^7 \times B^2}{C^9}$$

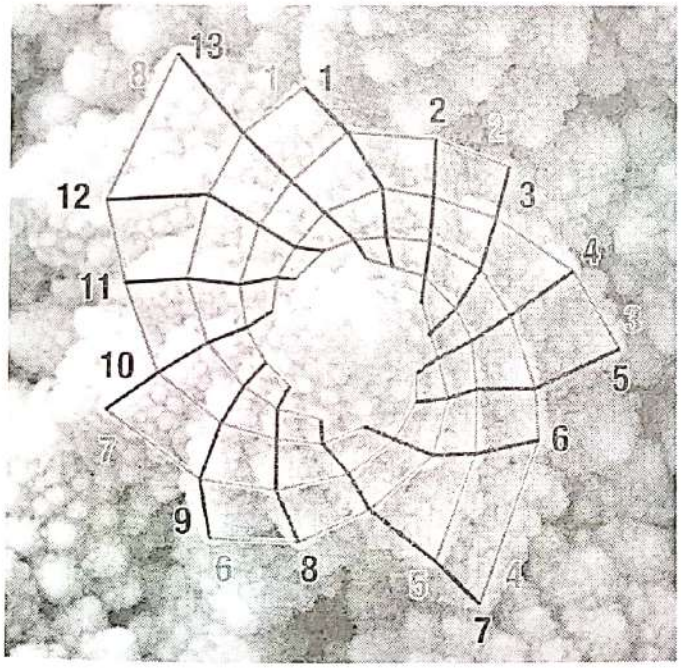
A) 92 B) 54 C) 72
D) 93 E) 91

Capítulo

VI







Sucesiones y Series

Juan Esqueche Paiconcial

CAPÍTULO VI

SUCESIONES Y SERIES

Objetivos

- Identificar las sucesiones que se presentan en el desarrollo de la matemática.
- Deducir la expresión general del término enésimo de una sucesión y determinar la suma de términos de dicha sucesión.
- Aprender a calcular la cantidad de cifras utilizadas en una sucesión natural.

Introducción

Comúnmente, la mayoría de las personas ha escuchado hablar de las sucesiones y de las aplicaciones que poseen en diferentes disciplinas. Lo cierto es que la matemática por sí sola no explica el porqué del número de pétalos que tienen flores como las margaritas: 34; 55 o 89, o las trayectorias espirales que se describen en las semillas de ciertas flores, piñas, o en los brotes de algunos tallos. Sin embargo, resulta asombroso descubrir que existen patrones numéricos comunes que subyacen no solamente en el orden que gobierna el crecimiento de algunos seres vivos, sino también en las proporciones que guardan las medidas de ciertas obras de arte que han sido consignadas como clásicas y que logran un impacto estético profundo en sus espectadores.

Los números asociados a la cantidad de pétalos de las distintas flores, a las cavidades que guardan las semillas en los frutos, a las trayectorias espirales que se describen en las piñas, la alcachofa o en los brotes del tallo, forman parte de un grupo de números que pueden presentarse de la siguiente manera:

1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; ... (sucesión de Fibonacci)

Las sucesiones que siguen una regla determinada han llamado siempre la atención; es por ello que grandes matemáticos han enriquecido su estudio y han contribuido al conocimiento de algunas propiedades que se cumplen en ellas.

Notamos que es indispensable un buen conocimiento y manejo del tema. En este capítulo desarrollaremos principalmente las sucesiones numéricas; la sucesión lineal; la sucesión de segundo orden con sus respectivas propiedades, determinando el término general y la suma de dichos términos (series); además, conoceremos las sumas notables y la cantidad de cifras que se utilizan para enumerar un libro.

SUCESIONES

1 DEFINICIÓN

Una sucesión es una función cuyo dominio es el conjunto de los números enteros positivos (números naturales). Los elementos del rango de la sucesión, llamados términos de la sucesión, están contenidos en un conjunto no vacío A (números reales).

Ejemplo

Conjunto → N		A	
1	→	20	(1.er término)
2	→	25	(2.º término)
3	→	30	(3.er término)
4	→	35	(4.º término)
⋮	⋮	⋮	

Se observa que a cada número natural le corresponde un único término; lo podemos expresar mediante el siguiente conjunto:

$$A=\{(1;20),(2;25),(3;30),\ldots(n;5n+15);\ldots\}$$

Esto define una función cuyos elementos son los pares ordenados de la forma $(n;a_n)$.

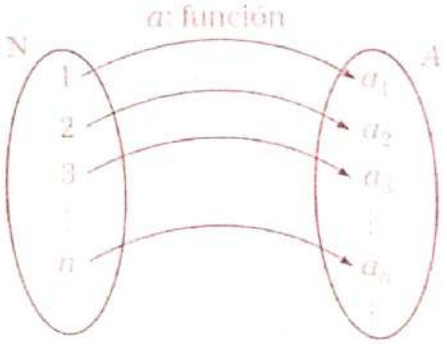
$$A=\{(1;a_1),(2;a_2),(3;a_3),\ldots,(n;a_n),\ldots\}$$

También se observa que

Dominio (A): $\{1;2;3;\ldots;n;\ldots\}$

Rango (A): $\{a_1;a_2;a_3;\ldots;a_n;\ldots\}$

Gráficamente sería lo siguiente:



Nota

Nuestro estudio abarcará las sucesiones numéricas, principalmente, pero debemos tener en cuenta que existen otras sucesiones, como la sucesión literal y la sucesión gráfica.

2 TIPOS DE SUCESIONES

2.1. SUCESIÓN LITERAL

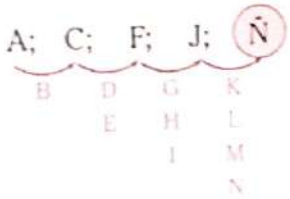
Es aquella sucesión que se caracteriza por tener como términos a letras del alfabeto distribuidas de acuerdo a un criterio. Los criterios más conocidos son los siguientes:

- lugar que ocupa la letra del alfabeto
- iniciales de palabras conocidas
- formación de palabras

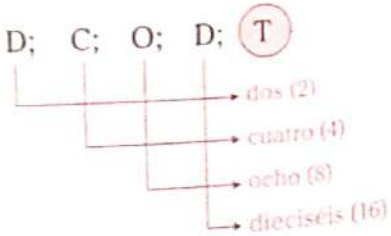
Ejemplos

Analicemos qué letra continúa en cada caso.

- A; C; F; J; ...



- D; C; O; D; ...



- R; O; M; J...

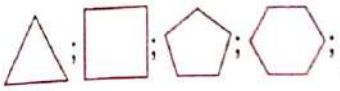
2.2. SUCESIÓN GRÁFICA

Es aquella sucesión conformada por figuras que han sido construidas y ordenadas de acuerdo a cierto criterio que determina el lugar de cada término de la sucesión.

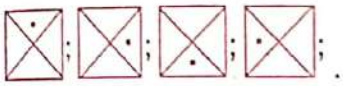
A = conjunto de figuras geométricas

Ejemplos

Veamos qué figura continúa en cada sucesión.

- 

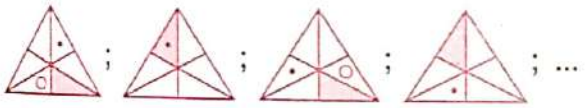
  Criterio: número de lados de cada figura aumenta de uno en uno.

- 

  Criterio: Cada cuadrado gira 90° en sentido horario.

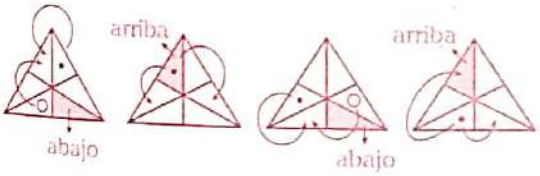
Aplicación 1

Indique la figura que continúa.



Resolución

De las figuras observamos que



Además,

- * avanza en sentido antihorario de uno a uno.
- o avanza en sentido horario dejando un casillero.

Por tanto, la figura que continúa es

2.3. SUCESIÓN NUMÉRICA

Una sucesión numérica se caracteriza por tener como términos a los números (reales o complejos) distribuidos y ordenados de acuerdo a cierto criterio.

Si $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$ son los términos de una sucesión que llamaremos A, será denotado por

$$A=\{a_n\}$$

Nota

En el presente capítulo, cuando indiquemos la palabra sucesión, estaremos haciendo referencia a una **sucesión numérica**, y nos referiremos a la secuencia $\{a_n\}$: $a_1, a_2; a_3; ... a_n$

3 MÉTODOS DE REPRESENTACIÓN DE LAS SUCESIONES

3.1. MÉTODO ANALÍTICO

Cuando se tiene el término general de la sucesión, es decir, se tiene la regla de correspondencia a_n, en este caso se puede hallar cualquier término de la sucesión sin necesidad de conocer los términos precedentes.

Ejemplo

término general		términos de la sucesión que representa					
$\{a_n\}$	→	a_1 ;	a_2 ;	a_3 ;	a_4 ;	a_5 ;	...
$\{2n+6\}$	→	8 ;	10 ;	12 ;	14 ;	16 ;	...
$\{n^3+1\}$	→	2 ;	5 ;	28 ;	65 ;	126 ;	...
$\{3n\}$	→	3 ;	6 ;	9 ;	12 ;	15 ;	...

3.2. MÉTODO RECURRENTE

Cuando especificamos, primero, un punto de partida y, segundo, la manera de calcular cada uno de los términos de la sucesión partiendo de los que preceden, la regla se llama de recurrencia; en esta se enlaza cada término de la sucesión con los precedentes.

Ejemplos

Veamos los cinco primeros términos de la sucesión en cada uno de los siguientes casos:

- $a_{n+1}=3a_n$; $a_1=5$; $n \geq 1$
  - $a_2=3a_1$
    $a_2=15$
  - $a_3=3a_2$
    $a_3=3\times 15$
    $a_3=45$
  - $a_4=3a_3$
    $a_4=135$
  - $a_5=3a_4$
    $a_5=405$

Es decir, tendremos lo siguiente:

$$\begin{array}{ccccc} a_1; & a_2; & a_3; & a_4; & a_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$\{a_n\}$: 5; 15; 45; 135; 405

- $b_{n+1}=n^2b_n;\ b_1=4;\ n\geq 1$
  - $b_2=1^2\times b_1 \rightarrow b_2=1^2\times 4=4$
  - $b_3=2^2\times 4=16$
  - $b_4=3^2\times 16=144$
  - $b_5=4^2\times 144=2304$

  Así tendremos

$$\begin{array}{ccccc} b_1; & b_2; & b_3; & b_4; & b_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$\{b_n\}$: 4; 4; 16; 144; 2304

- $d_n=d_{n-1}+d_{n-2};\ d_1=1 \wedge d_2=1;\ n\geq 3$
  - $d_3=d_2+d_1 \rightarrow d_3=1+1=2$
  - $d_4=d_3+d_2 \rightarrow d_4=2+1=3$
  - $d_5=d_4+d_3 \rightarrow d_5=3+2=5$

  Por lo que tendremos

$$\begin{array}{ccccc} d_1; & d_2; & d_3; & d_4; & d_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$\{d_n\}$: 1; 1; 2; 3; 5

A esta última sucesión se le conoce como la sucesión de Fibonacci, la cual hemos tratado en nuestra introducción al inicio del capítulo.

Observación

Una relación de recurrencia para una sucesión $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_n$ es una ecuación que relaciona a_n con algunos de sus antecesores $a_1; a_2; a_3; \ldots; a_{n-1}$.

3.3. MÉTODO DESCRIPTIVO

Cuando se presenten los primeros términos de la sucesión, los cuales se describen de manera que pueda generarse cada uno de los términos siguientes de dicha sucesión.

Ejemplos

- 7; 17; 27; 37; 47; ...

  Cada término de la sucesión aumenta de 10 en 10 a partir del 7.

- 35; 32; 29; 26; 23; ...

  Cada término de la sucesión disminuye de 3 en 3 a partir del 35.

- 2; −4; 8; −16; 32; ...

  Cada uno de los términos son potencias de dos que van cambiando de signo a partir del dos.

Nota

- Hay secuencias que no tienen término enésimo definido; por ejemplo:

  2; 3; 5; 7; 11; ... (números primos)

  4; 6; 8; 9; 10; ... (números compuestos)

- Existen también algunas sucesiones especiales propuestas por matemáticos notables:
  - De Fibonacci:

    $t_1=1;\ t_2=1;\ t_n=t_{(n-1)}+t_{(n-2)};\ \forall\, n\geq 3$

    1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...
  - De Feinberg (Tribonacci)

    $t_1=1;\ t_2=1;\ t_3=2;\ t_n=t_{(n-1)}+t_{(n-2)}+t_{(n-3)}$

    $\forall\, n\geq 4$

    1; 1; 2; 4; 7; 13; 24; ...
  - De Lucas

    $t_1=1;\ t_2=3;\ t_n=t_{(n-1)}+t_{(n-2)}\quad \forall\, n\geq 3$

    1; 3; 4; 7; 11; 18; 29; ...

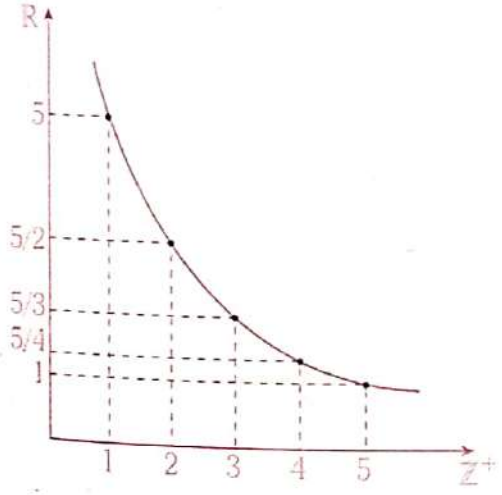
4 REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA SUCESIÓN

Dado que el dominio de la sucesión es el conjunto de los enteros positivos, la gráfica de la sucesión será una función discreta de puntos.

Ejemplos

- $a_n = \dfrac{5}{n}$

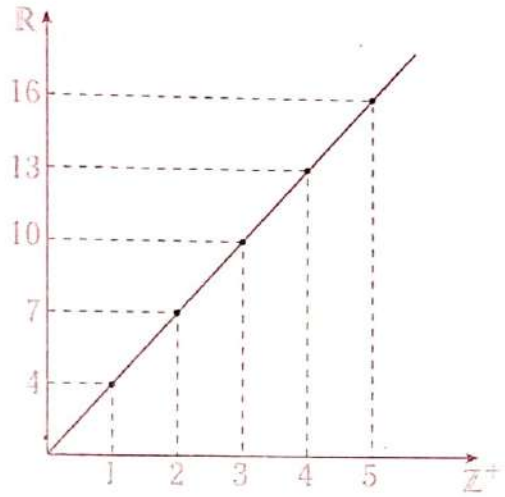
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
5	$\frac{5}{2}$	$\frac{5}{3}$	$\frac{5}{4}$	$\frac{5}{5}$	...



Veamos que conforme n toma valores más grandes, el valor del término se acerca a cero. En este caso, la gráfica muestra puntos que forman parte de una rama de hipérbola equilátera.

- $a_n = 3n+1$

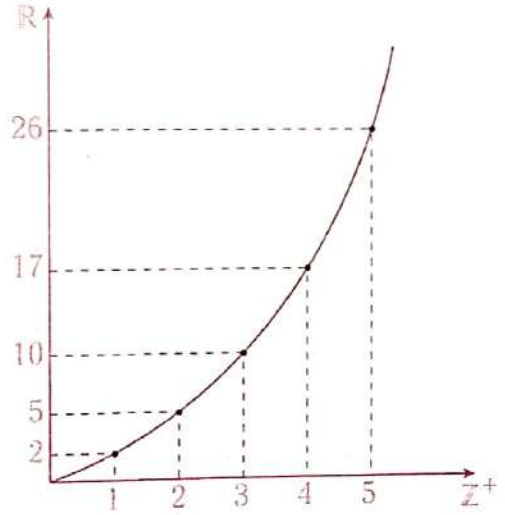
a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
4	7	10	13	16	...



Notamos que conforme n toma valores mayores, los términos son también mayores. En este caso, la gráfica tiene puntos que forman parte de una recta.

- $a_n = n^2+1$

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	...
2	5	10	17	26	...



Además, notamos que conforme n toma valores mayores, los términos son también mucho mayores. En este caso, la gráfica se conforma de puntos que forman parte de una parábola.

5▸ OPERACIONES CON SUCESIONES

Sean las sucesiones $\{a_n\}$; $\{b_n\}$ y $\{c_n\}$, tales que se cumplen las siguientes operaciones: adición y sustracción, multiplicación, multiplicación por un escalar y división.

5.1. ADICIÓN Y SUSTRACCIÓN

$$\{c_n\}=\{a_n\}\pm\{b_n\}=\{a_n\pm b_n\} \leftrightarrow c_n=a_n\pm b_n;\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Ejemplo

Sean las sucesiones $\{a_n\}=\{2n+1\}$ y $\{b_n\}=\left\{\frac{2}{n+1}\right\}$.

Entonces

$$\{a_n\}=\{3;\ 5;\ 7;\ 9;\ ...;\ 2n+1\}$$

$$\{b_n\}=\left\{\frac{2}{2};\ \frac{2}{3};\ \frac{2}{4};\ \frac{2}{5};\ ...;\ \frac{2}{n+1}\right\}$$

Luego,

$$\{a_n+b_n\}=\left\{3+\frac{2}{2};\ 5+\frac{2}{3};\ 7+\frac{2}{4};\ ...;\ 2n+1+\frac{2}{n+1}\right\}$$

$$\{c_n\}=\{a_n+b_n\}=\left\{\frac{8}{2};\ \frac{17}{3};\ \frac{30}{4};\ ...;\ \frac{2n^2+3n+3}{n+1}\right\}$$

$$\therefore\ \{c_n\}=\left\{\frac{2n^2+3n+3}{n+1}\right\}$$

5.2. MULTIPLICACIÓN

$$\{c_n\}=\{a_n\}\{b_n\}=\{a_n b_n\} \leftrightarrow c_n=a_n\cdot b_n;\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Ejemplo

Sean las sucesiones $\{a_n\}=\{2_n\}$ y $\{b_n\}=\{n^2\}$.

Entonces

$$\{a_n\}=\{2;\ 4;\ 6;\ 8;\ ...;\ 2n\}$$

$$\{b_n\}=\{1;\ 4;\ 9;\ 16;\ ...;\ n^2\}$$

Luego,

$$\{a_n\cdot b_n\}=\{2\cdot 1;\ 4\cdot 4;\ 6\cdot 9;\ 8\cdot 16;\ ...;\ 2n\cdot n^2\}$$

$$\{c_n\}=\{2;\ 16;\ 54;\ 128;\ ...;\ 2n^3\}$$

$$\therefore\ \{c_n\}=\{2n^3\}$$

5.3. MULTIPLICACIÓN POR UN ESCALAR

$$\{c_n\}=k\{a_n\}=\{ka_n\} \leftrightarrow c_n=ka_n;\ \forall n\in\mathbb{N},\ k\in\mathbb{R}$$

Ejemplo

Sean las sucesiones $\{a_n\}=\{n^2\}$ y $k=5$

Entonces

$$\{a_n\}=\{1;\ 4;\ 9;\ 16;\ ...;\ n^2\}$$

Luego,

$$\{5a_n\}=\{5\cdot 1;\ 5\cdot 4;\ 5\cdot 9;\ 5\cdot 16;\ ...;\ 5\cdot n^2\}$$

$$\{c_n\}=\{5a_n\}\{5;\ 20;\ 45;\ 80;\ ...;\ 5n^2\}$$

$$\therefore\ \{c_n\}=\{5n^2\}$$

5.4. DIVISIÓN

$$\{c_n\}=\frac{\{b_n\}}{\{a_n\}}=\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\} \leftrightarrow c_n=\frac{b_n}{a_n};\ a_n\neq 0,\ \forall n\in\mathbb{N}$$

Ejemplo

Sean las sucesiones

$$\{a_n\}=\{3n+2\}\ \text{y}\ \{b_n\}=\{n^3\}$$

Entonces

$$\{a_n\}=\{5;\ 8;\ 11;\ 14;\ ...;\ 3n+2\}$$

$$\{b_n\}=\{1;\ 8;\ 27;\ 64;\ ...;\ n^3\}$$

Luego,

$$\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}=\left\{\frac{1}{5};\ \frac{8}{8};\ \frac{27}{11};\ \frac{64}{14};\ ...;\ \frac{n^3}{3n+2}\right\}$$

$$\{c_n\}=\left\{\frac{b_n}{a_n}\right\}=\left\{\frac{1}{5};\ \frac{8}{8};\ \frac{27}{11};\ ...;\ \frac{n^3}{3n+2}\right\}$$

$$\therefore\ \{c_n\}=\left\{\frac{n^3}{3n+2}\right\}$$

6 CLASIFICACIÓN DE LAS SUCESIONES

6.1. DE ACUERDO AL NÚMERO DE TÉRMINOS

6.1.1. Sucesión finita

Cuando la cantidad de términos es limitada.

Por ejemplo, 4; 9; 14; 19; 24; ...; 99

En general, $a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n$

6.1.2. Sucesión infinita

Cuando la cantidad de términos es ilimitada.

Por ejemplo, 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; ...

En general, $a_1; a_2; a_3; a_4...; a_n; ...$

6.2. DE ACUERDO CON LA RELACIÓN ENTRE SUS TÉRMINOS

6.2.1. Sucesión creciente

Cuando cada término es mayor que cualquiera de los predecesores.

Por ejemplo, 17; 26; 37; 50; 65; ...

En general, $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq ... \leq a_n \leq a_{(n+1)} \leq ...$

Es decir, $\boxed{a_n \leq a_{(n+1)};\ \forall n \in \mathbb{N}}$

6.2.2. Sucesión decreciente

Cuando cada término es menor que cualquiera de los predecesores.

Por ejemplo, 73; 70; 67; 64; ...

En general, $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq a_4 \geq ... \geq a_n \geq a_{(n+1)} \geq ...$

Es decir, $\boxed{a_n \geq a_{(n+1)};\ \forall n \in \mathbb{N}}$

6.2.3. Sucesión estrictamente creciente

Una sucesión es estrictamente creciente si cada término es mayor que el anterior.

En general, $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < ... < a_n < a_{(n+1)} < ...$

Es decir, $\boxed{a_n < a_{(n+1)};\ \forall n \in \mathbb{N}}$

6.2.4. Sucesión estrictamente decreciente

Una sucesión es estrictamente decreciente si cada término es menor que el anterior.

En general, $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > ... > a_n > a_{(n+1)} > ...$

Es decir, $\boxed{a_n > a_{(n+1)};\ \forall n \in \mathbb{N}}$

Nota

Tenga en cuenta lo siguiente:

- Una sucesión es monótona si es creciente, decreciente, estrictamente creciente o estrictamente decreciente (en cualquiera de estos casos).
- Una sucesión se dice acotada superiormente por un número A si $a_n \leq A$.
- Una sucesión se dice acotada inferiormente por un número A si $A \leq a_n$.
- Una sucesión se dice acotada si es acotada superior e inferiormente.

Aplicación 2

Escriba los cuatro primeros términos de la siguiente sucesión:

$$\left\{\frac{2^n}{n!}\right\}$$

Resolución

Como queremos los cuatro primeros términos, daremos valores a n: 1; 2; 3; y 4.

- Si $n=1$, tendremos $\frac{2^1}{1!}=2$.
- Si $n=2$, tendremos $\frac{2^2}{2!}=2$.
- Si $n=3$, tendremos $\frac{2^3}{3!}=\frac{4}{3}$.
- Si $n=4$, tendremos $\frac{2^4}{4!}=\frac{2}{3}$.

Por lo tanto, los cuatro términos serán

$$2;\ 2;\ \frac{4}{3};\ \frac{2}{3}$$

Aplicación 3

Determine los términos vigésimo y trigésimo segundo de las siguientes sucesiones:

I. $\{n^2+n\}$ II. $\{7n-1\}$

Resolución

Debemos tener en cuenta que

- vigésimo término <> término de lugar 20
- trigésimo segundo término <> término de lugar 32

Luego, evaluamos en cada sucesión:

I. $\{n^2+n\}$

Si $n=20 \rightarrow 20^2+20=420$.

Si $n=32 \rightarrow 32^2+32=1056$.

$\therefore$ vigésimo: 420; trigésimo segundo: 1056

II. $\{7n-1\}$

Si $n=20 \rightarrow 7(20)-1=139$

Si $n=32 \rightarrow 7(32)-1=223$

$\therefore$ vigésimo: 139; trigésimo segundo: 223

Aplicación 4

Determine la forma del enésimo término de las siguientes sucesiones:

I. $2; \frac{4}{3}; \frac{8}{5}; \frac{16}{7}; \ldots$

II. 1; 3; 9; 27; ...

III. 5; 8; 11; 14; ...

Resolución

I. Se podría escribir de la siguiente manera:

$$\frac{2}{1}; \frac{4}{3}; \frac{8}{5}; \frac{16}{7}; \ldots$$

Dado que los numeradores son potencias consecutivas de 2 y los denominadores son impares consecutivos, se puede escribir de la siguiente manera:

$$\frac{2^1}{2(1)-1}; \frac{2^2}{2(2)-1}; \frac{2^3}{2(3)-1}; \frac{2^4}{2(4)-1}; \ldots$$

Luego, su forma general sería $\frac{2^n}{2n-1}$.

II. 1; 3; 9; 27; ...

En este caso sucede algo similar a lo anterior; a partir del segundo término, cada término es igual al triple del anterior.

Así tendremos que $a_1=1$ y $a_{(n+1)}=3a_n$.

III. 5; 8; 11; 14; ...

Observamos que entre dos términos consecutivos la diferencia es constante.

Así tendremos

$$a_1=5 \text{ y } a_{(n+1)}=a_n+3.$$

Pero podemos notar que también se puede expresar como

$$a_n=3n+2$$

ya que nos da los términos de la sucesión.

Nota

Hallar el término general de una sucesión numérica, conocidos solo algunos términos, resulta un poco difícil y complicado; además, no existe la seguridad de que esta forma sea la única.

7 SUCESIONES POLINOMIALES

Se denominan sucesiones polinomiales a aquellas cuya fórmula general tiene la forma de un polinomio en n.

Toda sucesión polinomial tiene por ley de formación un polinomio de grado k, pudiendo ser lineal, cuadrática, cúbica, etc.

Es decir,

$$a_n=An^K+Bn^{K-1}+Cn^{K-2}+Dn^{K-3}+\ldots+Yn^1+Z;$$
$$K \in \mathbb{Z}^+$$

donde a_n es término general o término enésimo (último término).

7.1. SUCESIÓN POLINOMIAL DE PRIMER ORDEN (SUCESIÓN LINEAL)

Llamada también sucesión aritmética o progresión aritmética, es una sucesión de números en la que cada término, excepto el primero, se obtiene sumando al anterior.otro número fijo. Este número fijo se llama diferencia común o razón de la progresión aritmética (PA).

Ejemplos

- $23; 33; 43; 53; \ldots$
  $\underbrace{\quad}_{+10}\ \underbrace{\quad}_{+10}\ \underbrace{\quad}_{+10}$
- $48; 46; 44; 42; \ldots$
  $\underbrace{\quad}_{-2}\ \underbrace{\quad}_{-2}\ \underbrace{\quad}_{-2}$

Una progresión aritmética es toda sucesión cuyo término enésimo a_n está expresado mediante un polinomio de la forma

$$\boxed{a_n = An + B} \quad \forall A \neq 0$$

(polinomio lineal)

Ejemplos

a_n	a_1 ;	a_2 ;	a_3 ;	a_4 ;	...
$3n+8$	11 ;	14 ;	17 ;	20 ;	...
$5-2n$	3 ;	1 ;	-1 ;	-3 ;	...
$5n+2$	7 ;	12 ;	17 ;	22 ;	...

7.1.1. Cálculo del término enésimo de una progresión aritmética

Sea la siguiente progresión aritmética:

$$a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots; a_n$$
$$\underbrace{\quad}_{+r}\ \underbrace{\quad}_{+r}\ \underbrace{\quad}_{+r}$$

Se observa lo siguiente:

$$a_2 = a_1 + r$$
$$a_3 = a_1 + 2r$$
$$a_4 = a_1 + 3r$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\boxed{a_n = a_1 + (n-1)r}$$

donde

- a_1: primer término
- a_n: término general o el enésimo término
- n: lugar del término enésimo
- r: diferencia común o razón de la progresión aritmética

Nota

Dada la siguiente sucesión aritmética:

$$a_0; a_1; a_2; a_3; a_4; \ldots$$
$$\underbrace{\quad}_{+r}\ \underbrace{\quad}_{+r}\ \underbrace{\quad}_{+r}\ \underbrace{\quad}_{+r}$$

Luego,

$$a_1 = a_0 + 1r$$
$$a_2 = a_0 + 2r$$
$$a_3 = a_0 + 3r$$
$$\vdots \quad \vdots \quad \vdots$$

$$\boxed{a_n = a_0 + nr}$$

se cumple que

- a_0: término anterior al primero
- n: número de términos
- r: diferencia común o razón de la progresión aritmética

Ejemplos

- Veamos el término enésimo de la siguiente sucesión:

  $8; 11; 14; 17; \ldots$

  Entonces

  $$\overset{a_1}{8}\ ;\ \overset{a_2}{11}\ ;\ \overset{a_3}{14}\ ;\ \overset{a_4}{17}; \ldots$$
  $$\underset{3}{\frown}\ \underset{3}{\frown}\ \underset{3}{\frown}$$

  Luego,

  $$a_n = \overset{a_1}{8} + (n-12)\cdot\overset{r}{3}$$
  $$a_n = 8 + 3n - 3$$
  $$\therefore\ a_n = 5 + 3n$$

Otra forma

$$\overset{a_0}{5}\ ;\ \overset{a_1}{8}\ ;\ \overset{a_2}{11}\ ;\ \overset{a_3}{14}\ ;\ \overset{a_4}{17};\ \ldots$$

$$3 \quad 3 \quad 3 \quad 3$$

Luego, $a_0=5$ y $r=3$

$$\overset{a_0}{a_n}=5+3n$$

- Analicemos el término enésimo en la siguiente sucesión:

  21; 17; 13; 9; ...

  Entonces

$$\overset{a_0}{25}\ ;\ \overset{a_1}{21}\ ;\ \overset{a_2}{17}\ ;\ \overset{a_3}{13}\ ;\ \overset{a_4}{9};\ \ldots$$

$$-4 \quad -4 \quad -4 \quad -4$$

Luego, $a_0=25$ y $r=-4$

$\therefore\ a_n=25-4n$

7.1.2. Cálculo de la suma de los términos de una progresión aritmética

Sea la progresión aritmética

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots;\ a_{n-1};\ a_n$$

$$r \quad r \quad r \quad r$$

La suma de dichos términos estaría dada por

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{n-1}+a_n$$

Se observa que

$$S=a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n$$

$$S=a_1+(a_1+r)+(a_1+2r)+\ldots+(a_1+(n-1)r) \qquad \text{(I)}$$

También

$$S=a_n+a_{n-1}+a_{n-2}+\ldots+a_1$$

$$S=a_n+(a_n-r)+(a_n-2r)+\ldots+(a_n-(n-1)r) \qquad \text{(II)}$$

Sumamos I y II.

$$2S=\underbrace{(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+(a_1+a_n)+\ldots+(a_1+a_n)}_{n \text{ sumandos}}$$

$$\boxed{S=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\times n}$$

Nota

En toda progresión aritmética (PA)

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots;\ a_{n-1};\ a_n$$

$$r \quad r \quad r \quad r$$

Se concluye que

- si $r>0$, la PA es creciente.
- si $r<0$, la PA es decreciente.

Aplicación 5

Determine la forma general de las siguientes sucesiones aritméticas y, en cada caso, halle el vigésimo término.

I. 3; 7; 11; 15; ...

II. 12; 8; 4; ...

Resolución

I. Calculamos la razón de PA y luego su forma general.

$$-1;\ 3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \ldots$$

$$4 \quad 4 \quad 4 \quad 4$$

$a_n=4n-1$ (forma general)

$\therefore\ a_{20}=4(20)-1=79$ (vigésimo término)

II. Calculamos la razón de PA y luego su forma general.

$$16;\ 12;\ 8;\ 4;\ \ldots$$

$$-4 \quad -4 \quad -4$$

$a_n=-4n+16$ (forma general)

$\rightarrow\ a_{20}=-4(20)+16$

$\therefore\ a_{20}=-64$ (vigésimo término)

Aplicación 6

El quinto término de una sucesión es 37 y el decimotercer término de dicha sucesión aritmética es 101. Determine la suma de los diez primeros términos.

Resolución

Para este tipo de problemas se sugiere utilizar la siguiente expresión:

$$a_n=a_1+(n-1)r$$

Luego,

$a_5=a_1+4r=37$

$a_{13}=a_1+12r=101$

Restando estas dos relaciones tendremos

$(\cancel{a_1}+12r)-(\cancel{a_1}+4r)=101-37$

$8r=64$

$r=8$

Como

$a_1+4r=37$

$a_1+4(8)=37$

$a_1=5$

Nos piden la suma de los diez primeros términos; recuerde que

$$S=\left(\frac{a_1+a_n}{2}\right)\times n$$

Necesitamos

$a_{10}=a_1+9r$

$a_{10}=5+9(8)$

$a_{10}=77$

Finalmente, la suma de los diez primeros términos será

$$S=\left(\frac{5+77}{2}\right)\times 10$$

$\therefore\ S=410$

Aplicación 7

Iván es un niño muy observador, por lo cual se ha percatado de que su madre, en el mes de enero, ahorró S/33; en febrero, S/38; en marzo, S/43; en abril, S/48, y así sucesivamente. ¿Cuánto ahorró la mamá de Iván en el mes de octubre y cuánto ahorró durante todo el año?

Resolución

Observemos que los ahorros: 33; 38; 43; 48; ..., forman una sucesión aritmética, así tenemos

ene. feb. mar. abr.

28; 33; 38; 43; 48; ...

5 5 5 5

Su forma general es $5n+28$.

El mes de octubre ocupa el décimo lugar, por lo que para saber cuánto ahorró debemos hacer $n=10$.

En octubre ahorró

$5(10)+28=78$

Ahora falta averiguar cuánto ahorró a lo largo de todo el año. Así tenemos

1.° 2.° 3.° 4.° 10.° 11.° 12.°

33; 38; 43; 48; ...; 78; 83; 88

Sumamos los ahorros.

$$S=\left(\frac{33+88}{2}\right)\times 12$$

$S=121\times 6$

$S=726$

Por lo tanto, habrá ahorrado en total S/726.

Aplicación 8

Un vendedor ambulante conviene en pagar un préstamo de la siguiente manera: el 1 de agosto, S/33; el 2 de agosto, S/30; el 3 de agosto, S/27; el 4 de agosto, S/24; así sucesivamente hasta cancelar su deuda. ¿En qué día culmina de pagar toda su deuda y a cuánto asciende la misma?

Resolución

Del texto podemos observar lo siguiente con respecto de los pagos:

36; 33; 30; 27; 24; ...

−3 −3 −3 −3

Forman una sucesión aritmética decreciente.

$a_n=36-3n$

Ahora veamos en qué fecha ya no pagaría nada, es decir, $a_n=0$.

$36=3n;\ n=12$

Significa que el día 12 no se paga nada; la deuda se termina de cancelar el día 11. Ahora veamos a cuánto asciende la deuda.

$S=33+30+27+24+...+6+3$

Luego,

$$S=\left(\frac{33+3}{2}\right)\times 11$$

$$S=198$$

Por lo tanto, se cancela en 11 días y el total pagado fue de S/198.

7.2. SUCESIÓN POLINOMIAL DE SEGUNDO ORDEN (SUCESIÓN CUADRÁTICA)

Es aquella sucesión de números en la que la diferencia común se encuentra al realizar la diferencia de la diferencia de dos términos consecutivos.

Ejemplos

- $8;\ 15;\ 24;\ 35;\ 48;\ \ldots$
  $+7\quad +9\quad +11\quad +13$
  $+2\quad +2\quad +2$

- $7;\ 17;\ 31;\ 49;\ 71;\ \ldots$
  $+10\quad +14\quad +18\quad +22$
  $+4\quad +4\quad +4$

- $0;\ -3;\ -8;\ -15;\ -24;\ \ldots$
  $-3\quad -5\quad -7\quad -9$
  $-2\quad -2\quad -2$

Una sucesión cuadrática es toda sucesión cuyo término enésimo a_n está expresado mediante un polinomio de la forma

$$\boxed{a_n=An^2+Bn+C}\quad \forall\, A\neq 0$$

polinomio cuadrático

Ejemplos

a_n	$\rightarrow a_1$;	a_2 ;	a_3 ;	a_4 ;	...
$\{n^2+5\}$	$\rightarrow 6$;	9 ;	14 ;	21 ;	...
$\{3n^2-1\}$	$\rightarrow 2$;	11 ;	26 ;	47 ;	...
$\{2-n^2\}$	$\rightarrow 1$;	-2 ;	-7 ;	-14 ;	...

7.2.1. Cálculo del término enésimo de una sucesión de segundo orden

Sea $a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n$ una sucesión de segundo orden.

Entonces, para hallar el término enésimo utilizamos el término anterior al primero (a_0).

$$a_0;\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \ldots$$
$$d_0\quad d_1\quad d_2\quad d_3\quad d_4$$
$$r\quad r\quad r\quad r$$

Luego,

$$\begin{aligned}
a_1&=a_0+d_0\\
a_2&=a_0+d_0+d_1\\
a_3&=a_0+d_0+d_1+d_2\\
&\vdots\\
a_n&=a_0+d_0+d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}
\end{aligned}\qquad (*)$$

Sea

$$S=d_0+d_1+d_2+\ldots+d_{n-1}$$

Veamos que

$$\begin{aligned}
d_0&=d_0\\
d_1&=d_0+1r\\
d_2&=d_0+2r\\
&\vdots\\
d_{n-1}&=d_0+(n-1)r
\end{aligned}\qquad (+)$$

$$S=nd_0+\frac{(n-1)nr}{2}$$

Reemplazamos en (*).

$$a_n=a_0+nd_0+\frac{(n-1)}{2}nr$$

$$a_n=\left(\frac{r}{2}\right)n^2+\left(d_0-\frac{r}{2}\right)n+a_0$$

$$\therefore\quad \boxed{a_n=\left(\frac{r}{2}\right)n^2+\left(d_0-\frac{r}{2}\right)n+a_0}$$

Se observa que

$$a_n = An^2 + Bn + C = \left(\frac{r}{2}\right)n^2 + \left(d_0 - \frac{r}{2}\right)n + a_0$$

Entonces

$A = \frac{r}{2}$; $B = d_0 - \frac{r}{2}$ y $C = a_0$

$2A = r$; $A + B = d_0$ y $C = a_0$

En la sucesión de segundo orden se concluye que

$$\begin{array}{rcccccccccc} C = & a_0 & ; & a_1 & ; & a_2 & ; & a_3 & ; & a_4 & ; \ldots \\ A+B = & & d_0 & & d_1 & & d_2 & & d_3 & & \\ 2A = & & & r & & r & & r & & & \end{array}$$

$\therefore\ a_n = An^2 + Bn + C$

Aplicación 9

Determine la forma general del término enésimo de cada una de las siguientes sucesiones de segundo orden.

I. 7; 13; 21; 31; 43; ...

II. 10; 24; 44; 70; 102; ...

III. 2; 7; 13; 20; 28; ...

Resolución

De lo anteriormente demostrado, de manera práctica podemos realizar lo siguiente:

I. En la sucesión

$$\begin{array}{rcccccccccc} C = & 3 & ; & 7 & ; & 13 & ; & 21 & ; & 31 & ; & 43; \ldots \\ A+B = & & 4 & & 6 & & 8 & & 10 & & 12 & \\ 2A = & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

y se cumple que

- $2A = 2 \rightarrow A = 1$
- $A + B = 4 \rightarrow B = 3$
- $C = 3$

$\therefore\ a_n = n^2 + 3n + 3$

II. En la sucesión

$$\begin{array}{rcccccccccc} C = & 2 & ; & 10 & ; & 24 & ; & 44 & ; & 70 & ; & 102; \ldots \\ A+B = & & 8 & & 14 & & 20 & & 26 & & 32 & \\ 2A = & & & 6 & & 6 & & 6 & & 6 & & \end{array}$$

y se cumple que

- $2A = 6 \rightarrow A = 3$
- $A + B = 8 \rightarrow B = 5$
- $C = 2$

$\therefore\ a_n = 3n^2 + 5n + 2$

III. En la sucesión

$$\begin{array}{rcccccccccc} C = & -2 & ; & 2 & ; & 7 & ; & 13 & ; & 20 & ; & 28; \ldots \\ A+B = & & 4 & & 5 & & 6 & & 7 & & 8 & \\ 2A = & & & 1 & & 1 & & 1 & & 1 & & \end{array}$$

y se cumple que

- $2A = 1 \rightarrow A = \frac{1}{2}$
- $A + B = 4 \rightarrow B = \frac{7}{2}$
- $C = -2$

$\therefore\ a_n = \frac{1}{2}n^2 + \frac{7}{2}n - 2$

Aplicación 10

Calcule el decimotercer término de la siguiente sucesión de segundo orden e indique la suma de sus cifras.

2; 5; 10; 17; 26; ...

Resolución

Tenemos la sucesión de segundo orden

$$\begin{array}{rcccccccccc} C = & 1 & ; & 2 & ; & 5 & ; & 10 & ; & 17 & ; & 26; \ldots \\ A+B = & & 1 & & 3 & & 5 & & 7 & & 9 & \\ 2A = & & & 2 & & 2 & & 2 & & 2 & & \end{array}$$

De ahí tendremos

$A=1;\ B=0;\ C=2$

Luego, el término enésimo es

$a_n=n^2+1$

Nos piden el decimotercer término, entonces, para $n=13$ tenemos

$a_{13}=13^2+1=170$

Por lo tanto, la suma de cifras será

$1+7+0=8$

Aplicación 11

Un comerciante anota diariamente el importe de todas sus ventas durante el mes de junio, siendo estos los siguientes: S/90; S/92; S/95; S/99; S/104..., así sucesivamente, desde el primer día del mes hasta el 30 de junio. ¿Cuál fue el importe de las ventas el último día del mes?

Resolución

Veamos los importes de las ventas.

$$\begin{array}{rl} C= & 89;\ 90;\ 92;\ 95;\ 99;\ 104;\ \ldots \\ A+B= & \ \ 1\ \ \ 2\ \ \ 3\ \ \ 4\ \ \ 5 \\ 2A= & \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 1\ \ \ 1 \end{array}$$

Entonces podemos observar que dichos importes de venta forman una sucesión de segundo orden cuya forma es

$$a_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}n+89$$

Nos piden el importe de venta del último día del mes, es decir

$$a_{30}=\frac{1}{2}(30)^2+\frac{1}{2}(30)+89$$

$$a_{30}=554$$

Por lo tanto, el importe de venta del último día del mes es S/554.

7.2.2. Métodos de obtención de la regla de correspondencia de una sucesión cuadrática

a. Método de ecuación

Sea la sucesión cuadrática

$$1;\ 6;\ 13;\ 22;\ \ldots$$

$$5\quad 7\quad 9$$

$$2\quad 2$$

Debido a que es una sucesión cuadrática, presenta la forma de un polinomio cuadrático.

$$\boxed{a_n=An^2+Bn+C};\ A\neq 0\quad n\in\mathbb{Z}^+\quad (*)$$

Ejemplo

Sabemos que

$a_1=1$

$a_2=6$

$a_3=13$

$a_4=22$

$\vdots\quad\vdots$

Reemplazamos los valores en (*).

$a_1=A(1)^2+B(1)+C=1\ \rightarrow\ A+B+C=1$

$a_2=A(2)^2+B(2)+C=6\ \rightarrow\ 4A+2B+C=6$

$a_3=A(3)^2+B(3)+C=13\ \rightarrow\ 9A+3B+C=13$

Resolvemos.

$A=1;\ B=2;\ C=-2$

Luego,

$a_n=n^2+2n-2$ (término general)

b. Método de combinación

Sea la sucesión cuadrática

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots;\ a_n$$

$$+d_1\quad +d_2\quad +d_3$$

$$+r\quad +r$$

Sabemos que

$$\boxed{a_n=a_1+(n-1)d_1+\frac{(n-2)(n-1)r}{2}}$$

Damos forma a la ecuación.

$$a_n = a_1 \frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} + d_1 \frac{(n-2)!\,(n-1)}{1!(n-2)!} + r\frac{(n-3)!\,(n-2)\,(n-1)}{2!\,(n-3)!}$$

Es decir,

$$\boxed{a_n = a_1 C_0^{n-1} + d_1 C_1^{n-1} + r C_2^{n-1}}$$

Del ejemplo anterior

$$\underbrace{1;\ 6;\ 13;\ 22;\ \ldots}_{\underbrace{5\quad 7\quad 9}_{\underbrace{2\quad 2}}}$$

Luego,

$$a_n = 1C_0^{n-1} + 5C_1^{n-1} + 2C_2^{n-1}$$

$$a_n = 1\frac{(n-1)!}{0!(n-1)!} + 5\frac{(n-1)!}{1!(n-2)!} + 2\frac{(n-1)!}{2!(n-3)!}$$

$$a_n = 1 + 5(n-1) + (n-2)(n-1)$$

$$a_n = n^2 + 2n - 2 \text{ (término general)}$$

Nota

Los dos métodos antes mencionados también pueden ser aplicados para sucesiones de mayor orden. Para este caso nosotros utilizaremos la regla práctica, teniendo en cuenta la relación obtenida en el punto anterior.

7.3. TÉRMINO ENÉSIMO DE UNA SUCESIÓN POLINOMIAL DE UN ORDEN CUALQUIERA

Utilizando el método de combinación se observa lo siguiente:

1. Para una sucesión cuadrática

$$\underbrace{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ \ldots;\ a_n}_{\underbrace{d_1\quad d_2\quad d_3}_{\underbrace{r\quad r}}}$$

$$\boxed{a_n = a_1 C_0^{n-1} + d_1 C_1^{n-1} + r C_2^{n-1}}$$

2. Para una sucesión cúbica

$$\underbrace{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \ldots;\ a_n}_{\underbrace{c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4}_{\underbrace{d_1\quad d_2\quad d_3}_{\underbrace{r\quad r}}}}$$

$$\boxed{a_n = a_1 C_0^{n-1} + c_1 C_1^{n-1} + d_1 C_2^{n-1} + r C_3^{n-1}}$$

3. Para una sucesión cuarta

$$\underbrace{a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ a_6;\ \ldots;\ a_n}_{\underbrace{b_1\quad b_2\quad b_3\quad b_4\quad b_5}_{\underbrace{c_1\quad c_2\quad c_3\quad c_4}_{\underbrace{d_1\quad d_2\quad d_3}_{\underbrace{r\quad r}}}}}$$

$$\boxed{a_n = a_1 C_0^{n-1} + b_1 C_1^{n-1} + c_1 C_2^{n-1} + d_1 C_3^{n-1} + r C_4^{n-1}}$$

Aplicación 12

Halle el décimo término de la siguiente sucesión:

4; 12; 38; 88; 168; ...

Resolución

Tenemos la sucesión de cuarto orden.

$$\underbrace{4;\ 12;\ 38;\ 88;\ 168;\ \ldots}_{\underbrace{8\quad 26\quad 50\quad 80}_{\underbrace{18\quad 24\quad 30}_{\underbrace{6\quad 6}}}}$$

Luego,

$$a_n = 4C_0^{n-1} + 8C_1^{n-1} + 18C_2^{n-1} + 6C_3^{n-1}$$

$$a_n=4+8\frac{(n-1)}{1}+18\frac{(n-1)(n-2)}{1\times 2}+6\frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times 2\times 3}$$

$$a_n=4+8n-8+9(n^2-3n+2)+(n^3-6n^2+11n-6)$$

Reduciendo queda

$$a_n=n^3+3n^2-8n+8$$

Como nos piden el décimo término

$$a_{10}=10^3+3\times 10^2-8\times 10+8$$

$$\therefore\ a_{10}=1228$$

Nota

Como se habrá observado en el presente capítulo, se dará mayor énfasis a las sucesiones polinomiales, las cuales no son las únicas.

8 Sucesión geométrica o progresión geométrica

Es una sucesión de números, en la que cada término, excepto el primero, se obtiene multiplicando al anterior por otro número fijo llamado cociente común o razón geométrica.

En general, es de la forma

$$t_1;\ t_2;\ t_3;\ t_4;\ \ldots;\ t_{n-1};\ t_n$$

$\times q$ $\times q$ $\times q$ $\times q$

Se observa lo siguiente:

$$t_1=t_1\times q^0$$
$$t_2=t_1\times q^1$$
$$t_3=t_1\times q^2$$
$$t_4=t_1\times q^3$$
$$\vdots$$
$$t_n=t_1\times q^{n-1}$$

Luego, el término general de una progresión geométrica (PG) está dado por

$$\boxed{t_n=t_1\times q^{n-1}}$$

donde

- t_1: primer término
- t_n: término enésimo
- n: lugar del término enésimo
- q: razón geométrica

Ejemplos

término enésimo		términos de la P.G.				
t_n	→	t_1 ;	t_2 ;	t_3 ;	t_4 ;	...
$3\times 2^{n-1}$	→	3 ;	6 ;	12 ;	24 ;	...
$2\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$	→	2 ;	$\frac{2}{3}$;	$\frac{2}{9}$;	$\frac{2}{27}$;	...
$64\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$	→	64 ;	32 ;	16 ;	8 ;	...

Aplicación 13

Calcule el décimo término de la siguiente progresión geométrica e indique la suma de sus cifras.

4; 12; 38; 108; ...

Resolución

Tenemos la progresión geométrica

$$4;\ 12;\ 36;\ 108;\ \ldots$$

$\times 3$ $\times 3$ $\times 3$

y se observa que $t_1=4$ y $q=3$.

Luego,

$$t_n=4\times 3^{n-1}$$

Hallamos el décimo término.

$$t_{10}=4\times 3^9=78\ 732$$

Nos piden la suma de cifras.

$$\therefore\ 7+8+7+3+2=27$$

SERIES

1 DEFINICIÓN

Se llama serie a la suma indicada de los términos de una sucesión. Por ejemplo, se tiene

$a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n$ (una sucesión finita)

Entonces la expresión

$a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n$

se llama serie y la denotamos por s_n. Si la sucesión tiene n términos, se obtiene lo siguiente:

$s_1=a_1$
$s_2=a_1+a_2$
$s_3=a_1+a_2+a_3$
$s_4=a_1+a_2+a_3+a_4$
$\vdots \quad \vdots$
$s_n=a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n$

> **Nota**
> Es incorrecto confundir una serie con una suma.

Ejemplos

- $7+10+13+16+19=65$
- $12+17+22+27+32+37=147$
- $3+7+13+21+31+43=118$

2 NOTACIÓN SIGMA

Sea la sucesión $a_1; a_2; a_3; ...; a_n$; entonces la serie $a_1+a_2+a_3+...+a_n$ se escribirá en notación sigma, es decir

$$s_n=a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$$

Luego,

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n}$$

donde

- Σ: símbolo de la suma o sumatoria
- n: límite superior
- 1: límite inferior
- i: índice de la suma ($1 \le i \le n; i \in \mathbb{Z}$)
- a_i: término general de la suma

3 PROPIEDADES

Propiedad 1

$$\sum_{i=1}^{n} c = \underbrace{c+c+c+c+...+c}_{n \text{ sumandos}}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} c = cn}$$

Propiedad 2

$$\sum_{i=1}^{n} ca_i = ca_1+ca_2+ca_3+...+ca_n$$
$$= c(a_1+a_2+a_3+a_4+...+a_n)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} ca_i = c\sum_{i=1}^{n} a_i}$$

Propiedad 3

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = (a_1 \pm b_1)+(a_2 \pm b_2)+(a_3 \pm b_3)+...+(a_n \pm b_n)$$
$$=(a_1+a_2+a_3+...+a_n) \pm (b_1+b_2+b_3+...+b_n)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_i \pm b_i) = \sum_{i=1}^{n} a_i \pm \sum_{i=1}^{n} b_i}$$

Propiedad 4

$$\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1}-a_i) = \sum_{i=1}^{n} a_{i+1} - \sum_{i=1}^{n} a_i$$
$$=(a_2+a_3+a_4+...+a_{n+1})-(a_1+a_2+a_3+...+a_n)$$
$$= a_{n+1}-a_1$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} (a_{i+1}-a_i) = a_{n+1}-a_1}$$

propiedad telescópica

Esta propiedad se utilizará con bastante frecuencia en la demostración de sumas notables, como veremos a continuación.

4 ▸ SUMATORIAS NOTABLES

4.1. SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS NATURALES

$$\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+4+5+...+n$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}}$$

Demostración

Usamos la propiedad telescópica.

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^2 - i^2] = (n+1)^2 - 1^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} (2i+1) = n^2+2n$$

$$2\sum_{i=1}^{n} i + n = n^2+2n$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2}$$

4.2. SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS CUADRADOS PERFECTOS

$$\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+...+n^2$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}}$$

Demostración

Usamos la propiedad telescópica.

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^3 - i^3] = (n+1)^3 - 1^3$$

$$\sum_{i=1}^{n} (3i^2+3i+1) = n^3+3n^2+3n$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 3n\frac{(n+1)}{2} + n = n^3+3n^2+3n$$

$$3\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{2n^3+3n^2+n}{2}$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

4.3. SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS CUBOS PERFECTOS

$$\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+4^3+5^3+...+n^3$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i^3 = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2}$$

Demostración

Usamos la propiedad telescópica.

$$\sum_{i=1}^{n} [(i+1)^4 - i^4] = (n+1)^4 - 1^4$$

$$\sum_{i=1}^{n} [4i^3+6i^2+4i+1] = n^4+4n^3+6n^2+4n$$

$$4\sum_{i=1}^{n} i^3 + 6\frac{n(n+1)(2n+1)}{2} + 4\frac{n(n+1)}{2} + n = n^4+4n^3+6n^2+4n$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4} = \left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

Aplicación 14

Calcule la suma de los veinte primeros términos de las siguientes sucesiones:

I. 40; 46; 32; 58; ...

II. 11; 7; 3; −1; ...

Resolución

I. En principio, hallemos la forma del término enésimo.

$$34;\ 40;\ 46;\ 52;\ 58;\ ...$$
$$\quad 6 \quad 6 \quad 6 \quad 6$$

$$a_n = 6n+34$$

Ahora, apliquemos la sumatoria.

$$\sum_{i=1}^{20}(6i+34)=6\sum_{i=1}^{20}i+\sum_{i=1}^{20}34$$

$$=6\left(\frac{20\times21}{2}\right)+20(34)$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{20}(6i+34)=1940$$

II. Hallemos la forma del término enésimo.

15; 11; 7; 3; −1; ...

−4 −4 −4 −4

$a_n=-4n+15$

Luego queremos

$$\sum_{i=1}^{20}-4i+15=-4\sum_{i=1}^{20}i+\sum_{i=1}^{20}15$$

$$=-4(210)+20(15)$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{20}(-4i+15)=-540$$

Obsérvese que para trabajar en forma práctica, inicialmente, retrocedemos un término (anterior al primero).

Aplicación 15

Calcule la suma de los veinte primeros términos de las siguientes sucesiones:

I. 4; 7; 12; 19; ...

II. 6; 11; 20; 33; ...

Resolución

I. Hallemos primero el término general.

3; 4; 7; 12; 19; ...

1 3 5 7

2 2 2

$a_n=n^2+3$

Aplicamos la sumatoria.

$$\sum_{i=1}^{20}(i^2+3)=\sum_{i=1}^{20}i^2+\sum_{i=1}^{20}3$$

$$=\frac{20\times21\times41}{6}+20(3)$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{20}(i^2+3)=2930$$

II. Hallemos primero el término general.

5; 6; 11; 20; 33; ...

1 5 9 13

4 4 4

$a_n=2n^2-n+5$

Entonces aplicamos la sumatoria

$$\sum_{i=1}^{20}(2i^2-i+5)=2\sum_{i=1}^{20}i^2-\sum_{i=1}^{20}i+\sum_{i=1}^{20}5$$

$$=2\times\frac{20\times21\times41}{6}-\frac{20\times21}{2}+20(5)$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{20}(2i^2-2i+5)=5630$$

5 ▸ SUMATORIAS NOTABLES ADICIONALES

Mostraremos otras sumatorias notables que se derivan de las anteriores.

5.1. SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS PARES

$$\sum_{i=1}^{n}2i=2+4+6+8+...+2n$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}2i=n(n+1)}$$

Demostración

Se observa que

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} 2i = 2\times\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} 2i = n(n+1)$$

5.2. SUMA DE LOS *n* PRIMEROS NÚMEROS IMPARES

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 1+3+5+7+\ldots+(2n-1)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2}$$

Demostración

Se observa que

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = \sum_{i=1}^{n} 2i - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\sum_{i=1}^{n} i - \sum_{i=1}^{n} 1$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = 2\left[\frac{n(n+1)}{2}\right] - n$$

$$\sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n(n+1) - n$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n}(2i-1) = n^2$$

5.3. SUMA DE LOS *n* PRIMEROS PRODUCTOS DE DOS CONSECUTIVOS

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = 1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+n(n+1)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}}$$

Demostración

Se observa que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \sum_{i=1}^{n}(i^2+i) = \sum_{i=1}^{n} i^2 + \sum_{i=1}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{(2n+1)}{3}+1\right]$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{n} i(i+1) = \frac{n(n+1)(n+2)}{3}$$

5.4. SUMA DE LOS *n* PRIMEROS PRODUCTOS DE TRES CONSECUTIVOS

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = 1\times2\times3+2\times3\times4+3\times4\times5 + \ldots + n(n+1)(n+2)$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$$

Demostración

Se observa que

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n}(i^3+3i^2+2i)$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2) = \sum_{i=1}^{n} i^3 + 3\sum_{i=1}^{n} i^2 + 2\sum_{i=1}^{n} i$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$$

$$=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2+3\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+2\frac{n(n+1)}{2}$$

$$\sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)$$

$$=\frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{n(n+1)}{2}+(2n+1)+2\right]$$

$$\therefore \sum_{i=1}^{n} i(i+1)(i+2)=\frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

Aplicación 16

Calcule el valor de

$S=1\times3+2\times4+3\times5+4\times6+\ldots+20\times22$

Resolución

Se observa que

$$S=1\times(2+1)+2\times(3+1)+3(4+1)+\ldots+20(21+1)$$

$$S=(1\times2+2\times3+3\times4+\ldots+20\times21)+(1+2+3+\ldots+20)$$

$$S=\sum_{i=1}^{20} i(i+1)+\sum_{i=1}^{20} i$$

Resolviendo se obtiene

$$S=\frac{20\times21\times22}{3}+\frac{20\times21}{2}$$

$\therefore\ S=3290$

Nota

Para una progresión geométrica (P.G.), la forma general de encontrar la suma de sus términos dependerá del valor de la razón geométrica, además de saber si dicha P.G. es finita o infinita.

5.5. SUMA PARA UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA FINITA

$$t_1;\ \underbrace{t_2;\ t_3;\ t_4;\ \ldots;\ t_{n-1};\ t_n}_{\times q\ \times q\ \times q\qquad\qquad\times q}$$

o también puede ser

$$\underbrace{t_1;\ t_1\times q;\ t_1\times q^2;\ t_1\times q^3;\ \ldots;\ t_1\times q^{n-2};\ t_1\times q^{n-1}}_{n\ \text{términos}}$$

Sumando dichos términos se obtiene

$$S=t_1+t_1\times q+t_1\times q^2+t_1\times q^3+\ldots+t_1\times q^{n-2}+t_1\times q^{n-1} \qquad \text{(I)}$$

Multiplicando por q se obtiene

$$qS=t_1\times q+t_1\times q^2+t_1\times q^3+t_1\times q^4+\ldots+t_1\times q^{n-1}+t_1\times q^n \qquad \text{(II)}$$

Evaluamos por casos.

1. Si $q>1$
   restamos (II) menos (I).
   $qS-S=t_1\times q^n-t_1$
   $S(q-1)=t_1\times(q^n-1)$

$$\boxed{S=\frac{t_1\times(q^n-1)}{q-1}}$$

2. Si $q<1$
   restamos (I) menos (II)
   $S-qS=t_1-t_1\times q^n$
   $S(1-q)=t_1(1-q^n)$

$$\boxed{S=\frac{t_1\times(1-q^n)}{1-q}}$$

Observación

Las dos expresiones anteriormente dadas, de la suma de los términos de una P.G. son iguales.

Aplicación 17

Halle la suma de los 10 primeros términos de las siguientes progresiones geométricas:

I. 2; 6; 18; 54; 162; 486; ...

II. 3; −6; 12; −24; 48; −96; ...

Resolución

I. Sumando se obtiene:

$$S=\underbrace{2+6}_{\times 3}+\underbrace{18}_{\times 3}+\underbrace{54}_{\times 3}+\underbrace{162}_{\times 3}+\underbrace{486}_{\times 3}+\ldots$$

Se observa que

$$t_1=2;\ q=3 \text{ y } n=10$$

Por lo tanto,

$$S=\frac{2\times(3^{10}-1)}{3-1}=59\,048$$

II. Sumando se tiene

$$S=3\underbrace{-6}_{\times(-2)}+\underbrace{12}_{\times(-2)}\underbrace{-24}_{\times(-2)}+\underbrace{48}_{\times(-2)}\underbrace{-96}_{\times(-2)}+\ldots$$

Se observa que

$$t_1=3;\ q=-2;\ n=10$$

Por lo tanto,

$$S=\frac{3\times(1-(-2)^{10})}{1-(-2)}=-1023$$

5.6. SUMA DE LAS POTENCIAS CONSECUTIVAS DE UN ENTERO

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}=1+a^1+a^2+a^3+\ldots+a^{n-1}$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}=\frac{a^n-1}{a-1}}$$

Demostración

Los términos a sumar son

$$1;\ \underbrace{a}_{\times a};\ \underbrace{a^2}_{\times a};\ \underbrace{a^3}_{\times a};\ \ldots;\ \underbrace{a^{n-2}}_{\times a};\ a^{n-1}$$

Se observa que es una PG de razón a y primer término 1. Como la razón es entera mayor que uno, entonces

$$S=\frac{t_1\times(q^n-1)}{q-1}$$

Reemplazamos.

$$\sum_{i=1}^{n} a^{i-1}=\frac{1\times(a^n-1)}{a-1}$$

$$\therefore\ \sum_{i=1}^{n} a^{i-1}=\frac{a^n-1}{a-1}$$

Aplicación 18

Se tienen las siguientes series:

$$M=\underbrace{1+2+4+8+16+\ldots}_{12 \text{ sumandos}}$$

$$N=\underbrace{1+3+9+27+81+\ldots}_{8 \text{ sumandos}}$$

Halle $M-N$.

Resolución

Se observa lo siguiente:

- $M=1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{11}$

  $$M=\frac{2^{12}-1}{2-1}=4095$$

- $N=1+3+3^2+3^3+\ldots+3^7$

  $$N=\frac{3^8-1}{3-1}=3280$$

Nos piden

$$M-N=4095-3280$$

$$\therefore\ M-N=815$$

5.7. SUMA PARA UNA PROGRESIÓN GEOMÉTRICA INFINITA

Siendo $0<|q|<1$

$$t_1;\ \underbrace{t_2}_{\times q};\ \underbrace{t_3}_{\times q};\ \underbrace{t_4}_{\times q};\ \ldots;\ \underbrace{t_{n-1}}_{\times q};\ t_n;\ \ldots$$

O también puede ser

$$t_1; t_1\times q; t_1\times q^2; t_1\times q^3; \ldots; t_1\times q^{n-2}; t_1\times q^{n-1}; \ldots$$

Se observa que

$$t_1 > t_2 > t_3 > t_4 > \ldots > t_{n-1} > t_n > \ldots$$

Sumando dichos términos se obtiene

$$S=t_1+t_1q+t_1\times q^2+t_1\times q^3+t_1\times q^4+t_1\times q^5+\ldots \quad \text{(I)}$$

Multiplicamos por q.

$$qS=t_1\times q+t_1\times q^2+t_1\times q^3+t_1\times q^4+t_1\times q^5+\ldots \quad \text{(II)}$$

Recuerde que los últimos sumandos de S y qS tienden a ser iguales a cero.

Restando (I) menos (II) se obtiene

$$S-qS=t_1$$

$\therefore$ $\boxed{S=\dfrac{t_1}{1-q}}$ donde S es la suma límite

Aplicación 19

Calcule el valor de la suma límite de

I. $S=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{8}{45}+\dfrac{16}{135}+\ldots$

II. $S=\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{15}+\dfrac{32}{75}-\dfrac{128}{375}+\dfrac{512}{1875}-\ldots$

Resolución

I. $S=\dfrac{3}{5}+\dfrac{2}{5}+\dfrac{4}{15}+\dfrac{8}{45}+\dfrac{16}{135}+\ldots$

$\times\frac{2}{3}$ $\times\frac{2}{3}$ $\times\frac{2}{3}$ $\times\frac{2}{3}$

Se observa que $t_1=\dfrac{3}{5}$; $q=\dfrac{2}{3}$

Luego,

$$S=\frac{\frac{3}{5}}{1-\frac{2}{3}}$$

$$\therefore\ S=\frac{9}{5}$$

II. $S=\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{15}+\dfrac{32}{75}-\dfrac{128}{375}+\dfrac{512}{1875}-\ldots$

$\times\left(\frac{-4}{5}\right)$ $\times\left(\frac{-4}{5}\right)$ $\times\left(\frac{-4}{5}\right)$ $\times\left(\frac{-4}{5}\right)$

Se observa que $t_1=\dfrac{2}{3}$; $q=\dfrac{-4}{5}$.

Luego,

$$S=\frac{\frac{2}{3}}{1-\left(\frac{-4}{5}\right)}$$

$$\therefore\ S=\frac{10}{27}$$

Observación

En una progresión geométrica infinita, cuando una suma límite es igual a un valor S, se dice que la serie converge a S.

5.8. SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN ARITMÉTICA

Sea la sucesión aritmética

5; 12; 19; 26; 33...

Observamos que

$s_1=5$

$s_2=5+12=17$

$s_3=5+12+19=36$

$s_4=5+12+19+26=62$

$s_5=5+12+19+26+33=95$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Las sumas parciales son de la forma

5; 17; 36; 62; 95...

12 19 26 33

7 7 7

Evaluando en forma general, las sumas parciales que se obtienen con los términos de la sucesión aritmética forman una sucesión de segundo orden.

Es decir, sea

$a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_n$ (sucesión aritmética)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$$

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\frac{a_1 + a_n}{2}\right) n = \left[\frac{a_1 + a_1 + (n-1)r}{2}\right] n$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left[\frac{2a_1 + (n-1)r}{2}\right] n = a_1 n + n^2 \frac{r}{2} - n\frac{r}{2}$$

entonces

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n + \left(\frac{r}{2}\right) n^2$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \left(\frac{r}{2}\right) n^2 + \left(a_1 - \frac{r}{2}\right) n$$

También

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 n + \frac{(n-1)nr}{2} = a_1 C_1^n + r C_2^n}$$

Igualmente podemos expresarlo de la siguiente manera:

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)r]$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}[a_1 + (a_1 + (n-1)r]$$

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n} a_i = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)}$$

Generalmente es la relación que más se utiliza.

5.9. SUMA DE LOS TÉRMINOS DE UNA SUCESIÓN DE SEGUNDO ORDEN

Sea la sucesión cuadrática

17; 26; 37; 50; 65; ...

9 11 13 15

2 2 2

Observamos que

$s_1 = 17$

$s_2 = 17 + 26 = 43$

$s_3 = 17 + 26 + 37 = 80$

$s_4 = 17 + 26 + 37 + 50 = 130$

$s_5 = 17 + 26 + 37 + 50 + 65 = 195$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

Luego,

17; 43; 80; 130; 195; ...

26 37 50 65

11 13 15

2 2

Las sumas parciales que se obtienen con los términos de la sucesión cuadrática forman una sucesión de tercer orden.

En general, sea

$a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; ...; a_n$ (sucesión cuadrática)

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + ... + a_n$$

Se observa lo siguiente:

$a_1 = a_1$

$a_2 = a_1 + d_1$

$a_3 = a_1 + d_1 + d_2$

$a_4 = a_1 + d_1 + d_2 + d_3$

$a_5 = a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$a_n = a_1 + d_1 + d_2 + d_3 + d_4 + ... + d_{n-1}$

Además,

$d_1 = d_1$

$d_2 = d_1 + r$

$d_3 = d_1 + 2r$

$d_4 = d_1 + 3r$

$d_5 = d_1 + 4r$

$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$

$d_{n-1} = d_1 + (n-2)r$

Reemplazando obtenemos

$$\begin{aligned}
a_1&=a_1\\
a_2&=a_1+d_1\\
a_3&=a_1+2d_1+r\\
a_4&=a_1+3d_1+3r\\
a_5&=a_1+4d_1+6r\\
a_6&=a_1+5d_1+10r\\
&\vdots\quad\vdots\quad\vdots
\end{aligned}\qquad (+)$$

$$a_n=a_1+(n-1)d_1+\underbrace{(1+2+3+\ldots+(n-2))}_{\frac{(n-2)(n-1)}{2}}r$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=na_1+\frac{(n-1)n}{2}d+\sum_{K=1}^{n-2}\frac{K(K+1)}{2}r$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=na_1+\frac{(n-1)n}{2}d_1+\frac{(n-2)(n-1)n}{6}r$$

$$\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1n+d_1\frac{(n-1)n}{2}+r\frac{(n-2)(n-1)n}{6}$$

También se puede expresar como

$$\boxed{\sum_{i=1}^{n}a_i=a_1C_1^n+dC_2^n+rC_3^n}$$

En nuestro caso, cuando tengamos que sumar los términos de una sucesión de segundo o mayor orden, simplemente aplicaremos sumatoria al término general de la sucesión.

Observación

Para hallar la suma de los términos de una sucesión polinomial de cualquier orden, es más recomendable utilizar el concepto y las propiedades de las sumatorias.

6. CONTEO DE CIFRAS USADAS EN UNA SUCESIÓN NATURAL

Por lo general, el conteo de cifras se utiliza en la enumeración de un libro con cierta cantidad de páginas.

Aplicación 20

Determine cuántas cifras se han utilizado en los siguientes casos:

I. La enumeración de un libro de 124 páginas.

II. La enumeración de un libro de 7284 páginas.

Resolución

I. $\underbrace{1;2;3;\ldots;9}_{\substack{9\text{ números}\\9\times1\text{ cifras}}};\ \underbrace{10;11;12;\ldots;99}_{\substack{90\text{ números}\\90\times2\text{ cifras}}};\ \underbrace{100;101;\ldots;124}_{\substack{25\text{ números}\\25\times3\text{ cifras}}}$

Por lo tanto, el total de cifras utilizadas es

$$9\times1+90\times2+25\times3=264$$

Otra forma

$$\begin{array}{l}
\overline{abc}\\
\downarrow\downarrow\downarrow\\
\left.\begin{array}{l}
000\\001\\002\\\vdots\\009\\010\\011\\\vdots\\099\\100\\101\\\vdots\\124
\end{array}\right\}\text{125 valores}
\end{array}$$

Se observa que el número de cifras utilizadas se obtiene de la siguiente forma:

$$(124+1)\times3-\underbrace{111}_{\substack{\text{cantidad de ceros}\\\text{a la izquierda de}\\\text{los 125 valores.}}}=264$$

II. $\underbrace{1;2;3;4;\ldots;9}_{\substack{9\text{ números}\\9\times1\text{ cifras}}};\ \underbrace{10;11;12;\ldots;99}_{\substack{90\text{ números}\\90\times2\text{ cifras}}};\ \underbrace{100;\ldots;999}_{\substack{900\text{ números}\\900\times3\text{ cifras}}};$

$\underbrace{1000;\ldots;7284}_{\substack{6285\text{ números}\\6285\times4\text{ cifras}}}$

Por lo tanto, el total de cifras utilizadas es

$$9\times1+90\times2+900\times3+6285\times4=28\ 029$$

Otra forma

$$\overline{abcd}$$

$$\left.\begin{array}{c}0000\\0001\\0002\\\vdots\\0009\\0010\\0011\\\vdots\\0098\\0099\\0100\\0101\\\vdots\\0999\\1000\\1001\\\vdots\\7284\end{array}\right\}\text{7285 valores}$$

Se observa que el número de cifras utilizadas se obtiene de la siguiente forma:

$$(7284+1)\times 4-\underbrace{1111}_{\text{cantidad de ceros a la izquierda de los 7285 valores.}}=28\,024$$

En general, en la siguiente sucesión natural:

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ \ldots;\ \underbrace{N}_{k\ \text{cifras}}$$

se cumple lo siguiente:

$$\left(\begin{array}{c}\text{número de}\\\text{cifras utilizadas}\end{array}\right)=(N+1)\times k-\underbrace{11\ldots11}_{k\ \text{cifras}}$$

Aplicación 21

Al enumerar un libro de $\overline{abc}$ páginas se sabe que se utilizaron en total $\overline{(3a)aa}$ cifras. Halle $a+b+c$.

Resolución

Por condición

$$\overline{(3a)aa}=\overline{(abc+1)}\times 3-111$$

$$311\underset{\substack{\downarrow\\3}}{a}=\underbrace{(\overline{abc}+1)\times 3}_{\vdots\ 3}-\underbrace{111}_{\vdots\ 3}$$

Se concluye que $a=3$.

$\rightarrow\ 311\times 3=(\overline{abc}+1)\times 3-111$

$348=\overline{abc}+1$

$\overline{abc}=347$

$\therefore\ a+b+c=14$

Observación

Se puede presentar una sucesión numérica en un sistema de numeración distinto al decimal. Para hallar el número de cifras utilizadas en

1; 2; 3 ...; N, en la que $N=\underbrace{\overline{ab\ldots c}_n}_{k\ \text{cifras}}$

se utiliza la siguiente relación:

$$\left(\begin{array}{c}\text{n.º de cifras utili-}\\\text{zadas en base } n\end{array}\right)=(N+1)\times k-\underbrace{11\ldots11_n}_{k\ \text{cifras}}$$

Aplicación 22

Se desea enumerar un libro de 432 páginas en el sistema de base 5 y de base 8. ¿Cuántas cifras más se utilizará en un sistema respecto a otro?

Resolución

Evaluamos en cada sistema de numeración.

- En base 5

  $432=3212_5\ \rightarrow\ N=3212_5$ (4 cifras)

$$\begin{pmatrix}\text{número de cifras}\\ \text{utilizadas en}\\ \text{base 5}\end{pmatrix}=(\overbrace{432}^{3212_5}+1)\times 4-\underbrace{1111_5}_{4\text{ cifras}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{número de cifras}\\ \text{utilizadas en}\\ \text{base 5}\end{pmatrix}=1732-156=1576$$

- En base 8

$432=660_8 \rightarrow N=660_8$ (3 cifras)

$$\begin{pmatrix}\text{número de cifras}\\ \text{utilizadas en}\\ \text{base 8}\end{pmatrix}=(\overbrace{432}^{660_8}+1)\times 3-\underbrace{111_8}_{3\text{ cifras}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{número de cifras}\\ \text{utilizadas en}\\ \text{base 8}\end{pmatrix}=1299-73=1226$$

$\therefore\ 1576-1226=350$

Propiedad

En toda enumeración, si esta se realiza en menor base se utilizarán más cifras y si esta se realiza en mayor base se utilizarán menos cifras.

De la aplicación anterior

(en base 5) < (en base 8)
se utilizan se utilizan
(1576 cifras) > (1226 cifras)

Observación
En los problemas se considerará:
cifra <> dígito <> tipos de imprenta

Aplicación 23
En la numeración de las $\overline{abc}$ páginas de un libro se han utilizado 2052 tipos de imprenta. Halle $a+b+c$.

Resolución
Se ha enumerado 1; 2; 3; 4; ...; $\overline{abc}$.
Hallamos la cantidad de cifras utilizadas.

cantidad de cifras $=(\overline{abc}+1)\times 3-111$

Por dato sabemos que la cantidad de cifras es 2152.

Luego,

$(\overline{abc}+1)\times 3-111=2052$

$3\times\overline{abc}+3=2163$

$3\times\overline{abc}=2160$

$\overline{abc}=720$

$\therefore\ a+b+c=9$

Aplicación 24
Las páginas de un libro se han enumerado en base 9 y se han utilizado 1028 tipos de imprenta. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

Resolución

- Del 1 al 100_9 se utilizarán
  $(100_9+1)\times 3-111_9=155$ cifras.
- De 1 a 1000_9 se utilizarán
  $(1000_9+1)\times 3-1111_9=2100$ cifras.

Se concluye que la última página del libro tiene tres cifras.

Luego, sea $\overline{mnp}_9$ la última página. Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{número de cifras}\\ \text{utilizadas en}\\ \text{base 9}\end{pmatrix}=(\overline{mnp}_9+1)\times 3-111_9$$

Por dato

$1028=(\overline{mnp}_9+1)\times 3-91$

$1119=(\overline{mnp}_9+1)\times 3$

$373=(\overline{mnp}_9+1)$

$\therefore\ \overline{mnp}_9=453_9$

LECTURA

Sucesión de Fibonacci

Uno de los autores que contribuyó a divulgar los numerales indoarábigos fue Leonardo de Pisa, más conocido como Fibonacci. Su padre tenía negocios en el norte de África. Allí, tuvo Leonardo maestros árabes. También viajó por Egipto, Siria y Grecia. Los conocimientos que adquirió se plasman en su libro *Liber abaci* (*Libro del ábaco*).

Leonardo Pisano

Su *Liber abaci* es un tratado de aritmética y álgebra. Asimismo, incluye problemas para practicar la teoría expuesta. He aquí el más célebre de ellos:

¿Cuántas parejas de conejos se producirán en un año, comenzando por una pareja única, si cada mes cualquier pareja engendra otra pareja, que se reproduce a su vez desde el segundo mes?

Fibonacci obtiene los números de parejas: 1; 1; 2; 3; 5; 8; 13; 21; 34; 55; 89; 144; 233. En un año han llegado a 233 parejas. Estos números dan lugar a la famosa sucesión de Fibonacci. Esta sucesión presenta diversas regularidades numéricas. Para que resulte más sencillo, las hemos enunciado en casos particulares (aunque se cumplen en general) y hemos calculado los primeros catorce términos de esta sucesión:

1	1	2	3	5	8	13	21	34	55	89	144	233	377

- Si se suman los cuatro primeros términos y se añade 1, sale el sexto ($1+1+2+3+1=8$). Si se suman los cincos primeros términos y se añade 1, sale el séptimo ($1+1+2+3+5+1=13$).
- Si se suman los tres primeros términos que ocupan posición impar (t_1; t_3; t_5), sale el sexto término (t_6), ($1+2+5=8$). Si se suman los cuatro primeros términos que ocupan posición impar (t_1; t_3; t_5; t_7), sale el octavo término (t_8), ($1+2+5+13=21$).
- Si se suman los tres primeros términos que ocupan posición par (t_2; t_4; t_6) y se añade 1, sale el séptimo término (t_7), ($1+3+8+1=13$). Si se suman los cuatro primeros términos que ocupan posición par (t_2; t_4; t_6; t_8) y se añade 1, sale el noveno término (t_9), ($1+3+8+21+1=34$).
- Se toman dos términos consecutivos, por ejemplo: $t_4=3$ y $t_5=5$; elevando al cuadrado y sumando $32+52=9+25=34$ que es el noveno término de la sucesión. Se toman también $t_6=8$ y $t_7=13$, elevando al cuadrado y sumando $82+132=64+169=233$ que es el decimotercer término de la sucesión.

Adaptado de <http://redescolar.ilce.edu.mx>.

Problemas resueltos

Problema 1

La suma del quinto y octavo término de una progresión aritmética es 195; la relación del tercer y duodécimo término es como 1 es a 4. Halle el primer término de la sucesión.

Resolución

Sea la sucesión

$$\{a_n\}: a_1;\ a_2;\ \underset{(a_1+2r)}{a_3};\ a_4;\ \underset{(a_1+4r)}{a_5};\ a_6;\ \underset{(a_1+7r)}{a_7};\ a_8;\ \ldots;\ \underset{(a_1+11r)}{a_{12}};\ \ldots$$

Por dato

- $\dfrac{a_1+2r}{a_1+11r}=\dfrac{1}{4} \rightarrow 4a_1+8r=a_1+11r$

$$3a_1=3r$$
$$a_1=r$$

- $\overbrace{(a_1+4r)}^{a_5}+\overbrace{(a_1+7r)}^{a_8}=195$

$$5r + 8r = 195$$
$$13r = 195 \rightarrow r=15=a_1$$

Por lo tanto, el primer término es 15.

Problema 2

Se tiene la sucesión $\{a_n\}$, definida por

$$a_n=\begin{cases} 3 & ;\ \text{si } n=1 \\ a_{n-1}+n; & \text{si } n\geq 2 \end{cases}$$

Halle a_6.

Resolución

Para la resolución debemos observar cómo está definida la sucesión y sus restricciones. La sucesión $\{a_n\}$ es la siguiente:

$$\{a_n\}: \underbrace{a_1}_{3}\ ;\ \overbrace{\underbrace{a_2\ ;\ a_3\ ;\ a_4\ ;\ \ldots}_{\text{todos los términos están definidos por } a_{(n-1)}+n}}^{n\geq 2}$$

$n=1$

Luego,

- $a_1=3$
- $a_2=a_1+2=3+2 \rightarrow a_2=5$
- $a_3=a_2+3=5+3 \rightarrow a_3=8$
- $a_4=a_3+4=8+4 \rightarrow a_4=12$
- $a_5=a_4+5=12+5 \rightarrow a_5=17$
- $a_6=a_5+6=17+6 \rightarrow a_6=23$

$\therefore\ a_6=23$

Problema 3

Dada la siguiente PA: –133; –125; –117; ... calcule la suma de los tres primeros términos positivos.

Resolución

Dada la sucesión, buscamos el término general.

$$-141\ ;\ \overset{a_1}{-133}\ ;\ \overset{a_2}{-125}\ ;\ \overset{a_3}{-117}\ ;\ \ldots$$

+8 +8 +8

Luego, el término general es

$$a_n=8n-141$$

Para encontrar los términos positivos, $a_n\geq 0$

$$8n-141\geq 0$$
$$n\geq 17;\ \ldots$$

18; 19; 20; ...

Entonces los términos positivos son

$$\underset{3}{a_{18}};\ \underset{11}{a_{19}};\ \underset{19}{a_{20}};\ \underset{27}{a_{21}};\ \ldots$$

$\therefore\ 3+11+19=33$

Otra forma

En la sucesión

$$-144\ ;\ -133\ ;\ -125\ ;\ -117\ ;\ \ldots;\ \overset{t_{17}}{-5};\ \overset{t_{18}}{3}\ ;\ 11;\ 19\ ;\ \ldots$$

+8 +8 +8

primer término positivo

$$\begin{array}{r|l} -141 & 8 \\ \hline 144 & 18 \leftarrow \\ \hline 3 & \end{array}$$

Luego, 3; 11 y 19 son los tres primeros términos positivos de la sucesión.

Por tanto, $3+11+19=33$.

Problema 4

Dadas las sucesiones $\{a_n\}$ y $\{b_m\}$, halle cuántos términos comunes tienen ambas sucesiones.

$\{a_n\}$: 5; 8; 11; 14; ...; 182

$\{b_m\}$: 3; 7; 11; 15; ...; 199

Resolución

Por dato

$$\{a_n\}: 2;\ 5;\ 8;\ 11;\ 14;\ \ldots;\ \underbrace{182}_{\substack{2+3n=182\\ n=60}}$$

$+3 \quad +3 \quad +3 \quad +3$

$\rightarrow\ a_n=2+3n\ ;\ n\leq 60$

$$\{b_m\}: -1;\ 3;\ 7;\ 11;\ 15;\ \ldots;\ \underbrace{199}_{\substack{-1+4m=199\\ m=50}}$$

$+4 \quad +4 \quad +4 \quad +4$

$\rightarrow\ b_m=-1+4m\ ;\ m\leq 50$

Para encontrar los términos comunes igualamos ambos términos generales.

$2+3n=-1+4m\ ;\ n\leq 60\ ;\ m\leq 50$

$3+3n=4m$

3	3	Si cumple
7	6	Si cumple
11	9	Si cumple
⋮	⋮	
59	45	Si cumple
63	58	No cumple

} 15 valores

Por lo tanto, hay 15 términos comunes, los cuales son los siguientes:

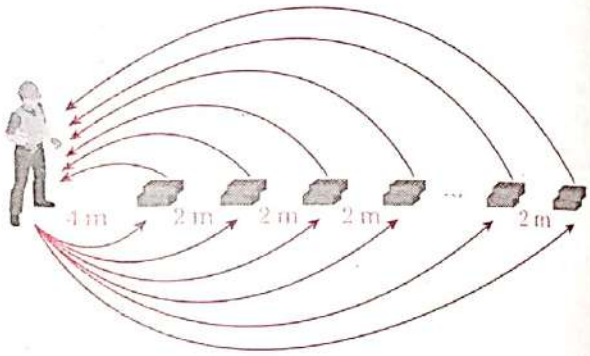
11; 23; 35; ...; 179

Problema 5

Un obrero observa que a su derecha y en línea recta hay bloques de 2 ladrillos. Estos bloques están separados 2 metros uno del otro; además, el bloque más cercano al obrero está a 4 metros. El obrero empieza a recoger los bloques y los apila en el lugar donde estaba parado, llevando un bloque a la vez. ¿Cuántos ladrillos recogió si al ir y venir recorrió 608 metros?

Resolución

Sea n la cantidad de grupos de ladrillos.



Al ir y venir recorrió 608 metros, entonces solo en ir recorrió

$$\frac{608}{2}=304 \text{ metros}$$

Luego,

$$304=\underbrace{4+6+8+10+14+\ldots+(2n+2)}_{n \text{ sumandos}}$$

Dado que es una PA, el último sumando es

$t_n=4+2(n-1)$

$t_n=2n+2$

Además,

$$304=\left(\frac{4+(2n+2)}{2}\right)\times n$$

$304=(n+3)n$

$16\times 19=(n+3)n$

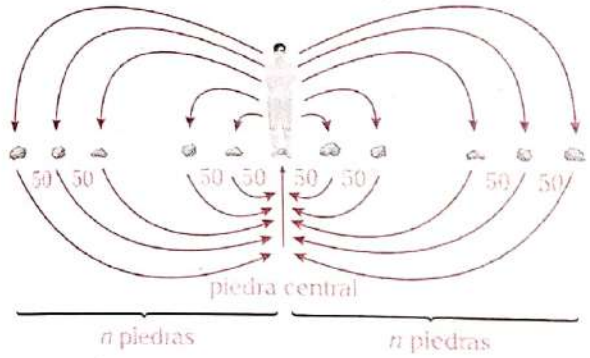
$\therefore\ n=16$

Como hay 16 grupos de 2 ladrillos, entonces, habrá recogido 32 ladrillos.

Problema 6

A lo largo de un camino había una cantidad impar de piedras cada 50 metros. Una persona reunió todas las piedras donde estaba la única piedra central, para lo que caminó 30,6 km. ¿Cuántas piedras había a lo largo del camino si consideramos que empezó a caminar desde la piedra central?

Resolución



Hay $(2n+1)$ piedras en total.

De la distancia recorrida,

$$30\,600=4(50+100+150+...+50n)$$
$$30\,600=4\times50\,(1+2+3+...+n)$$
$$2\times3\times3\times17=n\,(n+1)$$
$$\rightarrow\ 17=n$$

Nos piden la cantidad de piedras $(2n+1)$.

$\therefore\ 2n+1=2(17)+1=35$

Problema 7

Dada la siguiente progresión aritmética:

$$\underbrace{13...;\ \overline{abc}}_{n\ \text{términos}};...;\ \underbrace{\overline{cba};...;\ 754}_{n\ \text{términos}}$$

Calcule la suma de todos los valores de $a+b+c$.

Resolución

De la PA

$$n=\frac{\overline{abc}-13}{r}+1=\frac{754-\overline{cba}}{r}+1$$
$$\overline{abc}-13=754-\overline{cba}$$
$$\rightarrow\ \overline{abc}+\overline{cba}=767$$

Obtenemos que

$a+c=7$

$b=3$

Los valores de a, b y c son los siguientes:

a	c	b	a+b+c
1	6	3	10
2	5	3	10
3	4	3	10

Piden la suma de valores de $a+b+c$.

$\therefore\ 10+10+10=30$

Problema 8

Halle la suma de los 20 primeros términos comunes de las siguientes sucesiones:

- 7; 11; 15; 19;...
- 9; 16; 23; 30;...

Resolución

- Para la primera sucesión

$$3;\ 7;\ 11;\ 15;\ 19;\ ...$$
$$4\quad 4\quad 4\quad 4$$

$t_a=4a+3$

- Para la segunda sucesión

$$2;\ 9;\ 16;\ 23;\ 30;\ ...$$
$$7\quad 7\quad 7\quad 7$$

$t_b=7b+2$

Por condición

$$4a+3=7b+2$$
$$7b=4a+1$$

3	5
7	12
11	19
⋮	⋮

Analicemos solo para b puesto que para a sería lo mismo; luego los términos que coinciden serían 23; 51; 79; ..., los cuales forman a la vez una PA.

$$-5;\ 23;\ 51;\ 79;\ ...$$
$$28\quad 28\quad 28$$

cuya forma es

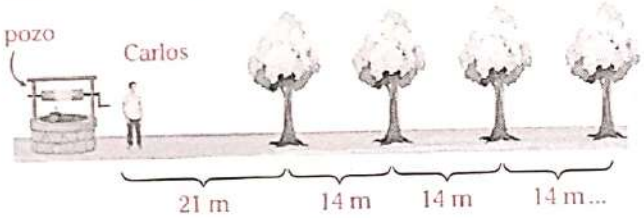
$t_K=28K-5.$

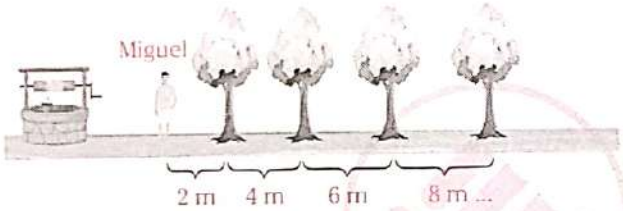
Queremos la suma de los 20 primeros.

$$\therefore\ \sum_{K=1}^{20}(28K-5)=5780$$

Problema 9

Carlos y Miguel deben regar n árboles cada uno; para ello emplean un balde que tiene capacidad para regar un solo árbol. El pozo que van a utilizar está ubicado en el punto de partida de ambos; el trabajo termina cuando dejen el balde en el mismo punto de partida.





Si al final del trabajo ambos recorrieron la misma distancia, considerando despreciable la distancia que recorre cada uno al inicio para llegar al pozo, ¿cuál será la diferencia de las distancias que existen entre el pozo y el último árbol regado por cada uno?

Resolución

Para Carlos:

$$\underbrace{\overset{\text{1.º árbol}}{21(2)}}_{3(14)} ; \underbrace{\overset{\text{2.º árbol}}{35(2)}}_{5(14)} ; \underbrace{\overset{\text{3.º árbol}}{49(2)}}_{7(14)} ; \ldots ; \underbrace{\overset{\text{n.º árbol}}{\boxed{}}}_{(2n+1)(14)}$$

Para Miguel:

$$\underbrace{\overset{\text{1.º árbol}}{2(2)}}_{1\times2(2)} ; \underbrace{\overset{\text{2.º árbol}}{6(2)}}_{2\times3(2)} ; \underbrace{\overset{\text{3.º árbol}}{12(2)}}_{3\times4(2)} ; \ldots ; \underbrace{\overset{\text{n.º árbol}}{\boxed{}}}_{n(n+1)(2)}$$

Al final ambos recorren igual distancia

$$3(14)+5(14)+7(14)+\ldots+(2n+1)(14)=1\times2(2)$$
$$+2\times3(2)+3\times4(2)+\ldots+n(n+1)(2)$$

$$\left(\left(\frac{2n+1+3}{2}\right)n\right)14=\frac{n(n+1)(n+2)}{3}(2)$$

$$\cancel{n}\,\cancel{(n+2)}\,\cancel{14}=\frac{\cancel{n}\,(n+1)\,\cancel{(n+2)}}{3}\cancel{2}$$

$$n=20$$

Para Carlos, la distancia del pozo al último árbol es $(2(20)+1)\times7=287$.

Para Miguel, la distancia del pozo al último árbol es $20\times21=420$.

Por lo tanto, la diferencia de ambos resultados es $420-287=133$.

Problema 10

Pedro y Eduardo comienzan a recolectar botellas plásticas para poderlas vender. Si el primer día Pedro recolectó 30 botellas; el segundo día, 42; el tercero, 56; el cuarto, 72; y así sucesivamente; mientras que Eduardo el primer día recolectó 12; el segundo, 24; el tercero, 36; el cuarto día, 48; y así sucesivamente. Si cada botella la venden a S/0,20, ¿cuál será la diferencia de lo recaudado por ambas personas durante los primeros 16 días?

Resolución

Para Pedro:

$$\underbrace{\overset{\text{día 1}}{30}}_{5\times6} \quad \underbrace{\overset{\text{día 2}}{42}}_{6\times7} \quad \underbrace{\overset{\text{día 3}}{56}}_{7\times8} \quad \underbrace{\overset{\text{día 4}}{72}}_{8\times9} \quad \ldots \quad \underbrace{\overset{\text{día 16}}{\boxed{}}}_{20\times21}$$

$$\begin{pmatrix}\text{total de}\\ \text{botellas}\end{pmatrix}=\frac{20\times21\times22}{3}-\frac{4\times5\times6}{3}=3040$$

Para Eduardo:

$$\underbrace{\overset{\text{día 1}}{12}}_{1(12)} ; \underbrace{\overset{\text{día 2}}{24}}_{2(12)} ; \underbrace{\overset{\text{día 3}}{36}}_{3(12)} ; \underbrace{\overset{\text{día 4}}{48}}_{4(12)} ; \ldots \underbrace{\overset{\text{día 16}}{\boxed{}}}_{16(12)}$$

$$\begin{pmatrix}\text{total de}\\ \text{botellas}\end{pmatrix}=\left(\frac{16\times17}{2}\right)\times12=1632$$

La diferencia del número de botellas es

$3040-1632=1408$

Como cada botella se vende a S/0,20, la diferencia recaudada es $1408(0{,}20)=$S/281,60.

Problema 11

Determine la cantidad de términos de 3 cifras de la siguiente sucesión: 18; 25; 34; 45; ...

Resolución

De la sucesión

$$\begin{array}{lccccccccccc} C= & 13 & ; & 18 & ; & 25 & ; & 34 & ; & 45 & ; \ldots \\ A+B= & & +5 & & +7 & & +9 & & +11 & & \\ 2A= & & & +2 & & +2 & & +2 & & & \end{array}$$

$\rightarrow A=1; B=4; C=13$

$a_n=n^2+4n+13$

Piden la cantidad de términos de 3 cifras.

$\rightarrow a_n=\overline{xyz}$

Luego,

$$100\leq\overline{xyz}<1000$$
$$100\leq n^2+4n+13<1000$$
$$100\leq\underbrace{n^2+4n+4}+9<1000$$
$$91\leq (n+2)^2<991$$
$$7{,}5\ldots\leq n<29{,}4\ldots$$
$$\underbrace{8;\ 9;10;\ \ldots;\ 29}_{22\text{ valores}}$$

Como n toma 22 valores, entonces existen 22 términos que son de tres cifras en la sucesión.

Problema 12

Mi padre es renovador de calzado. El primer día que abrió su negocio compuso 6 pares de zapatos; el segundo día, 9 pares de zapatos; el tercer día, 14 pares; el cuarto día, 21 pares; y así sucesivamente hasta el día de hoy, que ha arreglado 630 pares de zapatos. ¿Cuántos días han pasado desde que inauguró?

Resolución

Por dato

$$\begin{array}{lccccccccccc} & & 1.^{\circ}\text{ día} & & 2.^{\circ}\text{ día} & & 3.^{\circ}\text{ día} & & 4.^{\circ}\text{ día} & & \text{hoy} \\ C= & 5 & ; & 6 & ; & 9 & ; & 14 & ; & 21 & ; \ldots ; 630 \\ A+B= & & +1 & & +3 & & +5 & & +7 & & \\ 2A= & & & +2 & & +2 & & +2 & & & \end{array}$$

$\rightarrow A=1;\ B=0;\ C=5$

Luego,

$a_n=n^2+5$

Entonces

$n^2+5=630$

$n=25$

Por lo tanto, el total de días que pasaron desde su inauguración es 24.

Problema 13

Jorge va a una tienda a comprar un chocolate y el vendedor le regala un chocolate por su compra. La segunda vez compró tres chocolates y le regalaron dos, la tercera vez compró seis chocolates y le obsequiaron tres, la cuarta vez compró diez chocolates y le regalaron cuatro, y así sucesivamente. ¿Cuántos chocolates habrá recibido, en total, desde el primer día hasta la vigésima vez que fue a comprar?

Resolución

Del enunciado del problema

$$\begin{array}{ccccccccc} 1.^{\circ}\text{ día} & & 2.^{\circ}\text{ día} & & 3.^{\circ}\text{ día} & & 4.^{\circ}\text{ día} & & 20.^{\circ}\text{ día} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \underbrace{(1+1)}_{2} & ; & \underbrace{(3+2)}_{5} & ; & \underbrace{(6+3)}_{9} & ; & \underbrace{(10+4)}_{14} & ; \ldots & \boxed{} \end{array}$$

Hallemos el término general.

$$\begin{array}{lccccccccc} C= & 0 & ; & 2 & ; & 5 & ; & 9 & ; & 14 & ; \ldots \\ A+B= & & +2 & & +3 & & +4 & & +5 & & \\ 2A= & & & +1 & & +1 & & +1 & & & \end{array}$$

$\rightarrow A=\dfrac{1}{2};\ B=\dfrac{3}{2}$ y $C=0$

Luego,

$$a_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+0$$

$$a_n=\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}$$

Entonces el total de chocolates que recibe desde el primer día hasta el vigésimo día es igual a la sumatoria de dichos términos.

$$\sum_{n=1}^{n=20}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}\right)=\frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{n=20}n^2\right)+\frac{3}{2}\left(\sum_{n=1}^{n=20}n\right)$$

$$\sum_{n=1}^{n=20}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}\right)=\frac{1}{2}\left[\frac{20\times21\times41}{6}\right]+\frac{3}{2}\left[\frac{20\times21}{2}\right]$$

$$\sum_{n=1}^{n=20}\left(\frac{n^2}{2}+\frac{3n}{2}\right)=1750$$

Por lo tanto, el total de chocolates que recibe es 1750.

Problema 14

Determine la suma de cifras del resultado de sumar lo siguiente:

$$S=7+97+997+9997+\ldots+\underbrace{99\ldots997}_{80\text{ cifras}}$$

Resolución

$$S=7+97+997+9997+\ldots+\underbrace{99\ldots997}_{80\text{ cifras}}$$

$$S=\underbrace{(10-3)+(10^2-3)+(10^3-3)+\ldots+(10^{80}-3)}_{80\text{ sumandos}}$$

$$S=(10+10^2+10^3+\ldots+10^{80})-\underbrace{(3+3+3\ldots+3)}_{80\text{ sumandos}}$$

$$S=\underbrace{(1111\ldots11110)}_{81\text{ cifras}}-240$$

Restando se obtiene

$$\begin{array}{r} \overbrace{1111\ldots11110}^{80\text{ cifras}}- \\ 240 \\ \hline S=\underbrace{1111\ldots10}_{77\text{ cifras}}870 \end{array}$$

Nos piden la suma de cifras de S

$\therefore\ 77\times1+8+7=92$

Problema 15

Luego de una reunión se observa que a las sesiones semanales asiste siempre un socio menos que en la anterior. Once semanas después se contaron 1225 apretones de mano al finalizar la sesión. Si todos los socios celebraron el aniversario, ¿cuántos son estos?

Resolución

Sea n la cantidad de socios y, por dato, semana a semana hay un socio menos, pero luego de once semanas hay $n-10$ socios.

- El primer socio realiza $n-10-1$ apretones de mano.
- El segundo socio realiza $n-10-2$ apretones de mano.
- El tercer socio realiza $n-10-3$ apretones de mano.
- El cuarto socio realiza $n-10-4$ apretones de mano.

  ⋮ ⋮ ⋮

- El último socio realiza 1 apretón de manos.

Por lo tanto, el total de apretones de mano es

$$\underbrace{1+2+3+\ldots+(n-12)+(n-11)}_{(n-11)\text{ sumandos}}=1225$$

$$\frac{[1+(n-11)]\times(n-11)}{2}=1225$$

$\rightarrow\ (n-10)(n-11)=2450$

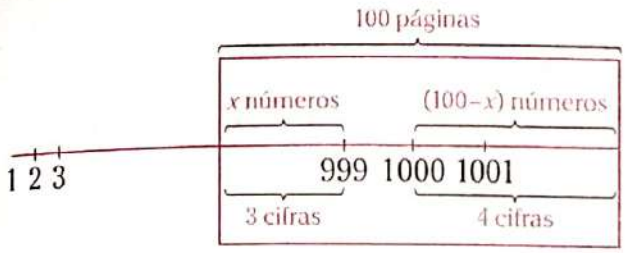
$\therefore\ n=60$

Problema 16

En las 100 últimas páginas de un libro se han utilizado 350 cifras. ¿Cuántas cifras se utilizan al numerar el libro?

Resolución

De acuerdo al problema, se utilizan 350 cifras en las 100 últimas páginas; no todas son de 3 cifras (300 cifras), ni todas son de 4 cifras (400 cifras). En estas últimas páginas hay de 3 y 4 cifras.



Luego,

$$3x+4(100-x)=350$$

$$x=50$$

Entonces el total de cifras que se utilizan es

$$\underbrace{1;2;...;9}_{\substack{9\text{ números}\\ \downarrow\\ 9\times1\text{ cifras}}};\underbrace{10;11;...;99}_{\substack{90\text{ números}\\ \downarrow\\ 90\times2\text{ cifras}}};\underbrace{100;101;...;999}_{\substack{900\text{ números}\\ \downarrow\\ 900\times3\text{ cifras}}};\underbrace{1000;1001;...;1049}_{\substack{50\text{ números}\\ \downarrow\\ 50(4)\text{ cifras}}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{total}\\ \text{de cifras}\\ \text{utilizadas}\end{pmatrix}=9\times1+90\times2+900\times3+50\times4=3089$$

Otra forma

Se escribe la sucesión natural

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...;\ \underbrace{1049}_{4\text{ cifras}}$$

$$\begin{pmatrix}\text{número de}\\ \text{cifras utilizadas}\end{pmatrix}=(1049+1)4-1111=3089$$

Por lo tanto, se utilizan 3089 cifras en total.

Problema 17

De un libro se arrancan todas las hojas terminadas en cifra 6, con lo que se eliminan 230 cifras de la numeración del libro en total. ¿Cuál es el número máximo de páginas que puede tener el libro?

Resolución

Se sabe que se arranca una hoja, entonces son 2 páginas menos en el libro.

Cuando se arrancan las hojas terminadas en cifra 6, se eliminan las páginas que terminan en 5 y en 6.

Si se eliminan 230 cifras en total, entonces se eliminan 115 cifras en las páginas que terminan en cifra 5 y 115 en las páginas que terminan con cifra 6.

Entonces analizaremos las páginas que terminan en cifra 6

$$\underbrace{6;}_{1\times1}\ \underbrace{16;\ 26;\ 36;\ ...;\ 96}_{9\times2}$$

1 cifra + 18 cifras = 19 cifras

Dado que se deben utilizar 115 cifras, faltan

$$115-19=96\text{ cifras}$$

Pero cada uno de los números que siguen presentan tres cifras.

Entonces hay 96/3=32 números

$$\underbrace{106;\ 116;\ 126...;\ N}_{32\text{ números}}$$

Por cantidad de términos tendremos

$$\frac{N-106}{10}+1=32$$

$\rightarrow\ N=416$

La última página arrancada es 416.

La última página del libro puede ser 416; 417; 418; 419; 420; 421; 422; 423; 424.

Por lo tanto, la máxima cantidad de páginas es 424.

Problema 18

Calcule la suma de todos los elementos de la matriz.

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & \cdots & 99\\ 3 & 5 & 7 & 9 & \cdots & 101\\ 5 & 7 & 9 & 11 & \cdots & 103\\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 99 & 101 & 103 & 105 & \cdots & \end{bmatrix}$$

Resolución

En la matriz se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 & 1+2 & 1+4 & 1+6 & \cdots & 1+98\\ 3 & 3+2 & 3+4 & 3+6 & \cdots & 3+98\\ 5 & 5+2 & 5+4 & 5+6 & \cdots & 5+98\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \ddots & \vdots\\ 99 & 99+2 & 99+4 & 99+6 & \cdots & 99+98 \end{bmatrix}$$

Sumamos por columnas

$$\begin{array}{l} S_1=1+3+5+...+99 \\ S_2=1+3+5+...+99+2\times 50 \\ S_3=1+3+5+...+99+4\times 50 \\ S_4=1+3+5+...+99+6\times 50 \\ \vdots \qquad\qquad \vdots \\ S_{50}=1+3+5+...+99+98\times 50 \end{array} \quad (+)$$

$$\sum_{i=1}^{50} S_i = (1+3+5+...+99)\times 50 + (2+4+6+...+98)\times 50$$

$$\sum_{i=1}^{50} S_i = (1+2+3+4+5+...+98+99)50$$

$$\sum_{i=1}^{50} S_i = \frac{99\times 100}{2}\times 50$$

$$\therefore \quad \sum_{i=1}^{50} S_i = 247\ 500$$

Problema 19

En la enumeración de las últimas 272 páginas de un libro se han utilizado 841 cifras. ¿Cuántas veces se ha utilizado la cifra 4 en total?

Resolución

Evaluamos la cantidad de cifras utilizadas en las últimas 272 páginas.

$$\underbrace{272\times 3 \text{ cifras}}_{816 \text{ cifras}} < 841 \text{ cifras} < \underbrace{272\times 4 \text{ cifras}}_{1098 \text{ cifras}}$$

Se concluye que hay n páginas de cuatro cifras y $(272-n)$ páginas de tres cifras.

Luego,

$$n\times 4+(272-n)\times 3=841$$
$$\rightarrow \ n=25$$

Se afirmará que hay 25 páginas de cuatro cifras, siendo la última página 1024.

Luego, hallamos cuántas veces se ha utilizado la cifra 4.

- En las unidades

$$\begin{array}{c} \overline{\underbrace{abc}d} \\ 0004 \\ 0014 \\ 0024 \\ 0034 \\ \vdots \\ 0984 \\ 0994 \\ 1004 \\ 1014 \\ 1024 \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} 103 \text{ valores}$$

103 veces la cifra 4 en las unidades

- En las decenas:

$$\begin{array}{c} \overline{\underbrace{abc}d} \\ 0040 \\ 0041 \\ \vdots \\ 0049 \\ \hline 0140 \\ 0141 \\ \vdots \\ 0149 \\ \hline \vdots \\ \hline 0940 \\ 0941 \\ \vdots \\ 0949 \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 10 \text{ veces} \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 10 \text{ veces} \quad \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} 10 \text{ veces}$$

$10\times 10=100$ veces la cifra 4 en las decenas

- En las centenas

$$\begin{array}{c} \overline{\underbrace{abc}d} \\ 0400 \\ 0401 \\ 0402 \\ \vdots \\ 0499 \end{array} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \\ \\ \end{array}\right\} 100 \text{ veces}$$

100 veces la cifra 4 en las centenas

Finalmente, el número de veces que se ha utilizado la cifra 4 es

$$103+100+100=303$$

Test

1. Dada la siguiente sucesión:
4; 7; 10; 13; 16; 19; ...
determine la suma del decimosegundo y trigésimo cuarto término.

A) 132 B) 180 C) 146
D) 140 E) 120

2. Si el décimo término de una PA es 73, el término de lugar 31 es 220. Calcule el quinto término de la PA.

A) 31 B) 38 C) 42
D) 45 E) 28

3. Se tiene la sucesión $\{a_n\}$ definida por

$$a_n = \begin{cases} 5 & ; \text{ si } n=1 \\ a_{(n-1)} - n & ; \text{ si } n \geq 2 \end{cases}$$

Halle a_4.

A) -2 B) 3 C) 4
D) -4 E) -3

4. A la señora Felícita le venden un aparador a plazos. El primer mes pagó S/15,60; el segundo, S/18,60; el tercero, S/21,60; así sucesivamente hasta que pagó S/42,60 el último mes. ¿Cuánto le ha costado a la señora Felícita su aparador?

A) S/320 B) S/291 C) S/300
D) S/319 E) S/291

5. Indique cuántos términos tiene la siguiente sucesión:
8; 13; 20; 29; ...; 965

A) 30 B) 32 C) 24
D) 28 E) 35

6. Si los cuatro primeros términos de una sucesión cuadrática son m; $m+6$; $4m+2$ y $7m$, calcule la suma de cifras del sexto término.

A) 9 B) 12 C) 8
D) 15 E) 7

7. Dadas las siguientes sucesiones:
$\{a_n\}$: 5; 9; 13; 17; 21; ...; 81
$\{b_m\}$: 5; 12; 19; 26; 33; ...; 208
calcule la suma de los términos comunes que tienen ambas sucesiones.

A) 98 B) 103 C) 105
D) 96 E) 99

8. Jenny lee un libro de la siguiente manera: el primer día lee las 3 primeras páginas, el segundo día, las 6 siguientes, el tercero lee las 11 siguientes, el cuarto lee las 18 siguientes; así sucesivamente hasta el último día en que leyó 102 páginas. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 523 B) 405 C) 353
D) 414 E) 457

9. Indique la suma de cifras del resultado de
$$9+99+999+\ldots+\underbrace{999\ldots999}_{60 \text{ cifras}}$$

A) 45 B) 46 C) 63
D) 60 E) 65

10. En las 60 últimas páginas de un libro, se han utilizado 160 cifras. Determine la cantidad de páginas que tiene el libro.

A) 108 B) 140 C) 138
D) 112 E) 139

Claves

1 D 2 B 3 D 4 B 5 A 6 A 7 E 8 B 9 C 10 E

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Si el octavo y vigésimo primer término de una progresión aritmética son 45 y 97, respectivamente, calcule la suma de los 10 primeros términos de la PA.

A) 360
B) 320
C) 280
D) 180
E) 350

2. Una persona camina diariamente 5 metros más que el día anterior. Si el primero de junio de este año caminó 6 metros, ¿cuántos metros habrá caminado hasta el último día de julio de este mismo año?

A) 8546 B) 9516 C) 9034
D) 9330 E) 15 600

3. Un biólogo se dedica al cultivo de cierta bacteria. El primer día cultiva 33 bacterias; a partir del segundo día cultiva 8 bacterias más que el día anterior. ¿Cuántas bacterias habrá cultivado en 30 días? Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 22 B) 24 C) 26
D) 15 E) 32

4. Percy y María comienzan a leer un libro de 700 páginas. María lee 40 páginas diarias; Percy lee 5 páginas el primer día, 10 el segundo, 15 el tercero, así sucesivamente. ¿Cuántos días debe pasar para que lean la misma cantidad de páginas?

A) 16 B) 12 C) 15
D) 14 E) 17

5. Si los radios de una sucesión de círculos son 1 m; $\frac{1}{2}$ m; $\frac{1}{4}$ m; $\frac{1}{8}$ m; ..., calcule la suma de sus correspondientes áreas.

A) $\frac{3}{4}\pi\ m^2$
B) $2\pi\ m^2$
C) $\frac{4}{3}\pi\ m^2$
D) $1{,}3\pi\ m^2$
E) $2{,}4\pi\ m^2$

6. En la siguiente sucesión:
12_a; $23_{(a+1)}$; $34_{(a+2)}$ ...
se cumple que la diferencia entre el 18.° y 10.° término es 264. Calcule la suma de cifras del numeral correspondiente a la base vigesimal.

A) 22 B) 23 C) 32
D) 33 E) 42

7. Si $S=3n^2+n$ nos da la suma de los términos de una progresión aritmética de n términos, calcule el promedio aritmético de los términos de los lugares 15; 20 y 25.

A) 116 B) 120 C) 132
D) 118 E) 140

8. Se tiene 8281 metros cúbicos de agua, los cuales se van a vaciar en recipientes de forma cúbica cuyos lados son 1 metro, 2 metros, 3 metros, y así sucesivamente. Si los recipientes deben estar llenos y se empieza a llenar desde el más pequeño y así sucesivamente en forma ordenada. ¿Cuántos recipientes se han usado?

A) 10 B) 16 C) 13
D) 12. E) 14

9. Juanito ha formado una torre de latas como se muestra en el gráfico y le asigna un número a cada lata. Calcule cuántas latas utilizó si al sumar todos los números que figuran en las latas se obtuvo 1240.

A) 96 B) 120 C) 130
D) 124 E) 121

10. Se deja caer una pelota desde una altura de 20 metros. Cada vez que toca el suelo rebota hasta 3/4 de su altura máxima anterior. Encuentre la distancia total que viaja la pelota hasta llegar al reposo.

A) 20 B) 120 C) 140
D) 60 E) 200

11. Fernando tiene un libro de 4760 páginas, y decide arrancar 3 hojas el primer día, 5 hojas el segundo día, 7 hojas el tercer día y así sucesivamente. ¿Qué día será cuando arranque la última hoja, si la primera la arrancó el día miércoles?

A) lunes B) miércoles C) viernes
D) martes E) domingo

12. Por la compra de lapiceros, a Benjamín le regalan una cierta cantidad de lapiceros. Si la primera vez compra 1 y le regalan 1, la segunda compra 3 y le regalan 2, la tercera vez compra 6 y le regalan 3, y así sucesivamente, ¿cuántos lapiceros recibirá en total en la vigésima compra?

A) 250 B) 230 C) 240
D) 248 E) 256

13. Para enumerar las 50 últimas páginas de un libro se han utilizado 179 cifras. ¿Cuántas cifras más se utilizaría, si se enumera todo el libro en el sistema quinario?

A) 1111 B) 1208 C) 1209
D) 1358 E) 1359

Nivel intermedio

14. En una PA de razón entera, el primer y último término son de tres cifras, además, se cumple que la suma de los dos términos posteriores al primero y los dos anteriores al último es 1712; asimismo, la suma de todos los términos es 34 240. Si N es la suma de la razón y el número de términos de la PA, calcule cuántas cifras se utilizan para enumerar un libro de N hojas (N es máximo).

A) 167 B) 324 C) 413
D) 420 E) 429

15. Halle cuántos tipos de imprenta se necesitan para numerar las 500 últimas páginas de un libro que tiene 637 hojas.

A) 1625 B) 1775 C) 1425
D) 1745 E) 3989

16. Dada la progresión aritmética

$\overline{3a}_n;\ 43_{(n+1)};\ \overline{4a}_{(n+2)};\ \ldots;\ \overline{xy}_{(3n)}$

en la cual la suma de los tres primeros términos es mayor que 170. Halle el mínimo valor de la suma de términos.

A) 3242 B) 3896 C) 4728
D) 4964 E) 5974

17. Sea $S=9+16+27+42+...+826$; en la que A es la suma de cifras de dicho resultado. Sea la sucesión -1; 5; 15; 29; ...; 1797, en la que B es el número de términos y C es la suma de los 2 términos centrales. Calcule $A+B+C$.

A) 998 B) 996 C) 994
D) 995 E) 999

18. En la siguiente sucesión:
13_x; $24_{(x+1)}$; $35_{(x+2)}$; ...
se cumple que la diferencia entre el 18.° término y el 10.° término es 264. Calcule la suma de cifras del 28.° término.

A) 18 B) 20 C) 21
D) 17 E) 16

19. Sea la siguiente progresión aritmética:
$\underbrace{a;\ b;\ \overline{aa};\ ...}_{K \text{ términos}}$
Si se sabe que el término central es $\overline{bb}$, calcule la suma de cifras del último término.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

20. Halle el término 25 en la siguiente sucesión aritmética de 2.° orden.
27_n; 45_n; 67_n; 115_n; ...

A) 1462 B) 1461 C) 1465
D) 1470 E) 1463

21. Si la suma del primer y séptimo término de la sucesión $\overline{a2b}$; $\overline{a3b}$; $\overline{a4b}$;..., es $\overline{c7c2}$, calcule $a+b+c$.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 14 E) 15

22. Si $S_n=\underbrace{23+46+69+...}_{n \text{ sumandos}}$
calcule $S_1+S_2+S_3+...+S_{30}$.

A) 114 354 B) 114 980 C) 114 080
D) 117 325 E) 118 630

23. Sea la siguiente PA:
$\overline{a(a+1)}_3$; $\overline{(a+1)a}_3$; c; $\overline{aa}$; ...
Siendo t_n el término enésimo de la PA, además, $S_n=\sum_{i=1}^{n} t_i$, calcule la suma de los 10 primeros términos de la siguiente sucesión:
S_1; S_2; S_3; ...

A) 405 B) 505 C) 605
D) 705 E) 805

24. Dada la siguiente PA:
$\underbrace{M;\ N;\ 60;\ ...;}_{y \text{ términos}}\ \underbrace{x;\ ...;\ \overline{ab4}_{12};\ 324;\ \overline{cd4}_8}_{y \text{ términos}}$
además, $a=b$; $c>d$, halle $x+y$.

A) 176 B) 186 C) 196
D) 206 E) 216

25. Se ubican los números formando cuadrados concéntricos del siguiente modo:

43	45	47	49	...
41	15	17	19	21
39	13	3	5	23
37	11	9	7	25
35	33	31	29	27

Calcule la suma de cifras del número que cierra el 18.° cuadrado, si el primer cuadrado está formado por el 3.

A) 12 B) 15 C) 13
D) 17 E) 19

26. Si S_1: 23; 32; 41; ... ; 410
S_2: 39; 46; 53; ... ; 494
¿cuántos términos son comunes a ambas sucesiones?

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

27. Dadas las siguientes sucesiones:
S_1: 7; 12; 17; 22; ...; 297
S_2: 4; 11; 18; 25; ...
¿cuántos términos son comunes a ambas sucesiones?

A) 6 B) 5 C) 7
D) 8 E) 9

Nivel avanzado

28. Se define una sucesión mediante
$a_1=4$; $a_n=28(n-1)+4n$; $\forall\, n>1$; $n \in \mathbb{N}$
Además, A resulta de la diferencia entre a_7 y a_9. Dada la siguiente progresión aritmética:
$\overline{ab}_n$; $\overline{a(b+3)}_n$; $\overline{(2b)2}_n$; ...; $\overline{a(a+b)b}_n$
que tiene 41 términos, donde $B=a+b+n$ y C es la suma de los 16 términos que presenta la progresión aritmética mostrada
$\overline{ppp}$; $\overline{pq4}$; $\overline{pr1}$; $\overline{(q-1)r(r-1)}$; ...
calcule $A+B+C$.

A) 13 351 B) 13 350 C) 13 352
D) 13 347 E) 13 354

29. Una esfera es soltada desde lo alto de una pendiente y se observa que recorre durante el primer segundo 0,10 cm; durante el segundo 3×0,10 cm; durante el tercero 5×0,10 cm; durante el cuarto 7×0,10 cm, y así sucesivamente. Si el descenso dura un minuto, calcule la distancia recorrida por la esfera.

A) 3,6 m B) 4,2 m C) 4,8 m
D) 5,4 m E) 6 m

30. En la siguiente sucesión: 3; 7; 12; 18; 25; ..., ¿cuál es el último término de tres cifras y cuál es el primer término de cuatro cifras? Dé como respuesta la suma de ambos términos.

A) 1995 B) 1996 C) 1997
D) 2019 E) 1999

31. Determine cuántas cifras se han utilizado para escribir los 1000 términos de la siguiente sucesión:
13; 18; 23; 28; ...
Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 21 B) 22 C) 23
D) 24 E) 25

32. ¿Cuántos términos hay que considerar en las dos series para que la suma de ambas sea la misma?
$A_1=1+2+3+4+5+...$
$A_2=100+98+96+94+...$

A) 45 B) 56 C) 59
D) 67 E) 72

33. Halle la suma de los 20 primeros términos de la sucesión
9; 99; 999; 9999; 99 999; ...
Dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 25 B) 27 C) 18
D) 31 E) 21

34. Calcule la suma de los n primeros términos de la serie $S=69+6969+696\,969+...$

A) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n+1}-99n-100}{99}\right]$

B) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n}-100n+99}{100}\right]$

C) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n+1}+99n-99}{99}\right]$

D) $\frac{69}{99}\left[\frac{99^{n+1}-99n+100}{99}\right]$

E) $\frac{69}{99}\left[\frac{100^{n}-99(n+1)-100}{99}\right]$

35. Halle el valor de

$$S=a_b+\overline{aa}_b+\overline{aaa}_b+\overline{aaaa}_b+\ldots+\underbrace{\overline{aa\ldots a}_b}_{n \text{ cifras}}$$

A) $S=\dfrac{a}{(b-1)^2}\times[b^{n+1}+(b-1)n+b]$

B) $S=\dfrac{a}{(b-1)^2}\times[b^{n+1}-(b-1)n-b]$

C) $S=\dfrac{a}{(b-1)}\times[b^{n+1}-(b-1)n+b]$

D) $S=\dfrac{a}{(b-1)}\times[b^{n+1}-(b-1)n-b]$

E) $S=\dfrac{a}{(b-1)}\times[b^{n+1}+(b-1)n+b]$

36. En las últimas 36 páginas de un libro se han empleado 129 cifras en la escritura de estas. ¿Cuántas hojas tiene el libro?

A) 509 B) 510 C) 1018
D) 1020 E) 1022

37. Para imprimir un libro se emplean 255 tipos de imprenta, luego se elimina el último capítulo que tenía 28 páginas y se reemplaza por otro de 40 páginas. Calcule cuántas páginas tiene el nuevo libro.

A) 128 B) 130 C) 133
D) 135 E) 137

38. En la enumeración de las páginas de un libro se han utilizado 324 cifras 1. ¿Cuántas páginas tiene el libro?

A) 1011 B) 1012 C) 1013
D) 1014 E) 1015

39. El número de páginas de un libro está formado por las tres últimas cifras de

$E=1^2+2^2+3^2\ldots+50^2$

Si dicho libro se enumera en base 8, ¿cuántos tipos se utilizarán para su enumeración?

A) 3119 B) 3130 C) 3095
D) 3096 E) 3132

40. En la numeración de un libro de $\overline{(a+2)8}$ páginas se han utilizado 811 tipos de imprenta menos que en la enumeración de las páginas de un libro de $\overline{3a2}$ páginas. Halle cuántos tipos se necesitan para numerar un libro de $\overline{1a(a-4)}$ páginas en base 6.

A) 444 B) 446 C) 448
D) 450 E) 452

41. En la distribución mostrada, indique la columna en la que se encuentra el número que representa el tercer año bisiesto aumentado en un año del siglo XXI.

P	Q	R	S	T
	1	3	5	7
15	13	11	9	
	17	19	21	23
31	29	27	25	
	33	35	37	39
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

A) P B) Q C) R
D) S E) T

42. Se escriben los números pares en la forma mostrada.

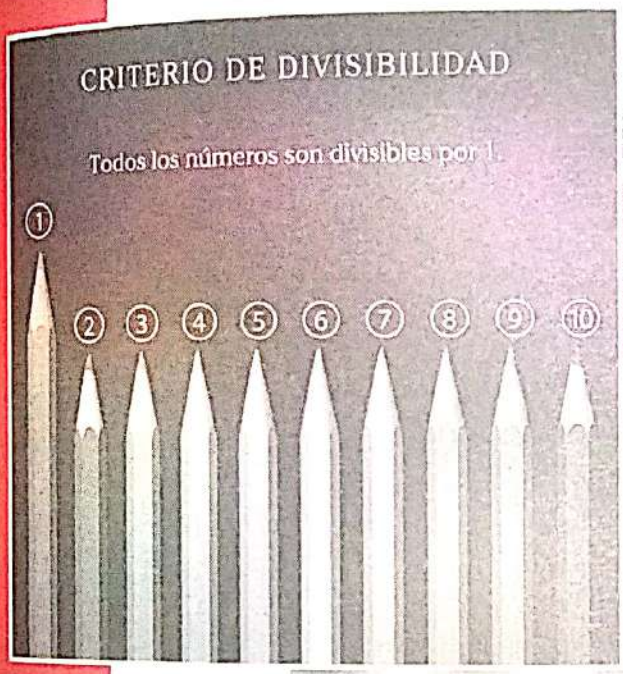
2
4 6
8 10 12
14 16 18 20
⋮ ⋮ ⋮ ⋮

Los términos de la última fila suman 29 822. ¿Cuánto suman los términos de la fila central?

A) 3375 B) 3125 C) 2048
D) 4112 E) 5212

Capítulo

VII



Carl Friedrich Gauss

Teoría de divisibilidad

Arturo Sánchez Vásquez

CAPÍTULO VII

TEORÍA DE DIVISIBILIDAD

Objetivos

- Estudiar y conocer los principios fundamentales de la divisibilidad.
- Aprender a resolver ecuaciones diofánticas lineales.
- Aplicar los criterios de divisibilidad para hallar residuos o valores de las cifras desconocidas de un numeral.

Introducción

La teoría de la divisibilidad, que tiene como base la teoría de congruencias, es una parte fundamental de la teoría de los números (teoría de la divisibilidad, teoría de los números primos, máximo común divisor y mínimo común múltiplo). Esta teoría es conocida desde tiempos remotos; fue utilizada por los egipcios, hindúes y griegos. En sus inicios, solo diferenciaban los pares de los impares y luego introdujeron otros módulos. Este desarrollo se dio en función de la necesidad de saber si una cantidad podía repartirse en una determinada cantidad de partes de manera exacta o inexacta.

Actualmente, la teoría de la divisibilidad tiene diferentes aplicaciones, entre las más simples se podrían mencionar las siguientes: calcular cuántos alumnos por carpeta y cuántas carpetas por aula se necesitan para cubrir una determinada capacidad; determinar la cantidad de panes, aceitunas y huevos que corresponden a cada uno de los miembros de una familia numerosa; calcular la cantidad de dinero que se necesita para los pasajes de una semana (dependiendo de la cantidad de días y la cantidad de viajes por día); etc. Sin embargo, la teoría de la divisibilidad también tiene aplicación en la ingeniería informática, mediante la teoría de congruencias, para asignar posiciones de memoria a ficheros de un ordenador a través de las funciones de dispersión; también puede servir para la generación de números pseudoaleatorios.

El presente capítulo está organizado de la siguiente manera: primero encontraremos las definiciones de divisibilidad y multiplicidad, así como los principios de divisibilidad; más adelante se encuentran los criterios de divisibilidad, todo esto se refuerza con ejemplos y aplicaciones. A continuación, se tiene una lectura relativa al tema de la divisibilidad, luego encontraremos problemas resueltos, un test para que el lector se autoevalúe y, finalmente, problemas propuestos para resolver. Se recomienda que el lector siga el orden indicado, ya que el capítulo está elaborado secuencialmente, es decir, de lo sencillo a lo complejo.

1▸ Definición

La teoría de la divisibilidad es una parte de la teoría de los números que estudia las condiciones que debe reunir un número para ser divisible por otro, así como las consecuencias que se deriven de estas.

2▸ Divisibilidad

Un número entero A es divisible por otro número entero positivo B si al dividir A entre B, la división resulta entera y exacta.

Ejemplos

- $91 \,\underline{|\, 7} \rightarrow 7 \in \mathbb{Z}^+$
  $0 \quad 13$

  Se interpreta
  - 91 es divisible por 7.
  - 7 es divisor de 91.
  - 7 divide a 91.

  } Se denota $7 \mid 91$

- $-44 \,\underline{|\, 4} \rightarrow 4 \in \mathbb{Z}^+$
  $0 \quad -11$

  Se interpreta
  - -44 es divisible por 4.
  - 4 es divisor de -44.
  - 4 divide a -44.

  } Se denota $4 \mid -44$

- $0 \,\underline{|\, 9} \rightarrow 9 \in \mathbb{Z}^+$
  $0 \quad 0$

  Se interpreta
  - 0 es divisible por 9.
  - 9 es divisor de 0.
  - 9 divide a 0.

  } Se denota $9 \mid 0$

En general,

$$\boxed{\begin{array}{l} A \,\underline{|\, B} \rightarrow B \in \mathbb{Z}^+;\ \{A; K\} \subset \mathbb{Z} \\ 0 \quad K \end{array}}$$

Se interpreta
- A es divisible por B.
- B es divisor de A.
- B divide a A.

} Se denota $B \mid A$

3▸ Multiplicidad

Un número entero A es múltiplo de otro número entero positivo B si A es el resultado de multiplicar a B por otro número entero.

Ejemplos

- $91 = \underset{\uparrow \atop 7 \in \mathbb{Z}^+}{(7)}(13)$

  Se lee: "91 es múltiplo de 7".
  Se denota

  $$91 = \underset{\uparrow \atop \text{módulo}}{\overset{\circ}{7}} = m7$$

- $-44 = \underset{\uparrow \atop 4 \in \mathbb{Z}^+}{(4)}(-11)$

  Se lee: "-44 es múltiplo de 4".
  Se denota

  $$-44 = \underset{\uparrow \atop \text{módulo}}{\overset{\circ}{4}} = m4$$

- $0 = \underset{\uparrow \atop 9 \in \mathbb{Z}^+}{(9)}(0)$

  Se lee: "0 es múltiplo de 9".
  Se denota

  $$0 = \underset{\uparrow \atop \text{módulo}}{\overset{\circ}{9}} = m9$$

En general,

$$\boxed{A = \underset{\uparrow \atop B \in \mathbb{Z}^+}{(B)}(K);\ \{A; K\} \subset \mathbb{Z}}$$

Se lee: "A es múltiplo de B".
Se denota

$$A = \underset{\uparrow \atop \text{módulo}}{\overset{\circ}{B}} = mB$$

▸▸ Observación

Se debe tener en cuenta que, aunque el desarrollo de esta teoría será en $\mathbb{Z}$, restringiremos nuestro estudio solo a divisores enteros positivos.

Conclusiones generales

1. Decir que "A es divisible por B" equivale a decir que "A es múltiplo de B".

2. Un número entero positivo es divisor de otro número entero si lo divide de forma entera y exacta.

   Ejemplo

   Los divisores enteros positivos de 12 son 1; 2; 3; 4; 6 y 12.

   En consecuencia, se tiene lo siguiente:

   - La unidad es divisor de todo número entero.

     Ejemplos

     $8 \,\underline{|\,1}$ $\quad 0 \;\; 8$ $\qquad -3 \,\underline{|\,1}$ $\quad 0 \;\; -3$ $\qquad 0 \,\underline{|\,1}$ $\quad 0 \;\; 0$

   - Todo entero positivo es divisor de sí mismo.

   - La cantidad de divisores enteros positivos de todo número entero no nulo es limitada.

3. Los múltiplos de un número entero positivo B tienen la forma BK; $K \in \mathbb{Z}$.

   Ejemplo

   Los múltiplos de 7 tienen la forma $7K$; $K \in \mathbb{Z}$.

   $\overset{\circ}{7}$: ...; -14; -7; 0; 7; 14; ...

   En consecuencia, se tiene lo siguiente:

   - El cero es múltiplo de todo entero positivo.

     $\overset{\circ}{a} = aK$; $a \in \mathbb{Z}^+ \wedge K \in \mathbb{Z}$

     Si $K=0$, entonces $0 = \overset{\circ}{a}$.

   - Los múltiplos de un número entero positivo pueden ser positivos, negativos o cero.

   - La cantidad de múltiplos de un número entero positivo es ilimitada.

   - Los múltiplos del entero positivo B ($B \geq 10$) se denotará como $\overset{\circ}{\overline{B}}$.

     Ejemplos

     - múltiplo de 10: $\overset{\circ}{\overline{10}}$
     - múltiplo de 117: $\overset{\circ}{\overline{117}}$

4. El divisor y el módulo son enteros positivos.

5. Decir que "A es múltiplo de B" equivale a decir que "B es divisor de A".

Recuerde

es múltiplo de

$30 = 6$ ← módulo

es divisor de

Aplicación 1

Calcule la suma de los valores que puede tomar n si $6 = \overset{\circ}{n}$.

Resolución

Del dato del problema, reconocemos que n es módulo; $n \in \mathbb{Z}^+$.

Como 6 es múltiplo de n, entonces n es divisor de 6.

Los divisores de 6 son 1; 2; 3 y 6.

Por lo tanto, la suma de todos los valores que puede tomar n es

$1+2+3+6=12$

Nota

Tenga en cuenta lo siguiente:

- En $\mathbb{Z}$, los divisores del 12 son 1; -1; 2; -2; 3; -3; 4; -4; 6; -6; 12; -12.
- En $\mathbb{Z}$, los divisores del -10 son 1; -1; 2; -2; 5; -5; 10; -10

Podemos observar que en $\mathbb{Z}$, la suma de divisores enteros de un número entero no nulo es cero.

Aplicación 2

¿Cuántos números de dos cifras son divisibles por 7?

Resolución

Sabemos que

divisible por 7 <> múltiplo de 7

Además,

$$\overline{ab} = \overset{\circ}{7} = 7K;\ K \in \mathbb{Z}$$

$$K: 2; 3; 4; ...; 14$$

$$\rightarrow\ \overline{ab}: 14; 21; 28; ...; 98$$

Por lo tanto, existen 13 números de dos cifras que son divisibles por 7.

Otra forma

La forma general de resolver este tipo de problemas es la siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} 10 \leq 7K < 100 \\ 1{,}42... \leq K < 14{,}2... \end{array}\right\} \div 7$$

$$\rightarrow\ K: 2; 3; 4; ...; 14$$

Finalmente, como K toma 13 valores, al reemplazar estos en $\overline{ab}=7K$, se tendrán 13 números de dos cifras que son divisibles por 7.

Aplicación 3

¿Cuántos números de tres cifras son múltiplos de 16?

Resolución

Se tiene que

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{16} = 16K;\ K \in \mathbb{Z}$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} 100 \leq 16K < 1000 \\ 6{,}25 \leq K < 62{,}5 \end{array}\right\} \div 16$$

$$\rightarrow\ K: \underbrace{7; 8; 9; ...; 62}_{62-6=56 \text{ números}}$$

Finalmente, como K toma 56 valores, al reemplazar estos en $\overline{abc}=16K$, se tendrán 56 números de tres cifras que son múltiplos de 16.

Aplicación 4

¿Cuántos números comprendidos entre 120 y 430 son divisibles por 15?

Resolución

Sea N uno de los números que nos piden.

$$N = \overset{\circ}{15} = 15K;\ K \in \mathbb{Z}$$

entre

$$\left.\begin{array}{l} 120 < 15K < 430 \\ 8 < K < 28{,}6... \end{array}\right\} \div 15$$

$$\rightarrow\ K: \underbrace{9; 10; 11; ...; 28}_{28-8=20 \text{ números}}$$

Finalmente, como K toma 20 valores, al reemplazar estos en $N=15K$, se tendrá 20 números divisibles por 15.

Aplicación 5

¿Cuántos números múltiplos de 12 hay desde 250 hasta 600?

Resolución

Sea N uno de los números que nos piden.

$$N = \overset{\circ}{12} = 12K;\ K \in \mathbb{Z}$$

desde hasta

$$\left.\begin{array}{l} 250 \leq 12K \leq 600 \\ 20{,}8... \leq K \leq 50 \end{array}\right\} \div 12$$

$$\rightarrow\ K: \underbrace{21; 22; 23; ...; 50}_{50-20=30 \text{ números}}$$

Finalmente, como K toma 30 valores, al reemplazar estos en $N=12K$, se tendrá 30 números múltiplos de 12.

Cuando nos piden calcular la cantidad de números que son divisibles o múltiplos de un entero positivo, tenemos dos casos particulares:

Caso 1

Cuando se consideran números enteros a partir de la unidad

Aplicación 6

De los 150 primeros números enteros positivos indique lo siguiente:

I. ¿Cuántos números son $\overset{\circ}{8}$?

II. ¿Cuántos números son $\overset{\circ}{\overline{11}}$?

III. ¿Cuántos números son $\overset{\circ}{6}$?

Resolución

I. Sea $A=\overset{\circ}{8}=8K;\ K\in\mathbb{Z}$

Luego,

$$\left.\begin{array}{l}0<8K\leq 150\\ 0<K\leq 18{,}75\end{array}\right\}\div 8$$

$\rightarrow K:①;2;3;...;18$

Como K toma 18 valores, al reemplazar estos en $A=8K$, se tendrá 18 números que son $\overset{\circ}{8}$.

II. Sea $B=\overset{\circ}{\overline{11}}=11m;\ m\in\mathbb{Z}$

Luego,

$$\left.\begin{array}{l}0<11m\leq 150\\ 0<m\leq 13{,}63...\end{array}\right\}\div 11$$

$\rightarrow m:①;2;3;...;13$

Como m toma 13 valores, al reemplazar estos en $B=11m$, se tendrá 13 números que son $\overset{\circ}{\overline{11}}$.

III. Sea $C=\overset{\circ}{6}=6n;\ n\in\mathbb{Z}$

Luego,

$$\left.\begin{array}{l}0<6n\leq 150\\ 0<n\leq 25\end{array}\right\}\div 6$$

$\rightarrow n:①;2;3;...;25$

Como n toma 25 valores, al reemplazar estos en $C=6n$, se tendrá 25 números que son $\overset{\circ}{6}$.

En conclusión, de la aplicación anterior, observamos que, como se consideran los enteros positivos desde el 1, será suficiente dividir el último entero positivo entre el módulo y tomar solo la parte entera del resultado.

Entonces, de los N primeros enteros positivos, ¿cuántos son $\overset{\circ}{a}$?

solo cuando empieza en la unidad

$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ ...;\ N$

$$\left(\begin{array}{c}\text{cantidad}\\ \text{de números}\\ \text{que son } \overset{\circ}{a}\end{array}\right)=\text{parte entera de }\left(\frac{N}{a}\right)$$

Entonces otra forma de resolver la aplicación anterior es la siguiente:

Sean los 150 primeros números enteros positivos: 1; 2; 3; 4; ...; 150

I. $\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{8}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{parte entera}\\ \text{de } \dfrac{150}{8}\end{array}\right)=18$

II. $\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{\overline{11}}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{parte entera}\\ \text{de } \dfrac{150}{11}\end{array}\right)=13$

III. $\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{6}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{parte entera}\\ \text{de } \dfrac{150}{6}\end{array}\right)=25$

Caso 2

Cuando se consideran n números enteros consecutivos y se analizan respecto al módulo n, $(n\in\mathbb{Z}^+)$

Ejemplo

Sean 3 enteros consecutivos analizados respecto al módulo 3.

$$\left.\begin{array}{rrr}\mathbf{6}; & 7; & 8\\ 7; & 8; & \mathbf{9}\\ 8; & \mathbf{9}; & 10\\ -\mathbf{3}; & -2; & -1\\ -2; & -1; & \mathbf{0}\\ -1; & \mathbf{0}; & 1\end{array}\right\}$$

Note que en cada terna de números consecutivos hay un solo número que es $\overset{\circ}{3}$.

Luego,

$$\overset{\circ}{3};\ \overset{\circ}{3}+1;\ \overset{\circ}{3}+2;\ \overset{\circ}{3};\ \overset{\circ}{3}+1;\ \overset{\circ}{3}+2;\ \ldots$$

En cada grupo de tres números enteros consecutivos solo hay uno que es $\overset{\circ}{3}$.

En conclusión, en cada grupo de n números enteros consecutivos, siempre hay solo un número que es $\overset{\circ}{n}$.

Observación

Si la cantidad de números enteros consecutivos es mayor que n pero menor que $2n$, habrá sin duda un número que es $\overset{\circ}{n}$, pero también podría haber uno más.

Ejemplo

Respecto al módulo 3

$\mathbf{15}; 16; 17; \mathbf{18} \rightarrow$ dos números $\overset{\circ}{3}$

$16; 17; \mathbf{18}; 19 \rightarrow$ un número $\overset{\circ}{3}$

$17; \mathbf{18}; 19; 20 \rightarrow$ un número $\overset{\circ}{3}$

$\mathbf{15}; 16; 17; \mathbf{18}; 19 \rightarrow$ dos números $\overset{\circ}{3}$

$16; 17; \mathbf{18}; 19; 20 \rightarrow$ un número $\overset{\circ}{3}$

$17; \mathbf{18}; 19; 20; \mathbf{21} \rightarrow$ dos números $\overset{\circ}{3}$

Aplicación 7

De todos los números de tres cifras, indique lo siguiente:

I. ¿Cuántos números son $\overset{\circ}{9}$?

II. ¿Cuántos números son $\overset{\circ}{\overline{15}}$?

III. ¿Cuántos números son $\overset{\circ}{\overline{11}}$?

Resolución

Tenemos que

$$\overline{abc}: \underbrace{100;\ 101;\ 102;\ 103;\ \ldots;\ 999}_{999-99=900 \text{ números}}$$

I. Observamos que hay 100 grupos de 9 números enteros consecutivos, y en cada uno de ellos solo uno es $\overset{\circ}{9}$; por lo tanto, de todos los números de tres cifras, 100 son $\overset{\circ}{9}$.

Forma práctica

Si la división resulta entera y exacta, se procede del siguiente modo:

$$\frac{900}{9} = 100$$

cantidad de números consecutivos → 900; módulo → 9; 100: cantidad de números que son $\overset{\circ}{9}$

II. La cantidad de números que son $\overset{\circ}{\overline{15}}$ es

$$\frac{900}{15} = 60$$

III. Cantidad de números que son $\overset{\circ}{\overline{11}}$

$$\frac{900}{11} = 81{,}818\ldots$$

Como la división resultó inexacta, entonces no podemos aplicar la forma práctica.

Luego, usaremos la forma general.

Sea $\overline{abc} = \overset{\circ}{\overline{11}} = 11K;\ K \in \mathbb{Z}$

$$100 \leq 11K < 1000$$
$$9{,}09\ldots \leq K < 90{,}909\ldots \quad \Big) \div 11$$

$$\rightarrow K: \underbrace{10;\ 11;\ 12;\ \ldots;\ 90}_{90-9=81 \text{ números}}$$

Por tanto, como K toma 81 valores, al reemplazar estos en $\overline{abc} = 11K$, se tendrá 81 números de tres cifras que son $\overset{\circ}{\overline{11}}$.

4 REPRESENTACIÓN DE LOS NO MÚLTIPLOS DE UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

Cuando un número entero no es divisible por otro entero positivo, es decir, en los casos de que la división resulta inexacta, se trata de los no múltiplos de un número entero positivo.

Evaluemos el siguiente ejemplo de división por defecto y por exceso:

Por defecto	Por exceso
$72 \,\underline{\vert\, 7}$ $r_d=2 \quad 10$	$72 \,\underline{\vert\, 7}$ $r_e=5 \quad 11$
$72=\boxed{7\times 10}+2$ $\downarrow$ $72=\overset{\circ}{7}+2$	$72=\boxed{7\times 11}-5$ $\downarrow$ $72=\overset{\circ}{7}-5$

Observación

$72=\overset{\circ}{7}+2$ si y solo si al dividir 72 entre 7 el residuo es 2.

En la división entera inexacta, se cumple que

$$\boxed{r_d+r_e=d}$$

Mientras que, en la divisibilidad para números no divisibles, se cumple que

$$\boxed{r_d+r_e=\text{módulo}}$$

Ejemplos

- Sea $85=\overset{\circ}{8}+5=\overset{\circ}{8}-3$

  $\rightarrow \underset{r_d}{5}+\underset{r_e}{3}=\underset{\text{módulo}}{8}$

- Sea $69=\overset{\circ}{\overline{13}}+4=\overset{\circ}{\overline{13}}-9$

  $\rightarrow \underset{r_d}{4}+\underset{r_e}{9}=\underset{\text{módulo}}{13}$

- Sea $45=\overset{\circ}{\overline{10}}+5=\overset{\circ}{\overline{10}}-5$

  $\rightarrow \underset{r_d}{5}+\underset{r_e}{5}=\underset{\text{módulo}}{10}$

Conclusión

En general, si A no es divisible por B, entonces

Por defecto	Por exceso
$A \,\underline{\vert\, B}$ $r_d \quad K$	$A \,\underline{\vert\, B}$ $r_e \quad K+1$
$A=\boxed{B(K)}+r_d$ $\downarrow$ $A=\overset{\circ}{B}+r_d$	$A=\boxed{B(K+1)}-r_e$ $\downarrow$ $A=\overset{\circ}{B}-r_e$
$r_d+r_e=B$	

donde

$$\{B;r_d;r_e\}\subset\mathbb{Z}^+ \wedge \{A;K\}\subset\mathbb{Z}$$

Nota

Cuando en un problema nos indiquen, por ejemplo, que al dividir un número de tres cifras entre 11 se obtuvo 8 de residuo o resto, entenderemos que

$$\overline{abc}=\overset{\circ}{\overline{11}}+8 \text{ o } \overline{abc}=\overset{\circ}{\overline{11}}-3$$

Aplicación 8

¿Cuántos números comprendidos entre 240 y 815 dejan residuo 5 al ser divididos entre 13?

Resolución

Sea N uno de los números que nos piden.

$$N=\overset{\circ}{\overline{13}}+5=13K+5;\ K\in\mathbb{Z}$$

Luego,

$$240<13K+5<815 \quad -5$$
$$235<13K<810 \quad \div 13$$
$$18{,}07...<K<62{,}3...$$

$$\rightarrow K:\underbrace{19;20;21;...;62}_{62-18=44 \text{ números}}$$

Finalmente, como K toma 44 valores, al reemplazar estos en $N=13K+5$, se tendrá 44 números que dejan residuo 5 al ser divididos entre 13.

5▸ PRINCIPIOS FUNDAMENTALES DE DIVISIBILIDAD

5.1. RESPECTO A LAS OPERACIONES BÁSICAS CON MÚLTIPLOS DE UN MISMO MÓDULO

5.1.1. Adición y/o sustracción

Veamos las siguientes operaciones:

- $40+24+16=80$

  $\overset{\circ}{8}+\overset{\circ}{8}+\overset{\circ}{8}=\overset{\circ}{8}$

- $40-14=28$

  $\overset{\circ}{7}-\overset{\circ}{7}=\overset{\circ}{7}$

- $65+25-30=60$

  $\overset{\circ}{5}+\overset{\circ}{5}-\overset{\circ}{5}=\overset{\circ}{5}$

En general, sea $n\in\mathbb{Z}^+ \wedge \{K;K_1;K_2;K_3\}\subset\mathbb{Z}$;

si $A_1=\overset{\circ}{n}; A_2=\overset{\circ}{n}; A_3=\overset{\circ}{n}$

$\rightarrow$ $\boxed{A_1+A_2-A_3=\overset{\circ}{n}}$

Demostración

Sea $A_1=\overset{\circ}{n}=nK_1$; $A_2=\overset{\circ}{n}=nK_2$; $A_3=\overset{\circ}{n}=nK_3$

Si se quiere calcular $A_1+A_2-A_3$

$\rightarrow$ $A_1+A_2-A_3$

$nK_1+nK_2-nK_3$

$\therefore\ n\underbrace{(K_1+K_2-K_3)}_{K}=nK=\overset{\circ}{n}$

5.1.2. Multiplicación

Veamos las siguientes operaciones:

- $3(50)=150$

  $3\left(\overset{\circ}{10}\right)=\overset{\circ}{10}$

- $-2(40)=-80$

  $-2\left(\overset{\circ}{8}\right)=\overset{\circ}{8}$

- $0(35)=0$

  $0\left(\overset{\circ}{7}\right)=\overset{\circ}{7}$

En general, si $n\in\mathbb{Z}^+ \wedge \{a;K\}\subset\mathbb{Z}$

$\rightarrow$ $\boxed{a\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}}$

Demostración

$a\overset{\circ}{n}=a(nK)=n\underbrace{(aK)}_{\in\mathbb{Z}}$

$\therefore\ a\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}$

▸▸ Observación

De lo anterior, si $a\in\mathbb{Z}^+$; además $a\overset{\circ}{n}=\overset{\circ}{n}$, entonces se tiene que

- $a\overset{\circ}{n}=a(nK)=\overset{\circ}{a}$
- $a\overset{\circ}{n}=a(nK)=(an)K=\overset{\circ}{\overline{(a\times n)}}$

Ejemplos

$$3\left(\overset{\circ}{7}\right)=\begin{cases}3(7K)=7(3K)=\overset{\circ}{7}\\ 3(7K)=\overset{\circ}{3}\\ (3\times 7)K=\overset{\circ}{\overline{21}}\end{cases}$$

5.1.3. Potenciación

Analicemos los siguientes ejemplos con exponentes enteros positivos:

- $(8)^2=64$

  $\left(\overset{\circ}{4}\right)^2=\overset{\circ}{4}$

- $(10)^3=1000$

  $\left(\overset{\circ}{5}\right)^3=\overset{\circ}{5}$

En general,

si $K \in \mathbb{Z} \wedge \{a; n\} \subset \mathbb{Z}^+$

$$\rightarrow \boxed{\left(\overset{\circ}{n}\right)^a = \overset{\circ}{n}}$$

Demostración

$$\left(\overset{\circ}{n}\right)^a = (nK)^a = n^a \cdot K^a$$

$$\left(\overset{\circ}{n}\right)^a = n\underbrace{(n^{a-1} \times K^a)}_{\in \mathbb{Z}}$$

$$\therefore \left(\overset{\circ}{n}\right)^a = \overset{\circ}{n}$$

Consecuencias

Veamos las consecuencias que se obtienen al aplicar las operaciones básicas con múltiplos de un mismo módulo

- $3\left(\overset{\circ}{5}+2\right) = 3\left(\overset{\circ}{5}\right) + (3)(2)$

$$= \overset{\circ}{5} + 6$$

$$= \overset{\circ}{5} + \left(\overset{\circ}{5}+1\right)$$

$$= \overset{\circ}{5} + 1$$

- $2\left(\overset{\circ}{8}-3\right) = 2\left(\overset{\circ}{8}\right) - (2)(3)$

$$= \overset{\circ}{8} - 6$$

$$= \overset{\circ}{8} + 2$$

- $\left(\overset{\circ}{9}+2\right)\left(\overset{\circ}{9}+3\right) = \left(\overset{\circ}{9}\right)^2 + 3\left(\overset{\circ}{9}\right) + 2\left(\overset{\circ}{9}\right) + (2)(3)$

$$= \underbrace{\overset{\circ}{9} + \overset{\circ}{9} + \overset{\circ}{9}} + (2)(3)$$

$$= \overset{\circ}{9} + (2)(3)$$

- $\left(\overset{\circ}{11}-5\right)\left(\overset{\circ}{11}+2\right) = \left(\overset{\circ}{11}\right)^2 + 2\left(\overset{\circ}{11}\right) - 5\left(\overset{\circ}{11}\right) - (5)(2)$

$$= \underbrace{\overset{\circ}{11} + \overset{\circ}{11} - \overset{\circ}{11}} - (5)(2)$$

$$= \overset{\circ}{11} - (5)(2)$$

- $\left(\overset{\circ}{8}-3\right)\left(\overset{\circ}{8}-2\right) = \left(\overset{\circ}{8}\right)^2 - 2\left(\overset{\circ}{8}\right) - 3\left(\overset{\circ}{8}\right) + (3)(2)$

$$= \underbrace{\overset{\circ}{8} - \overset{\circ}{8} - \overset{\circ}{8}} + (3)(2)$$

$$= \overset{\circ}{8} + (3)(2)$$

De los tres últimos ejemplos, concluimos lo siguiente:

- Todos los factores deben estar en función del mismo módulo.
- El producto también resulta en función del mismo módulo.
- Solo bastará multiplicar los residuos, teniendo en cuenta si los factores están expresados por defecto o por exceso.
- Pueden ser más de dos factores y se cumple lo mismo.

Ejemplos

- $\underbrace{\left(\overset{\circ}{13}+2\right)\left(\overset{\circ}{13}-1\right)}\left(\overset{\circ}{13}+5\right)$

$$\underbrace{\left[\overset{\circ}{13} - (2)(1)\right]\left(\overset{\circ}{13}+5\right)}$$

$$\overset{\circ}{13} - (2)(1)(5)$$

- $\underbrace{\left(\overset{\circ}{15}+3\right)\left(\overset{\circ}{15}+1\right)\left(\overset{\circ}{15}+2\right)}$

$$\overset{\circ}{15} + (3)(1)(2)$$

- $\underbrace{\left(\overset{\circ}{41}+3\right)\left(\overset{\circ}{41}+2\right)\left(\overset{\circ}{41}-5\right)}$

$$\overset{\circ}{41} - (3)(2)(5)$$

En general, sean $r_1; r_2; r_3; \ldots; r_K$ los residuos por defecto o por exceso respecto del módulo n; $n \in \mathbb{Z}^+$, se cumple que

$$\boxed{\begin{aligned}&\left(\overset{\circ}{n} \pm r_1\right)\left(\overset{\circ}{n} \pm r_2\right)\left(\overset{\circ}{n} \pm r_3\right) \times \ldots \times \left(\overset{\circ}{n} \pm r_K\right)\\ &\qquad = \overset{\circ}{n} \pm (r_1)(r_2)(r_3) \times \ldots \times (r_K)\end{aligned}}$$

Caso 1

Veamos qué ocurre cuando todos los residuos son iguales.

Ejemplos

- $\underbrace{(\overset{\circ}{7}+4)(\overset{\circ}{7}+4)(\overset{\circ}{7}+4)\times\ldots\times(\overset{\circ}{7}+4)}_{20\text{ factores}}=\overset{\circ}{7}+\underbrace{4\times4\times4\times\ldots\times4}_{20\text{ factores}}$

  $(\overset{\circ}{7}+4)^{20}=\overset{\circ}{7}+4^{20}$

- $\underbrace{(\overset{\circ}{9}-5)(\overset{\circ}{9}-5)(\overset{\circ}{9}-5)\times\ldots\times(\overset{\circ}{9}-5)}_{24\text{ factores}}=\overset{\circ}{9}+\underbrace{5\times5\times5\times\ldots\times5}_{24\text{ factores}}$

  $(\overset{\circ}{9}-5)^{24}=\overset{\circ}{9}+5^{24}$; exponente par

- $\underbrace{(\overset{\circ}{8}-3)(\overset{\circ}{8}-3)(\overset{\circ}{8}-3)\times\ldots\times(\overset{\circ}{8}-3)}_{25\text{ factores}}=\overset{\circ}{8}-\underbrace{3\times3\times3\times\ldots\times3}_{25\text{ factores}}$

  $(\overset{\circ}{8}-3)^{25}=\overset{\circ}{8}-3^{25}$; exponente impar

En general, cuando los residuos son iguales y se tiene $\{n; r; K\}\subset\mathbb{Z}^+$, se cumple que

$$\boxed{(\overset{\circ}{n}+r)^K=\overset{\circ}{n}+r^K}$$

$$\boxed{(\overset{\circ}{n}-r)^K=\begin{cases}\overset{\circ}{n}+r^K;\ \text{si } K \text{ es par}\\ \overset{\circ}{n}-r^K;\ \text{si } K \text{ es impar}\end{cases}}$$

donde r es el residuo por defecto o por exceso con respecto al módulo n.

Caso 2

Veamos qué ocurre cuando el residuo por defecto o por exceso es 1.

Ejemplos

- $(\overset{\circ}{7}+1)^{34}=\overset{\circ}{7}+1^{34}=\overset{\circ}{7}+1$
- $(\overset{\circ}{8}-1)^{20}=\overset{\circ}{8}+1^{20}=\overset{\circ}{8}+1$
- $(\overset{\circ}{\overline{13}}-1)^{45}=\overset{\circ}{\overline{13}}-1^{45}=\overset{\circ}{\overline{13}}-1$

En general, cuando el residuo es 1, es decir, $r=1$; además, $\{n; K\}\subset\mathbb{Z}^+$, se cumple que

$$\boxed{(\overset{\circ}{n}+1)^K=\overset{\circ}{n}+1^K=\overset{\circ}{n}+1}$$

$$\boxed{(\overset{\circ}{n}-1)^K=\begin{cases}\overset{\circ}{n}+1^K=\overset{\circ}{n}+1;\ \text{si } K \text{ es par}\\ \overset{\circ}{n}-1^K=\overset{\circ}{n}-1;\ \text{si } K \text{ es impar}\end{cases}}$$

Aplicación 9

Calcule el residuo que se obtiene al dividir 4^{68} entre 3.

Resolución

Sea r el residuo.

$\rightarrow\ 4^{68}=\overset{\circ}{3}+r$

$(\overset{\circ}{3}+1)^{68}=\overset{\circ}{3}+r$

$\overset{\circ}{3}+1=\overset{\circ}{3}+r$

$\therefore\ r=1$

Aplicación 10

Calcule el residuo que se obtiene al dividir 7^{45} entre 8.

Resolución

Sea r el residuo.

$\rightarrow\ 7^{45}=\overset{\circ}{8}+r$

$(\overset{\circ}{8}-1)^{45}=\overset{\circ}{8}+r$

$\overset{\circ}{8}-1=\overset{\circ}{8}+r$

$\overset{\circ}{8}+7=\overset{\circ}{8}+r$

$\therefore\ r=7$

Nota

Cuando nos pidan hallar el residuo, entenderemos que se trata del residuo por defecto.

Aplicación 11

Calcule el residuo que se obtiene al dividir 25^{32} entre 7.

Resolución

Sea r el residuo.

$\rightarrow\ 25^{32} = \overset{\circ}{7} + r$

Expresamos la base en función del módulo 7.

$$25 = \overset{\circ}{7} + 4$$

Reemplazamos en la expresión inicial.

$$\left(\overset{\circ}{7}+4\right)^{32} = \overset{\circ}{7} + r$$

$$\overset{\circ}{7} + 4^{32} = \overset{\circ}{7} + r \qquad (*)$$

Falta expresar 4^{32} en función del módulo 7.

Cuando sea posible, busquemos el residuo igual a 1.

$$4^3 = 64 = \overset{\circ}{7} + 1$$

Entonces

$$4^{32} = (4^3)^{10} \times 4^2$$

$$4^{32} = \left(\overset{\circ}{7}+1\right)^{10} \times 16$$

$$4^{32} = \left(\overset{\circ}{7}+1\right)\left(\overset{\circ}{7}+2\right)$$

$$4^{32} = \overset{\circ}{7} + 2$$

Reemplazamos en (*).

$$\overset{\circ}{7} + \left(\overset{\circ}{7}+2\right) = \overset{\circ}{7} + r$$

$$\overset{\circ}{7} + 2 = \overset{\circ}{7} + r$$

$$\therefore\ r = 2$$

Otra forma

Sea r el residuo.

$\rightarrow\ 25^{32} = \overset{\circ}{7} + r$

Hallemos el residuo que se obtiene al dividir la base entre el módulo.

$$25 = \overset{\circ}{7} + 4$$

Luego, se concluye que analizar 25^{32} equivale a analizar 4^{32}.

Reemplazamos en la expresión inicial.

$$4^{32} = \overset{\circ}{7} + r$$

Buscamos residuo igual a 1.

$$4^3 = 64 = \overset{\circ}{7} + 1$$

$$\left(4^3\right)^K = \left(\overset{\circ}{7}+1\right)^K;\ K \in \mathbb{Z}^+$$

$$4^{3K} = \overset{\circ}{7} + 1$$

$\rightarrow\ 4^{\overset{\circ}{3}} = \overset{\circ}{7} + 1$

Luego,

$$4^{32} = 4^{\overset{\circ}{3}+2}$$

$$4^{32} = 4^{\overset{\circ}{3}} \times 4^2$$

$$4^{32} = \left(\overset{\circ}{7}+1\right) \times 4^2$$

$$4^{32} = \overset{\circ}{7} + 4^2$$

Note que solo será necesario analizar 4^2.

$$4^2 = \overset{\circ}{7} + 2$$

$$\therefore\ r = 2$$

Recuerde

Si $a^K = \overset{\circ}{n} + 1$

no negativo

entonces $a^{K} = \overset{\circ}{n} + 1$

donde $\{a; K; n\} \subset \mathbb{Z}^+$

Aplicación 12

Divida los números 3^2; 3^4; 3^6; 5^2; 5^4; 5^6; 7^2; 7^4 entre 8 y halle el residuo.

Resolución

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 3^2 = 9 = \overset{\circ}{8}+1 \\ \bullet\ 3^4 = 81 = \overset{\circ}{8}+1 \\ \bullet\ 3^6 = 729 = \overset{\circ}{8}+1 \end{array}\right\} 3^{\overset{\circ}{2}} = \overset{\circ}{8}+1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 5^2 = 25 = \overset{\circ}{8}+1 \\ \bullet\ 5^4 = 625 = \overset{\circ}{8}+1 \\ \bullet\ 5^6 = 15\,625 = \overset{\circ}{8}+1 \end{array}\right\} 5^{\overset{\circ}{2}} = \overset{\circ}{8}+1$$

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ 7^2 = 49 = \overset{\circ}{8}+1 \\ \bullet\ 7^4 = 2401 = \overset{\circ}{8}+1 \end{array}\right\} 7^{\overset{\circ}{2}} = \overset{\circ}{8}+1$$

Propiedad

Todo número impar elevado a un número par no negativo es $\overset{\circ}{8}+1$.

Demostración

$\forall\, n \in \mathbb{Z}$; $2n+1$ es impar

$$(2n+1)^2 = 4n^2+4n+1$$

$$(2n+1)^2 = 4n(n+1)+1 \qquad (*)$$

Como n y $(n+1)$ son consecutivos, uno de ellos es $\overset{\circ}{2}$.

$\rightarrow\ n(n+1) = \overset{\circ}{2} = 2K;\ K \in \mathbb{Z}$

Reemplazamos en (*).

$$(2n+1)^2 = 4(2K)+1$$

$$(2n+1)^2 = 8K+1 = \overset{\circ}{8}+1$$

no negativo

$$\therefore\ (2n+1)^{\overset{\circ}{2}} = \overset{\circ}{8}+1$$

Ejemplos

- $39^{40} = \overset{\circ}{8}+1$
- $345^{\overline{m6}} = \overset{\circ}{8}+1$
- $\overline{ab3}^{24} = \overset{\circ}{8}+1$
- $\overline{xyz7}^{\overline{mn4}} = \overset{\circ}{8}+1$

Aplicación 13

Halle el residuo que se obtiene al dividir $253^{\overline{ab5}}$ entre 8.

Resolución

Sea r el residuo.

$$\rightarrow\ 253^{\overline{ab5}} = \overset{\circ}{8}+r$$

$$\underbrace{\underbrace{253^{\overline{ab4}}}_{(\overset{\circ}{8}+1)} \times \underbrace{253^{1}}_{(\overset{\circ}{8}+5)}}_{\overset{\circ}{8}+5} = \overset{\circ}{8}+r$$

$$\therefore\ r=5$$

5.2. RESPECTO A LOS DIVISORES DE UN MÓDULO

Analicemos el siguiente ejemplo:

$$60 = \overset{\circ}{\overline{15}}$$

Los divisores de 15 son 1; 3; 5 y 15.

Luego,

$$60 = \begin{cases} \overset{\circ}{1} \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{5} \\ \overset{\circ}{\overline{15}} \end{cases}$$

Por lo tanto, 60 también es múltiplo de los divisores de 15.

En conclusión, si $A = \overset{\circ}{n}$, entonces A es múltiplo de todos los divisores de n.

Demostración

Sea

$$A=\overset{\circ}{n}=nK;\ K\in\mathbb{Z}$$

Además, b es divisor de $n \leftrightarrow n=\overset{\circ}{b}$

$$\rightarrow\ n=\overset{\circ}{b}=bK_1;\ K_1\in\mathbb{Z}$$

Luego,

$$A=nK=(bK_1)K$$

$$A=b(K_1\cdot K);\ (K_1\cdot K)\in\mathbb{Z}$$

$$\therefore\ A=\overset{\circ}{b}$$

Aplicación 14

Si $\overline{abab}_3$ siempre es divisible por n, determine la suma de valores de n.

Resolución

Por dato

$$\overline{abab}_3=\overset{\circ}{n}$$

Descomponemos polinómicamente.

$$\overline{abab}_3=\overline{ab}_3\times 3^2+\overline{ab}_3=\overset{\circ}{n}$$

$$\overline{abab}_3=10\times\overline{ab}_3=\overset{\circ}{\overline{10}}$$

Entonces

$$\overline{abab}_3=\overset{\circ}{\overline{10}}$$

Los divisores de 10 son 1; 2; 5 y 10.

$$\rightarrow\ \overline{abab}_3=\begin{cases}\overset{\circ}{1}\\ \overset{\circ}{2}\\ \overset{\circ}{5}\\ \overset{\circ}{\overline{10}}\end{cases}$$

Finalmente, los valores que toma n son 1; 2; 5 y 10.

$$\therefore\ 1+2+5+10=18$$

5.3. CUANDO UN NÚMERO ES MÚLTIPLO DE VARIOS MÓDULOS

Analicemos los siguientes ejemplos:

- $$A=\begin{cases}\overset{\circ}{4}=4K_1;\ K_1\in\mathbb{Z}\\ \overset{\circ}{6}=6K_2;\ K_2\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\rightarrow\ A=\overbrace{2\times\underbrace{2\times 3}_{6}}^{4}\times K=12K;\ K\in\mathbb{Z}$$

Observe que 12 es el menor número entero positivo que contiene al 4 y al 6, es decir, 12=MCM(4; 6).

$$\therefore\ A=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(4;6)}}=\overset{\circ}{\overline{12}}$$

- $$B=\begin{cases}\overset{\circ}{6}=6K_1;\ K_1\in\mathbb{Z}\\ \overset{\circ}{\overline{10}}=10K_2;\ K_2\in\mathbb{Z}\\ \overset{\circ}{\overline{15}}=15K_3;\ K_3\in\mathbb{Z}\end{cases}$$

$$\rightarrow\ B=\underbrace{\overbrace{3\times 2}^{6}\times\overbrace{2\times 5}^{10}}_{15}\times K=30K;\ K\in\mathbb{Z}$$

Observe que 30 es el menor número entero positivo que contiene al 6; 10 y 15, es decir, 30=MCM(6; 10; 15).

$$\therefore\ B=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(6;10;15)}}=\overset{\circ}{\overline{30}}$$

En general, si un número es múltiplo de varios módulos, entonces dicho número será múltiplo del MCM de dichos módulos.

Ejemplos

- $$48=\begin{cases}\overset{\circ}{6}\\ \overset{\circ}{8}\end{cases}$$

$$\rightarrow\ 48=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(6;8)}}=\overset{\circ}{\overline{24}}$$

- $60 = \begin{cases} \overset{\circ}{6} \\ \overset{\circ}{\overline{10}} \\ \overset{\circ}{\overline{15}} \end{cases}$

$\rightarrow\ 60 = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(6;10;15)}} = \overset{\circ}{\overline{30}}$

Caso particular

Veamos qué ocurre cuando el residuo es diferente de cero.

Ejemplos

- Sea $A = \begin{cases} \overset{\circ}{4}+3 \\ \overset{\circ}{6}+3 \end{cases} \rightarrow A-3 = \begin{cases} \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{6} \end{cases}$

$A-3 = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(4;6)}}$

$\therefore\ A = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(4;6)}}+3$

- Sea $B = \begin{cases} \overset{\circ}{6}+4 \\ \overset{\circ}{\overline{10}}+4 \\ \overset{\circ}{\overline{15}}+4 \end{cases} \rightarrow B-4 \begin{cases} \overset{\circ}{6} \\ \overset{\circ}{\overline{10}} \\ \overset{\circ}{\overline{15}} \end{cases}$

$B-4 = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(6;10;15)}}$

$\therefore\ B = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(6;10;15)}}+4$

- Sea $C = \begin{cases} \overset{\circ}{4}-2 \\ \overset{\circ}{\overline{10}}-2 \end{cases} \rightarrow C+2 = \begin{cases} \overset{\circ}{4} \\ \overset{\circ}{\overline{10}} \end{cases}$

$C+2 = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(4;10)}}$

$\therefore\ C = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(4;10)}}-2$

En conclusión, si un número es múltiplo de varios módulos con un mismo residuo no nulo, entonces dicho número será múltiplo del MCM de dichos módulos más el mismo residuo por defecto o menos el mismo residuo por exceso.

Ejemplos

- Sea $50 = \begin{cases} \overset{\circ}{4}+2 \\ \overset{\circ}{6}+2 \end{cases}$

$\rightarrow\ 50 = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(4;6)}}+2$

$\therefore\ 50 = \overset{\circ}{\overline{12}}+2$

- Sea $63 = \begin{cases} \overset{\circ}{6}+3 \\ \overset{\circ}{\overline{10}}+3 \\ \overset{\circ}{\overline{15}}+3 \end{cases}$

$\rightarrow\ 63 = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(6;10;15)}}+3$

$\therefore\ 63 = \overset{\circ}{\overline{30}}+3$

- Sea $45 = \begin{cases} \overset{\circ}{6}-3 \\ \overset{\circ}{8}-3 \end{cases}$

$\rightarrow\ 45 = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(6;8)}}-3$

$\therefore\ 45 = \overset{\circ}{\overline{24}}-3$

Aplicación 15

¿Cuál es el menor entero positivo de tres cifras que es divisible por 10; 12 y 15?

Resolución

Sea $\overline{abc}$ el número pedido.

$\rightarrow\ \overline{abc} = \begin{cases} \overset{\circ}{\overline{10}} \\ \overset{\circ}{\overline{12}} \\ \overset{\circ}{\overline{15}} \end{cases}$

Luego,

$$\overline{abc} = \overline{\mathrm{MCM}(10;12;15)}^{\circ} = \overline{60}^{\circ} = 60K;\ K \in \mathbb{Z}$$

Como $\overline{abc}$ debe ser el menor posible, entonces $K=2$.

Por lo tanto, el número pedido es

$60(2)=120$

Aplicación 16

¿Cuál es el menor número entero positivo de tres cifras que al ser dividido entre 15 y 18 deja 4 de residuo?

Resolución

Sea $\overline{abc}$ el número pedido.

$$\rightarrow \overline{abc} = \begin{cases} \overline{15}^{\circ}+4 \\ \overline{18}^{\circ}+4 \end{cases}$$

Luego,

$$\overline{abc} = \overline{\mathrm{MCM}(15;18)}^{\circ}+4$$

$$\overline{abc} = \overline{90}^{\circ}+4$$

$$\overline{abc} = 90K+4;\ K \in \mathbb{Z}$$

Como $\overline{abc}$ debe ser el menor posible, entonces $K=2$.

Por lo tanto, el número pedido es

$90(2)+4=184$

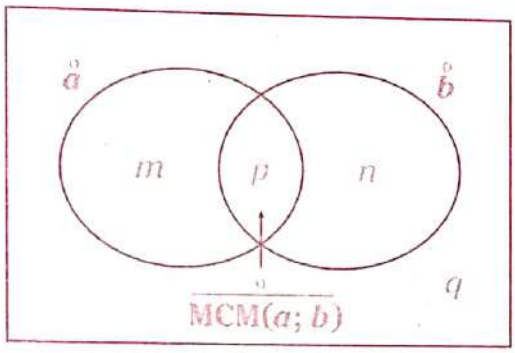
Recomendación

En los problemas que piden, por ejemplo, la cantidad de números enteros positivos que son

- $\overline{10}^{\circ}$ pero no $\overline{12}^{\circ}$
- $\overline{12}^{\circ}$ y $\overline{15}^{\circ}$
- $\overset{\circ}{8}$ o $\overline{10}^{\circ}$

es conveniente usar los diagramas de Venn-Euler.

Ejemplo



En el gráfico se observa que

- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de números} \\ \text{que son } \overset{\circ}{a} \text{ pero no } \overset{\circ}{b}\end{pmatrix} = m$
- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de números} \\ \text{que son } \overset{\circ}{b} \text{ pero no } \overset{\circ}{a}\end{pmatrix} = n$
- $\overset{\circ}{a}$ y $\overset{\circ}{b} <> \overline{\mathrm{MCM}(a;b)}^{\circ}$

  intersección

  $\begin{pmatrix}\text{cantidad de números} \\ \text{que son } \overset{\circ}{a} \text{ y } \overset{\circ}{b}\end{pmatrix} = p$
- $\overset{\circ}{a}$ o $\overset{\circ}{b}$

  unión

  $\begin{pmatrix}\text{cantidad de números} \\ \text{que son } \overset{\circ}{a} \text{ o } \overset{\circ}{b}\end{pmatrix} = m+p+n$
- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de números} \\ \text{que no son } \overset{\circ}{a} \text{ ni } \overset{\circ}{b}\end{pmatrix} = q$

Aplicación 17

De los 400 primeros números naturales halle lo siguiente:

I. ¿Cuántos son $\overset{\circ}{6}$ y $\overset{\circ}{8}$?

II. ¿Cuántos son $\overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{8}$?

III. ¿Cuántos son $\overset{\circ}{6}$ o $\overset{\circ}{8}$?

IV. ¿Cuántos no son $\overset{\circ}{6}$ ni $\overset{\circ}{8}$?

Resolución

Sean los 400 primeros números enteros:

1; 2; 3; 4; ...; 400

Luego, calculamos por separado lo siguiente:

- $\frac{400}{6} = 66,66...$

  Es decir, hay 66 números $\overset{\circ}{6}$.

- $\frac{400}{8} = 50$

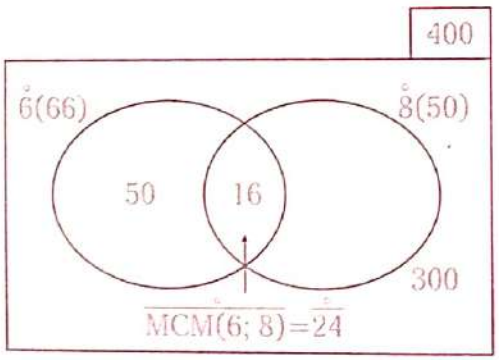
  Es decir, hay 50 números $\overset{\circ}{8}$.

- $\overset{\circ}{6}$ y $\overset{\circ}{8} <> \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(6; 8)}} = \overset{\circ}{\overline{24}}$

  $\frac{400}{24} = 16,66...$

  Es decir, hay 16 números $\overset{\circ}{\overline{24}}$.

Usaremos el siguiente diagrama:



Finalmente, respondemos según los datos observados en el gráfico.

I. Hay 16 números que son $\overset{\circ}{6}$ y $\overset{\circ}{8}$.

II. Hay 50 números que son $\overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{8}$.

III. Hay 100 números que son $\overset{\circ}{6}$ o $\overset{\circ}{8}$.

IV. Hay 300 números que no son $\overset{\circ}{6}$ ni $\overset{\circ}{8}$.

Aplicación 18

¿Cuántos números enteros positivos menores o iguales a 300 son divisibles por 4 pero no por 8?

Resolución

Sean los 300 primeros números enteros:

1; 2; 3; 4; ...; 300

Luego, calculamos por separado lo siguiente:

- $\frac{300}{4} = 75$

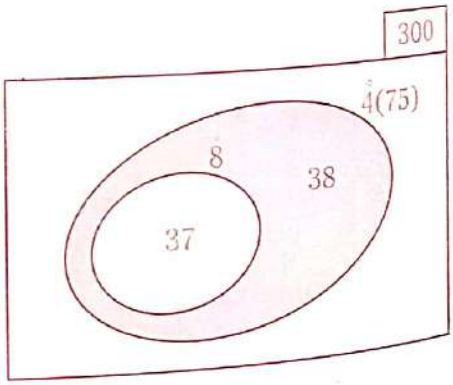
  Es decir, hay 75 números $\overset{\circ}{4}$.

- $\frac{300}{8} = 37,5$

  Es decir, hay 37 números $\overset{\circ}{8}$.

En este caso hay inclusión, ya que todo número $\overset{\circ}{8}$ también es $\overset{\circ}{4}$.

Luego, tenemos el siguiente gráfico:



Por lo tanto, hay 38 números enteros positivos menores o iguales a 300 que son divisibles por 4 pero no por 8.

5.4. RESPECTO A MÚLTIPLOS DE ALGUNA POTENCIA DE LA BASE DE UN NÚMERO

Analicemos los siguientes ejemplos

- $\overline{abc3} = \overline{abc} \times 10 + 3 = \overset{\circ}{\overline{10}} + 3$
- $\overline{mn2}_7 = \overline{mn}_7 \times 7 + 2 = \overset{\circ}{7} + 2$

- $\overline{ab14} = \overline{ab} \times 10^2 + 14 = \overline{(\overset{\circ}{10^2})} + 14$
- $\overline{xyz31}_5 = \overline{xyz}_5 \times 5^2 + 31_5 = \overline{(\overset{\circ}{5^2})} + 31_5$
- $\overline{ab207} = \overline{ab} \times 10^3 + 207 = \overline{(\overset{\circ}{10^3})} + 207$
- $\overline{mn132}_4 = \overline{mn}_4 \times 4^3 + 132_4 = \overline{(\overset{\circ}{4^3})} + 132_4$

En conclusión, todo numeral es múltiplo de su base elevado a un exponente entero positivo K más el numeral formado por sus K últimas cifras en su misma base.

Aplicación 19

Sea $N = \overline{ab1}_{16} \times \overline{mn13}_4 + \overline{cd1001}_2$. Halle el residuo que se obtiene al dividir N entre 16.

Resolución

Expresemos cada numeral en función de $\overset{\circ}{\overline{16}}$.

- $\overline{ab1}_{16} = \overset{\circ}{\overline{16}} + 1$
- $\overline{mn13}_4 = \overline{(\overset{\circ}{4^2})} + 13_4 = \overset{\circ}{\overline{16}} + 7$
- $\overline{cd1001}_2 = \overline{(\overset{\circ}{2^4})} + 1001_2 = \overset{\circ}{\overline{16}} + 9$

Reemplazamos en N.

$$N = \underbrace{\left(\overset{\circ}{\overline{16}} + 1\right)\left(\overset{\circ}{\overline{16}} + 7\right)} + \left(\overset{\circ}{\overline{16}} + 9\right)$$

$$N = \overset{\circ}{\overline{16}} + 7 + \overset{\circ}{\overline{16}} + 9$$

$$N = \overset{\circ}{\overline{16}} + 16$$

$$N = \overset{\circ}{\overline{16}}$$

Por lo tanto, el residuo es cero.

5.5. PRINCIPIO DE ARQUÍMEDES

Analicemos el siguiente ejemplo:

$$4B = \overset{\circ}{9}$$

$$\rightarrow 4B = 9K;\ K \in \mathbb{Z}$$

Luego,

$$\frac{4B}{9} = \frac{9K}{9}$$

$$\frac{4B}{9} = K$$

Como 4 y 9 tienen como único divisor común a la unidad, entonces 9 divide a B.

$$\therefore\ B = \overset{\circ}{9}$$

En general, sean $n \in \mathbb{Z}^+ \wedge \{A; B; K\} \subset \mathbb{Z}$; si

$$A \times B = \overset{\circ}{n}$$

donde A y n tienen como único divisor común a la unidad, entonces se cumple que

$$\boxed{B = \overset{\circ}{n}}$$

Demostración

Sea $A \times B = \overset{\circ}{n}$

$$\rightarrow A \times B = nK;\ K \in \mathbb{Z}$$

Luego,

$$\frac{A \times B}{n} = \frac{nK}{n}$$

$$K = \frac{A \times B}{n}$$

Como n no divide a A, entonces n divide a B.

$$\therefore\ B = \overset{\circ}{n}$$

Ejemplos

- $\underbrace{4N = \overset{\circ}{9}}_{*} \rightarrow N = \overset{\circ}{9}$
- $\underbrace{13P = \overset{\circ}{6}}_{*} \rightarrow P = \overset{\circ}{6}$
- $\underbrace{7Q = \overset{\circ}{\overline{11}}}_{*} \rightarrow Q = \overset{\circ}{\overline{11}}$

* El único divisor común que comparten es la unidad, es decir, no se pueden simplificar.

5.5.1. Casos particulares

Caso 1

Cuando un factor y el módulo tienen divisores en común, además de la unidad.

Ejemplos

- $6A = \overset{\circ}{\overline{10}}$

  $6A = 10K;\ K \in \mathbb{Z}$

  $3A = 5K$

  $\underbrace{3A = \overset{\circ}{5}}_{*} \rightarrow A = \overset{\circ}{5}$

  En forma práctica, se simplifica directamente.

  $\cancel{6}A = \overset{\circ}{\overline{\cancel{10}}}$

  $\underbrace{3A = \overset{\circ}{5}}_{*} \rightarrow A = \overset{\circ}{5}$

- $10B = \overset{\circ}{\overline{15}}$

  $10B = 15K;\ K \in \mathbb{Z}$

  $2B = 3K$

  $\underbrace{2B = \overset{\circ}{3}}_{*} \rightarrow B = \overset{\circ}{3}$

  En forma práctica, se simplifica directamente.

  $\cancel{10}B = \overset{\circ}{\overline{\cancel{15}}}$

  $\underbrace{2B = \overset{\circ}{3}}_{*} \rightarrow B = \overset{\circ}{3}$

- $\cancel{12}C = \overset{\circ}{\overline{\cancel{21}}}$

  $\underbrace{4C = \overset{\circ}{7}}_{*} \rightarrow C = \overset{\circ}{7}$

- $\cancel{35}D = \overset{\circ}{\overline{\cancel{77}}}$

  $\underbrace{5D = \overset{\circ}{\overline{11}}}_{*} \rightarrow D = \overset{\circ}{\overline{11}}$

Caso 2

Cuando un factor y el residuo tienen divisor en común, además de la unidad, pero el m dulo no.

Ejemplos

- $4A = \overset{\circ}{\overline{13}} + 8$

  $4A - 8 = \overset{\circ}{\overline{13}}$

  $\underbrace{4(A-2) = \overset{\circ}{\overline{13}}}_{*}$

  $\rightarrow A - 2 = \overset{\circ}{\overline{13}}$

  $\therefore\ A = \overset{\circ}{\overline{13}} + 2$

  En forma práctica, se simplifica direct mente dicho factor y el residuo.

  $\cancel{4}A = \overset{\circ}{\overline{13}} + \cancel{8}$

  $\therefore\ A = \overset{\circ}{\overline{13}} + 2$

- $3B = \overset{\circ}{\overline{17}} + 15$

  $3B - 15 = \overset{\circ}{\overline{17}}$

  $\underbrace{3(B-5) = \overset{\circ}{\overline{17}}}_{*}$

  $\rightarrow B - 5 = \overset{\circ}{\overline{17}}$

  $\therefore\ B = \overset{\circ}{\overline{17}} + 5$

  En forma práctica, se simplifica direc mente dicho factor y el residuo.

  $\cancel{3}B = \overset{\circ}{\overline{17}} + \cancel{15}$

  $\therefore\ B = \overset{\circ}{\overline{17}} + 5$

- $\cancel{5}C = \overset{\circ}{\overline{11}} + \cancel{10}$

  $\therefore\ C = \overset{\circ}{\overline{11}} + 2$

Caso 3

Cuando un factor, el módulo y el residuo tienen divisores en común, además de la unidad.

Ejemplos

- $3A = \overset{\circ}{\overline{15}} + 12$

  $3A - 12 = \overset{\circ}{\overline{15}}$

  $3(A-4) = \overset{\circ}{\overline{15}}$

  $A - 4 = \overset{\circ}{5}$

  $\therefore\ A = \overset{\circ}{5} + 4$

  En forma práctica, se simplifica directamente.

  $\cancel{3}A = \overset{\circ}{\overline{\cancel{15}}} + \cancel{12}$

  $\therefore\ A = \overset{\circ}{5} + 4$

- $4B = \overset{\circ}{\overline{28}} + 20$

  $4B - 20 = \overset{\circ}{\overline{28}}$

  $4(B-5) = \overset{\circ}{\overline{28}}$

  $B - 5 = \overset{\circ}{7}$

  $\therefore\ B = \overset{\circ}{7} + 5$

  En forma práctica, se simplifica directamente.

  $\cancel{4}B = \overset{\circ}{\overline{\cancel{28}}} + \cancel{20}$

  $\therefore\ B = \overset{\circ}{7} + 5$

- $\cancel{5}C = \overset{\circ}{\overline{\cancel{20}}} + \cancel{15}$

  $\therefore\ C = \overset{\circ}{4} + 3$

Importante

Si aun pudiendo no se simplifica el módulo, entonces se pierden soluciones.

Caso 4

Cuando un factor y el residuo no tienen divisores comunes a parte de la unidad.

Ejemplos

- $7A = \overset{\circ}{\overline{11}} + 6$

  A 6 le sumaremos o restaremos el menor número $\overset{\circ}{\overline{11}}$ para que tenga séptima.

  $7A = \overset{\circ}{\overline{11}} + 6 + 22$

  $7A = \overset{\circ}{\overline{11}} + 28$

  $\therefore\ A = \overset{\circ}{\overline{11}} + 4$

- $5B = \overset{\circ}{\overline{13}} + 1$

  A 1 le sumaremos o restaremos el menor número $\overset{\circ}{\overline{13}}$ para que tenga quinta.

  $5B = \overset{\circ}{\overline{13}} + 1 + 39$

  $5B = \overset{\circ}{\overline{13}} + 40$

  $\therefore\ B = \overset{\circ}{\overline{13}} + 8$

Nota

Al resolver un problema de divisibilidad, es conveniente observar el número expresado por defecto y por exceso.

Ejemplos

- $3A = \overset{\circ}{\overline{13}} + 7$

  $3A = \overset{\circ}{\overline{13}} - 6$

  $\rightarrow\ A = \overset{\circ}{\overline{13}} - 2 = \overset{\circ}{\overline{13}} + 11$

- $7B = \overset{\circ}{\overline{31}} - 10$

  $7B = \overset{\circ}{\overline{31}} + 21$

  $\rightarrow\ B = \overset{\circ}{\overline{31}} + 3$

Aplicación 20

Determine el mayor valor de $\overline{ab}$ que cumpla

$$2\overline{ab}+7\overline{ab}+12\overline{ab}=\overline{133}^{\circ}$$

Resolución

A partir del dato

$$2\overline{ab}+7\overline{ab}+12\overline{ab}=\overline{133}^{\circ}$$

$$21\overline{ab}=\overline{133}^{\circ} \quad \div 7$$

$$3\overline{ab}=\overline{19}^{\circ}$$

Por el principio de Arquímedes

$$\overline{ab}=\overline{19}^{\circ}$$

Por lo tanto, el mayor valor de $\overline{ab}$ es

$$19\times 5=95$$

6▸ ECUACIONES DIOFÁNTICAS LINEALES

Llamadas así en honor al matemático griego Diofanto, quien fue el primero en estudiar dichas ecuaciones de manera extensiva.

Se denomina ecuación diofántica lineal en dos variables $(x;\ y)$ si la ecuación lineal tiene la forma

$$Ax+By=C$$

donde

- $\{A;B;C;x;y\}\subset\mathbb{Z}$
- $AB\neq 0$

▸▸ Observación

La condición necesaria y suficiente para que una ecuación diofántica lineal tenga solución es que

$$C=\overline{\mathrm{MCD}(A;B)}^{\circ}$$

Ejemplos

- $10x+15y=78;\ \{x;y\}\subset\mathbb{Z}$

  $\rightarrow\ 78\neq\overline{\mathrm{MCD}(10;15)}^{\circ}=\overline{5}^{\circ}$

  Por lo tanto, no tiene solución.

- $30x+18y=186;\ \{x;y\}\subset\mathbb{Z}$

  $\rightarrow\ 186=\overline{\mathrm{MCD}(30;18)}^{\circ}=\overline{6}^{\circ}$

  Por lo tanto, sí tiene solución.

  Luego, dividimos 30; 18 y 186 entre el MCD(30; 18) y obtenemos

  $$5x+3y=31 \qquad (*)$$

  Convenientemente expresamos todos los términos en función de múltiplos del menor coeficiente, es decir, en función de $\overline{3}^{\circ}$.

  $$(\overline{3}^{\circ}+2)x+\overline{3}^{\circ}y=\overline{3}^{\circ}+1$$

  $$\overline{3}^{\circ}+2x+\overline{3}^{\circ}=\overline{3}^{\circ}+1$$

  $$2x=\overline{3}^{\circ}+1=\overline{3}^{\circ}-2$$

  $$x=\overline{3}^{\circ}-1=\overline{3}^{\circ}+2$$

  $\rightarrow\ x=3K+2;\ K\in\mathbb{Z}$

  Reemplazamos x en (*).

  $$5(3K+2)+3y=31$$

  $$15K+10+3y=31$$

  $$3y=21-15K$$

  $\rightarrow\ y=7-5K$

  Luego,

  $$\left.\begin{array}{l} x=3K+2 \\ y=7-5K \end{array}\right\} K\in\mathbb{Z}$$

  Para determinar todas las soluciones posibles, basta dar valores a K.

K	...	−2	−1	0	1	2	...
x	...	−4	−1	2	5	8	...
y	...	17	12	7	2	−3	...

Observación

Tenga en cuenta lo siguiente:

- Una ecuación diofántica lineal tiene infinitas soluciones.
- En los problemas que resolveremos, las variables tendrán ciertas restricciones, por lo que tomaremos una solución particular.
- Las ecuaciones diofánticas pueden ser de más de dos variables e inclusive mayores que el primer grado.

A continuación veremos una forma práctica de resolver las ecuaciones diofánticas lineales:

Ejemplos

- $5a+3b=31;\ \{a;b\}\subset\mathbb{Z}$

  Para hallar a, eliminamos b, expresando todo en función de $\overset{\circ}{3}$ y llevándolos a la derecha de la igualdad.

  $$\underbrace{5a+2a+3b=30}_{\overset{\circ}{3}}+1$$

  $\rightarrow\ \cancel{2}a=\overset{\circ}{3}+1=\overset{\circ}{3}-\cancel{2}$

  $\therefore\ a=\overset{\circ}{3}-1=\overset{\circ}{3}+2$

  Nuevamente, nos fijamos en la ecuación $5a+3b=31$.

  Para hallar b, eliminamos a, expresando todo en función de $\overset{\circ}{5}$ y llevándolos a la derecha de la igualdad.

  $$\underbrace{5a+3b=30}_{\overset{\circ}{5}}+1$$

  $3b=\overset{\circ}{5}+1$

  $\rightarrow\ 3b=\overset{\circ}{5}+1+5$

  $\cancel{3}b=\overset{\circ}{5}+\cancel{6}$

  $\therefore\ b=\overset{\circ}{5}+2$

- $15a+21b+35c=607\ ;\ \{a;b;c\}\subset\mathbb{Z}$

  Para hallar a, eliminamos b y c expresando todos los términos en función de $\overset{\circ}{7}$.

  $$15a+\underbrace{21b+35c}_{\overset{\circ}{7}}=607$$

  $$a+\underbrace{14a+21b+35c}_{\overset{\circ}{7}}=\underbrace{607}_{\overset{\circ}{7}+5}$$

  $\therefore\ a=\overset{\circ}{7}+5$

  Para hallar b, eliminamos a y c expresando todos los términos en función de $\overset{\circ}{5}$.

  $$\underbrace{15a+21b+35c}_{\overset{\circ}{5}}=607$$

  $$\underbrace{15a+b+20b+35c}_{\overset{\circ}{5}}=\underbrace{607}_{\overset{\circ}{5}+2}$$

  $\therefore\ b=\overset{\circ}{5}+2$

  Para hallar c, eliminamos a y b expresando todos los términos en función de $\overset{\circ}{3}$.

  $$\underbrace{15a+21b}_{\overset{\circ}{3}}+35c=607$$

  $$\underbrace{15a+21b+2c+33c}_{\overset{\circ}{3}}=\underbrace{607}_{\overset{\circ}{3}+1}$$

  $\cancel{2}c=\overset{\circ}{3}+1=\overset{\circ}{3}-\cancel{2}$

  $\therefore\ c=\overset{\circ}{3}-1$

Aplicación 21

Andrés invertirá S/530 en la compra de balones de fútbol de dos tipos, cuyos costos por unidad son S/70 y S/30, respectivamente. ¿Cuántas opciones tiene Andrés para realizar su compra?

Resolución

Esquematizamos.

Tipo de balón	I	II
Cantidad	a	b
Costo unitario (S/)	70	30

Tenemos que

$$70a+30b=530$$

$$7a+3b=53 \qquad (*)$$

Expresamos todo en función de $\overset{\circ}{3}$.

$$a+\underbrace{6a+3b}_{\overset{\circ}{3}}=51+2$$

$$a=\overset{\circ}{3}+2$$

Reemplazamos en (*).

$$7a+3b=53$$

$$\begin{array}{ll} \downarrow & \uparrow \\ 2 \rightarrow & 13 \\ 5 \rightarrow & 6 \end{array}$$

Por lo tanto, Andrés tiene 2 opciones de compra de balones.

7▸ CONGRUENCIAS

Se debe tener en cuenta que la teoría de la divisibilidad tiene como base la teoría de las congruencias; sin embargo, su desarrollo no está contemplado en este capítulo, así que solo haremos una breve mención al respecto.

7.1. DEFINICIÓN

Si A y B son dos números enteros y n es un entero positivo, se dice que A y B son congruentes respecto al módulo n si y solo si n divide a $(A-B)$.

Notación

$$A\equiv B(\text{mód } n) \leftrightarrow n|(A-B)$$

Teorema

Dos números enteros, A y B, son congruentes respecto al módulo n si y solo si dejan el mismo residuo al ser divididos entre n.

Notación

$$A\equiv B(\text{mód } n)$$

Demostración

Sea $A\equiv B(\text{mód } n) \leftrightarrow \left[A=\overset{\circ}{n}+r \ \wedge \ B=\overset{\circ}{n}+r\right]$

I. $A\equiv B(\text{mód } n) \rightarrow \left[A=\overset{\circ}{n}+r \ \wedge \ B=\overset{\circ}{n}+r\right]$

$A\equiv B$ (mód n), es decir

$$A-B=\overset{\circ}{n}=nK;\ K\in\mathbb{Z}$$

Sea r el residuo de dividir B entre n.

$$B=\overset{\circ}{n}+r;\ 0\leq r<n$$

$$B=nK_1+r;\ K_1\in\mathbb{Z}$$

Luego,

$$A=B+nK$$

$$A=(nK_1+r)+nK$$

$$A=n(K_1+K)+r;\ (K_1+K)\in\mathbb{Z}$$

$$A=\overset{\circ}{n}+r$$

$$\therefore\ A=\overset{\circ}{n}+r \ \wedge \ B=\overset{\circ}{n}+r$$

II. $\left[A=\overset{\circ}{n}+r \ \wedge \ B=\overset{\circ}{n}+r\right] \rightarrow A\equiv B(\text{mód } n)$

$$\left.\begin{array}{l} A=\overset{\circ}{n}+r \\ \underline{B=\overset{\circ}{n}+r} \end{array}\right\} \begin{array}{l} r\in\mathbb{Z} \\ 0\leq r<n \end{array}$$

$$A-B=\overset{\circ}{n}$$

$$\therefore\ A\equiv B \text{ (mód } n)$$

Ejemplos

- $24\equiv 10$ (mód 7)

  Por definición

  $$\begin{cases} 7\,|\,(24-10) \\ 7 \text{ divide a } 14 \\ 14=\overset{\circ}{7} \end{cases}$$

  Por el teorema

  $$\begin{cases} 24=\overset{\circ}{7}+3 \\ 10=\overset{\circ}{7}+3 \end{cases}$$

- $10 \equiv -8$ (mód 3)

  Por definición

$$\begin{cases} 3 \mid [10-(-8)] \\ 3 \text{ divide a } 18 \\ 18 = \overset{\circ}{3} \end{cases}$$

  Por el teorema

$$\begin{cases} 10 = \overset{\circ}{3}+1 \\ -8 = \overset{\circ}{3}+1 \end{cases}$$

Aplicación 22

Si $101 \equiv 89$ (mód n), ¿cuántos valores toma n?

Resolución

Como $101 \equiv 89$ (mód n), entonces n divide a

$101-89=12$

Luego,

n: 1; 2; 3; 4; 6; 12

Por lo tanto, n toma 6 valores.

8 Restos potenciales

Sea

$$\underset{\text{potencia}}{a^K} = \overset{\circ}{n} + \underset{\text{residuo o resto}}{r}$$

donde

- $\{a; n; r\} \subset \mathbb{Z}^+$
- $K \in \mathbb{Z}_0^+$
- $0 < r < n$

Se cumple que los restos que se obtienen al dividir las sucesivas potencias de a^0; a^1; a^2; a^3; ..., entre n se denominan restos potenciales de a respecto al módulo n.

Ejemplos

a. Los restos potenciales de 7 respecto al módulo 9 se observan en la siguiente tabla:

Potencias de 7	En función del módulo 9	Restos potenciales	
7^0	$\overset{\circ}{9}+1$	1	
7^1	$\overset{\circ}{9}+7$	7	$g=3$
7^2	$\overset{\circ}{9}+4$	4	
7^3	$\overset{\circ}{9}+1$	1	
7^4	$\overset{\circ}{9}+7$	7	$g=3$
7^5	$\overset{\circ}{9}+4$	4	
7^6	$\overset{\circ}{9}+1$	1	
7^7	$\overset{\circ}{9}+7$	7	$g=3$
7^8	$\overset{\circ}{9}+4$	4	
7^9	$\overset{\circ}{9}+1$	1	
⋮	⋮	⋮	

Observación

1. La cantidad de residuos o restos que se repiten periódicamente se denomina gaussiano (g).
2. A partir de 7^1 obtenemos los otros residuos de la siguiente manera:

- $7^2 = 7^1 \times 7^1 = (\overset{\circ}{9}+7)(\overset{\circ}{9}+7)$

  $7^2 = \overset{\circ}{9}+7\times 7$

  $7^2 = \overset{\circ}{9}+4$

- $7^3 = 7^1 \times 7^2 = (\overset{\circ}{9}+7)(\overset{\circ}{9}+4)$

  $7^3 = \overset{\circ}{9}+7\times 4$

  $7^3 = \overset{\circ}{9}+1$

- $7^4 = 7^1 \times 7^3 = (\overset{\circ}{9}+7)(\overset{\circ}{9}+1)$

  $7^4 = \overset{\circ}{9}+7\times 1$

  $7^4 = \overset{\circ}{9}+7$

- $7^5 = 7^1 \times 7^4 = (\overset{\circ}{9}+7)(\overset{\circ}{9}+7)$

  $7^5 = \overset{\circ}{9}+7\times 7$

  $7^5 = \overset{\circ}{9}+4$

  ⋮ ⋮

Por lo tanto, solo será necesario multiplicar los residuos.

Luego expresamos los exponentes en función del múltiplo del gaussiano y los relacionamos con sus respectivos residuos.

Exponente $f(3)$	Residuo
$\overset{\circ}{3}$	1
$\overset{\circ}{3}+1$	7
$\overset{\circ}{3}+2$	4

Conociendo el exponente, hallamos el residuo.

Sea $7^{152}=\overset{\circ}{9}+r$

Como $152=\overset{\circ}{3}+2 \quad \rightarrow r=4$

Conociendo el residuo, hallamos el exponente.

Sea $7^{\overline{4a}}=\overset{\circ}{9}+7$

Como $r=7$

$\rightarrow \overline{4a}=\overset{\circ}{3}+1 \quad \rightarrow a$: 0; 3; 6; 9

b. Los restos potenciales de 3 respecto al módulo 5 se observan en la siguiente tabla:

Potencias de 3	En función del módulo 5	Restos potenciales
3^0	$\overset{\circ}{5}+1$	1
3^1	$\overset{\circ}{5}+3$	3
3^2	$\overset{\circ}{5}+4$	4 $\}\ g=4$
3^3	$\overset{\circ}{5}+2$	2
3^4	$\overset{\circ}{5}+1$	1
3^5	$\overset{\circ}{5}+3$	3
3^6	$\overset{\circ}{5}+4$	4 $\}\ g=4$
3^7	$\overset{\circ}{5}+2$	2
3^8	$\overset{\circ}{5}+1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Luego expresamos los exponentes en función del múltiplo del gaussiano y los relacionamos con sus respectivos residuos.

Exponente $f(4)$	Residuo
$\overset{\circ}{4}$	1
$\overset{\circ}{4}+1$	3
$\overset{\circ}{4}+2$	4
$\overset{\circ}{4}+3$	2

c. Los restos potenciales de 8 respecto al módulo 5 se observan en la siguiente tabla:

Potencias de 8	En función del módulo 5	Restos potenciales
8^0	$\overset{\circ}{5}+1$	1
8^1	$\overset{\circ}{5}+3$	3
8^2	$\overset{\circ}{5}+4$	4 $\}\ g=4$
8^3	$\overset{\circ}{5}+2$	2
8^4	$\overset{\circ}{5}+1$	1
8^5	$\overset{\circ}{5}+3$	3
8^6	$\overset{\circ}{5}+4$	4 $\}\ g=4$
8^7	$\overset{\circ}{5}+2$	2
8^8	$\overset{\circ}{5}+1$	1
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

Luego expresamos los exponentes en función del múltiplo del gaussiano y los relacionamos con sus respectivos residuos.

Exponente $f(4)$	Residuo
$\overset{\circ}{4}$	1
$\overset{\circ}{4}+1$	3
$\overset{\circ}{4}+2$	4
$\overset{\circ}{4}+3$	2

Observaciones

Estamos analizando

$$a^K = \overset{\circ}{n} + r$$

1. Como vemos en los ejemplos b y c, los restos potenciales de 3 y 8, respecto al módulo 5, son los mismos, ya que $3 \equiv 8$ (mód 5).

   En general, si $a > n$ y R es el residuo de dividir a entre n, entonces

$$\boxed{\begin{array}{l} a \equiv R \text{ (mód } n) \\ a^K \equiv R^K \text{ (mód } n);\ K \in \mathbb{Z}_0^+ \end{array}}$$

   Entonces los restos potenciales de a y R, respecto al módulo n, son los mismos.

   Por lo tanto, será conveniente trabajar con R; $(R < n)$.

   Ejemplo

   Se tiene $25 \equiv 4$ (mód 7)

   Entonces los restos potenciales de 25 y 4 respecto al módulo 7 son los mismos.

   Por lo tanto, será conveniente trabajar con las potencias de 4.

2. Al analizar los restos potenciales, se pueden presentar los siguientes casos:

   Caso 1

   Cuando a y n tienen como único divisor común a la unidad.

   Ejemplo

   Sean los restos potenciales de 4 respecto al módulo 9

$$\begin{array}{lccccc} & 4^0 & \boxed{4^1} & 4^2 & 4^3 & \ldots \\ \text{mód (9)} & & & & & \\ \text{residuos} & 1 & \boxed{4} & 7 & 1 & \ldots \\ & & \underbrace{\qquad\qquad}_{g=3} & & & \end{array}$$

   De donde obtenemos que

Exponente: $f(\overset{\circ}{3})$	Residuo
$\overset{\circ}{3}$	1
$\overset{\circ}{3}+1$	4
$\overset{\circ}{3}+2$	7

   Caso 2

   Cuando a y n comparten algunos divisores primos comunes, pero no todos.

   Ejemplos

   - Sean los restos potenciales de 4 respecto al módulo 6

$$\begin{array}{lccccc} & 4^0 & 4^1 & 4^2 & 4^3 & \ldots \\ \text{mód (6)} & & & & & \\ \text{residuos} & 1 & \underbrace{4}_{g=1} & 4 & 4 & \ldots \end{array}$$

   de donde se obtiene que

$$4^K = \overset{\circ}{6} + 4;\ \forall K \in \mathbb{Z}^+$$

   - Sean los restos potenciales de 9 respecto al módulo 15

$$\begin{array}{lcccccc} & 9^0 & \boxed{9^1} & 9^2 & 9^3 & 9^4 & \ldots \\ \text{mód (15)} & & & & & & \\ \text{residuos} & 1 & \boxed{9} & 6 & 9 & 6 & \ldots \\ & & \underbrace{\qquad\qquad}_{g=2} & & & & \end{array}$$

   de donde se obtiene que

$$9^K = \begin{cases} \overset{\circ}{\overline{15}} + 9;\ K \text{ es impar} \\ \overset{\circ}{\overline{15}} + 6,\ K \text{ es par } \wedge\ K > 0 \end{cases}$$

▸▸ Observación

En este caso sí hay gaussiano, pero los restos potenciales no empiezan a repetirse desde el principio.

Caso 3

Cuando a y n comparten todos los divisores primos.

Ejemplo

Sean los restos potenciales de 12 con respecto al módulo 18

	12^0	12^1	12^2	12^3	12^4	...
mód (18) residuos	1	12	0	0	0	...

de donde se obtiene que

$12^K = \overset{\circ}{\overline{18}};\ K \in \mathbb{Z}^+ \wedge K > 1$

> **Observación**
> En este caso, no existe gaussiano, ya que a partir de un determinado valor de K se cumple que $a^K = n$, es decir, el residuo será cero.

Aplicación 23

Halle la suma de valores de a si

$35^{\overline{4a}} = \overset{\circ}{\overline{16}} + 11$

Resolución

Expresamos la base de la potencia en función de $\overset{\circ}{\overline{16}}$.

$35 = \overset{\circ}{\overline{16}} + 3$

$\rightarrow\ 35 \equiv 3$ (mód 16)

Entonces los restos potenciales de 35 y 3, respecto al módulo 16, son los mismos.

Por lo tanto, será conveniente trabajar con las potencias de 3.

	3^0	$\boxed{3^1}$	3^2	3^3	3^4	...
mód (16) residuos	1	$\boxed{3}$	9	11	1	...

$g = 4$

Sabemos que el residuo es 11, entonces el exponente

$\overline{4a} = \overset{\circ}{4} + 3 \quad \rightarrow \quad a: 3; 7$

Por lo tanto, la suma de valores de a es 10.

Otra forma

En $35^{\overline{4a}} = \overset{\circ}{\overline{16}} + 11$

$\left(\overset{\circ}{\overline{16}} + 3\right)^{\overline{4a}} = \overset{\circ}{\overline{16}} + 11$

$\overset{\circ}{\overline{16}} + 3^{\overline{4a}} = \overset{\circ}{\overline{16}} + 11$

$\rightarrow\ 3^{\overline{4a}} = \overset{\circ}{\overline{16}} + 11$

Luego, buscamos los restos potenciales de 3 con respecto al módulo 16, como en la primera forma.

> **Nota**
> Los restos potenciales también pueden servir para determinar criterios de divisibilidad.

9 ▸ CRITERIOS DE DIVISIBILIDAD

Es un conjunto de reglas que, al ser aplicadas a las cifras de un numeral, ayudan a determinar si dicho numeral es divisible por otro; en caso de no serlo, se podrá hallar el residuo sin efectuar la división.

Ejemplo

¿Cómo aplicar el criterio de divisibilidad por 7 para $N = \overline{abcdef}$?

Descomponemos polinómicamente a N.

$$N = a \times 10^5 + b \times 10^4 + c \times 10^3 + d \times 10^2 + e \times 10^1 + f \times 10^0 \quad (*)$$

Entonces, para encontrar el criterio de divisibilidad por 7, hallaremos los restos potenciales de 10 (base del sistema de numeración en el cual se encuentra el numeral) con respecto al módulo 7.

	10^0	$\boxed{10^1}$	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6 ...
mód (7) residuos	1	$\boxed{3}$	2	6	4	5	1 ...
residuos por exceso		1	3	2			

Reemplazamos en (*).

$$N=a\left(\overset{\circ}{7}-2\right)+b\left(\overset{\circ}{7}-3\right)+c\left(\overset{\circ}{7}-1\right)+d\left(\overset{\circ}{7}+2\right)+e\left(\overset{\circ}{7}+3\right)+f\left(\overset{\circ}{7}+1\right)$$

$$N=\overset{\circ}{7}-2a+\overset{\circ}{7}-3b+\overset{\circ}{7}-1\times c+\overset{\circ}{7}+2d+\overset{\circ}{7}+3e+\overset{\circ}{7}+1\times f$$

$$N=\overset{\circ}{7}-2a-3b-1\times c+2d+3e+1\times f$$

$$N=\overset{\circ}{7}+\underbrace{(1\times f+3\times e+2\times d-1\times c-3\times b-2\times a)}_{T}$$

Luego,

- $N=\overset{\circ}{7} \leftrightarrow T=\overset{\circ}{7}$
- $N=\overset{\circ}{7}+r \leftrightarrow T=\overset{\circ}{7}+r$

Siendo r el residuo de dividir T entre 7.

Nota

Para hallar el criterio de divisibilidad por 7,

- Se cambió convenientemente los residuos por defecto 6; 4 y 5 por sus respectivos residuos por exceso 1; 3 y 2.
- En forma práctica usamos el criterio de divisibilidad de la siguiente manera:

$$N=\overline{\underset{-2}{a}\ \underset{-3}{b}\ \underset{-1}{c}\ \underset{2}{d}\ \underset{3}{e}\ \underset{1}{f}}$$

Entonces, alternamos a partir de la derecha 1; 3 y 2 con –1, –3 y –2.

Luego

$$N=\overset{\circ}{7}+\underbrace{(1\times f+3\times e+2\times d-1\times c-3\times b-2\times a)}_{T}$$

Por lo tanto, para que $N=\overset{\circ}{7}$, solo se depende del valor de T.

En general, ¿Cómo aplicar el criterio de divisibilidad por n para $N=\overline{abcdef}_K$?

Descomponemos polinómicamente a N.

$$N=a\times K^5+b\times K^4+c\times K^3+d\times K^2+e\times K^1+f\times K^0 \quad (*)$$

Entonces, para encontrar el criterio de divisibilidad por n, hallaremos los restos potenciales de K (base del sistema de numeración en el cual se encuentra el numeral) con respecto al módulo n.

	K^0	K^1	K^2	K^3	K^4	K^5	...
mód (n) residuos	1	r_1	r_2	r_3	r_4	r_5	...

Reemplazamos en (*).

$$N=a\left(\overset{\circ}{n}+r_5\right)+b\left(\overset{\circ}{n}+r_4\right)+c\left(\overset{\circ}{n}+r_3\right)$$
$$+d\left(\overset{\circ}{n}+r_2\right)+e\left(\overset{\circ}{n}+r_1\right)+f\left(\overset{\circ}{n}+1\right)$$

$$N=\overset{\circ}{n}+a\times r_5+\overset{\circ}{n}+b\times r_4+\overset{\circ}{n}+c\times r_3$$
$$+\overset{\circ}{n}+d\times r_2+\overset{\circ}{n}+e\times r_1+\overset{\circ}{n}+f\times 1$$

$$N=\overset{\circ}{n}+\underbrace{(1\times f+r_1\times e+r_2\times d+r_3\times c+r_4\times b+r_5\times a)}_{T}$$

$$N=\overset{\circ}{n}+T$$

Luego,

- $N=\overset{\circ}{n} \leftrightarrow T=\overset{\circ}{n}$
- $N=\overset{\circ}{n}+r \leftrightarrow T=\overset{\circ}{n}+r$

Siendo r el residuo de dividir T entre n.

Recuerde

$$N=\overline{\underset{r_5}{a}\ \underset{r_4}{b}\ \underset{r_3}{c}\ \underset{r_2}{d}\ \underset{r_1}{e}\ \underset{1}{f}}$$

Luego,

$$N=\overset{\circ}{n}+\underbrace{(1\times f+r_1\times e+r_2\times d+r_3\times c+r_4\times b+r_5\times a)}_{T}$$

Por lo tanto, para que $N=\overset{\circ}{n}$, solo depende del valor de T.

Nota

Tenga en cuenta lo siguiente:

- Convenientemente usaremos los residuos por defecto o por exceso.
- No necesariamente usaremos restos potenciales para determinar los criterios de divisibilidad.

9.1. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR 2^n o 5^n

En la tabla se muestran los restos potenciales de 10 con respecto a los módulos 2; 4; 8; 5; 25 y 125.

Potencias de la base	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...
Módulos	Restos potenciales							
2	1	0	0	0	0	0	0	...
4	1	2	0	0	0	0	0	...
8	1	2	4	0	0	0	0	...
5	1	0	0	0	0	0	0	...
25	1	10	0	0	0	0	0	...
125	1	10	100	0	0	0	0	...

Sea $N=\overline{abcdef}$.

Luego, como hemos visto anteriormente,

$N=\overset{\circ}{n}+T$, donde

$n\in\{2;4;8;5;25;125\}$

Recuerde, para que $N=\overset{\circ}{n}$, solo depende del valor de T.

$$T=\begin{cases} f & ;\ \text{mód } 2=2^1 \\ f+2e & ;\ \text{mód } 4=2^2 \\ f+2e+4d & ;\ \text{mód } 8=2^3 \\ f & ;\ \text{mód } 5=5^1 \\ f+10e & ;\ \text{mód } 25=5^2 \\ f+10e+100d & ;\ \text{mód } 125=5^3 \end{cases}$$

Entonces

- $N=\overset{\circ}{2} \leftrightarrow f=\overset{\circ}{2}; f\in\{0;2;4;6;8\}$

  $N=\overset{\circ}{2}+1 \leftrightarrow f$ es impar

- $N=\overset{\circ}{5} \leftrightarrow f=\overset{\circ}{5}; f\in\{0;5\}$

  $N=\overset{\circ}{5}+r \leftrightarrow f=\overset{\circ}{5}+r$

- $N=\overset{\circ}{4} \leftrightarrow f+2e=\overset{\circ}{4}$

  $N=\overset{\circ}{4}+r \leftrightarrow f+2e=\overset{\circ}{4}+r$

- $N=\overset{\circ}{\overline{25}} \leftrightarrow \underbrace{f+10e}_{\overline{ef}}=\overset{\circ}{\overline{25}}$

  $N=\overset{\circ}{\overline{25}}+r \leftrightarrow \overline{ef}=\overset{\circ}{\overline{25}}+r$

- $N=\overset{\circ}{8} \leftrightarrow f+2e+4d=\overset{\circ}{8}$

  $N=\overset{\circ}{8}+r \leftrightarrow f+2e+4d=\overset{\circ}{8}+r$

- $N=\overset{\circ}{\overline{125}} \leftrightarrow \underbrace{f+10e+100d}_{\overline{def}}=\overset{\circ}{\overline{125}}$

  $N=\overset{\circ}{\overline{125}}+r \leftrightarrow \overline{def}=\overset{\circ}{\overline{125}}+r$

Observaciones

1. En cada caso, r representa el residuo.
2. Todo número impar es $\overset{\circ}{2}+1$.
3. En divisibilidad por 4

   $f+2e=\overset{\circ}{4}$

   $f+2e+\underbrace{8e}_{\overset{\circ}{4}}=\overset{\circ}{4}$

   $\rightarrow \overline{ef}=\overset{\circ}{4}$

4. Para el criterio de divisibilidad por
   - 2^1 o 5^1, solo se depende de la última cifra.
   - 2^2 o 5^2, solo se depende del numeral formado por sus 2 últimas cifras.
   - 2^3 o 5^3, solo se depende del numeral formado por sus 3 últimas cifras.

En general, para los criterios de divisibilidad por 2^n o 5^n solo basta analizar el numeral formado por sus n últimas cifras.
También se puede analizar de la siguiente manera:

$$N=\overline{abcdef}=\begin{cases}\overline{\overset{\circ}{10}}+f=\begin{cases}\overset{\circ}{2}+f\\ \overset{\circ}{5}+f\end{cases}\\ \overline{\overset{\circ}{100}}+\overline{ef}=\begin{cases}\overset{\circ}{4}+\overline{ef}\\ \overline{\overset{\circ}{25}}+\overline{ef}\end{cases}\\ \overline{\overset{\circ}{1000}}+\overline{def}=\begin{cases}\overset{\circ}{8}+\overline{def}\\ \overline{\overset{\circ}{125}}+\overline{def}\end{cases}\end{cases}$$

Ejemplos

- $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{2}$

  $N=\overset{\circ}{2}\leftrightarrow d=\overset{\circ}{2}$

  $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{2}$

  $\rightarrow$ 0; 2; 4; 6; 8

- $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{5}$

  $N=\overset{\circ}{5}\leftrightarrow d=\overset{\circ}{5}$

  $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{5}$

  $\rightarrow$ 0; 5

- $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{4}$

  $N=\overset{\circ}{4}\leftrightarrow \overline{cd}=\overset{\circ}{4}$

  $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{4}$

  00
  04
  08
  12
  ⋮
  96

- $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{\overline{25}}$

  $N=\overset{\circ}{\overline{25}}\leftrightarrow \overline{cd}=\overset{\circ}{\overline{25}}$

  $N=\overline{abcd}=\overset{\circ}{\overline{25}}$

  00
  25
  50
  75

- $A=\overline{abc63}=\overset{\circ}{4}+3$

  $A=\overset{\circ}{4}+3\leftrightarrow 63=\overset{\circ}{4}+3$

- $B=\overline{mn175}=\overset{\circ}{8}+7$

  $B=\overset{\circ}{8}+7\leftrightarrow 175=\overset{\circ}{8}+7$

- $C=\overline{pqr9}=\overset{\circ}{5}+4$

  $C=\overset{\circ}{5}+4\leftrightarrow 9=\overset{\circ}{5}+4$

- $D=\overline{abc61}=\overset{\circ}{\overline{25}}+11$

  $D=\overset{\circ}{\overline{25}}+11\leftrightarrow 61=\overset{\circ}{\overline{25}}+11$

- $E=\overline{mn258}=\overset{\circ}{\overline{125}}+8$

  $E=\overset{\circ}{\overline{125}}+8\leftrightarrow 258=\overset{\circ}{\overline{125}}+8$

Aplicación 24

Halle la suma de valores que puede tomar b en $\overline{mn6bb}=\overset{\circ}{8}+3$

Resolución

A partir del dato se deduce que

$$\underset{\text{impar}}{\overline{mn6bb}}=\overset{\circ}{8}+3=\text{impar}$$

$$\overline{mn6bb}=\overset{\circ}{8}+3\leftrightarrow \overline{\underset{4}{6}\,\underset{2}{b}\,\underset{1}{b}}=\overset{\circ}{8}+3$$

$$\rightarrow \underbrace{4\times 6}+2b+b=\overset{\circ}{8}+3$$

$$\overset{\circ}{8}+3b=\overset{\circ}{8}+3$$

$$3b=\overset{\circ}{8}+3$$

$$b=\overset{\circ}{8}+1$$

$\rightarrow$ b: 1; 9

Por lo tanto, la suma de valores que puede tomar b es 10.

Aplicación 25

Halle $a \times b$ en $\overline{b(a-4)ba} = \overset{\circ}{\overline{25}} + 8$.

Resolución

Por numeración

$$b > 0$$

$$a - 4 \geq 0 \;\rightarrow\; a \geq 4$$

Por el criterio de divisibilidad

$$\overline{b(a-4)ba} = \overset{\circ}{\overline{25}} + 8 \;\leftrightarrow\; \overline{ba} = \overset{\circ}{\overline{25}} + 8$$

Luego,

$$\underset{\downarrow}{\overset{\circ}{\overline{25}}} \;;\; \underbrace{\overset{\circ}{\overline{25}} + 8}$$

00	08
25	33
50	58
75	83

$\rightarrow\; \overline{ba} = 58$

$a = 8 \;\wedge\; b = 5$

$\therefore\; a \times b = 40$

9.2. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR 9 O 3

En la tabla se muestran los restos potenciales de 10 con respecto a los módulos 9 y 3.

Potencias de la base	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	...
Módulos	Restos potenciales						
9	1	1	1	1	1	1	...
3	1	1	1	1	1	1	...

Sea $N = \overline{abcdef}$

Luego, como hemos visto, $N = \overset{\circ}{n} + T$, donde $n \in \{9; 3\}$

Recuerde, para que $N = \overset{\circ}{n}$, solo depende del valor de T.

$$T = a + b + c + d + e + f$$

para el módulo 9 y para el módulo 3

Entonces

- $N = \overset{\circ}{9} \;\leftrightarrow\; T = \overset{\circ}{9}$

  $N = \overset{\circ}{9} + r \;\leftrightarrow\; T = \overset{\circ}{9} + r$

- $N = \overset{\circ}{3} \;\leftrightarrow\; T = \overset{\circ}{3}$

  $N = \overset{\circ}{3} + r \;\leftrightarrow\; T = \overset{\circ}{3} + r$

Observación

- Para los criterios de divisibilidad por 9 o 3, solo se depende de la suma de las cifras del número.
- Todo número es $\overset{\circ}{9}$ o $\overset{\circ}{3}$ más la suma de sus cifras.
- En cada caso, r representa el residuo.

Ejemplo

Sea $A = 42\,865$

suma de cifras de $A = 25 = \overset{\circ}{9} + 7$

$\rightarrow\; A = \overset{\circ}{9} + 7$

También

suma de cifras de $A = 25 = \overset{\circ}{3} + 1$

$\rightarrow\; A = \overset{\circ}{3} + 1$

Recuerde que todo $\overset{\circ}{9}$ es $\overset{\circ}{3}$, ya que 3 es divisor de 9.

$$\rightarrow\; A = \underset{\downarrow}{\overset{\circ}{9}} + \underset{\downarrow}{7}$$

$$A = \overset{\circ}{3} + (\overset{\circ}{3} + 1)$$

$$\therefore\; A = \overset{\circ}{3} + 1$$

Observación

- Para ambos criterios de divisibilidad, solo importa la suma de sus cifras, mas no el orden de las mismas.

  Ejemplos

  - $126 = \overset{\circ}{3}$ — $45 = \overset{\circ}{9}$

    $216 = \overset{\circ}{3}$ — $54 = \overset{\circ}{9}$

    $621 = \overset{\circ}{3}$

  - $31 = \overset{\circ}{3}+1$ — $95 = \overset{\circ}{9}+5$

    $13 = \overset{\circ}{3}+1$ — $59 = \overset{\circ}{9}+5$

- En ambos criterios de divisibilidad, no solo se puede sumar cifra por cifra, sino también en bloques.

  Ejemplos

  - $180 = \overset{\circ}{9}$

    $1+8+0 = 9 = \overset{\circ}{9}$

    $1+80 = 81 = \overset{\circ}{9}$

    $18+0 = 18 = \overset{\circ}{9}$

  - $125 = \overset{\circ}{3}+2$

    $1+2+5 = 8 = \overset{\circ}{3}+2$

    $12+5 = 17 = \overset{\circ}{3}+2$

    $1+25 = 26 = \overset{\circ}{3}+2$

Aplicación 26

Si $\overline{2a1a2} = \overset{\circ}{3}+1$, halle la suma de valores de a.

Resolución

A partir del dato, se tiene que la suma de cifras es $\overset{\circ}{3}+1$.

$\rightarrow$ $2a+5 = \overset{\circ}{3}+1$

$2a = \overset{\circ}{3}-4$

$a = \overset{\circ}{3}-2 = \overset{\circ}{3}+1$

a: 1; 4; 7

Finalmente, nos piden la suma de valores de a.

$\therefore$ $1+4+7=12$

Aplicación 27

Si se tiene que $L = \overline{ac(b+1)}+\overline{2c1b(a+2)}$ halle el residuo de dividir L entre 9. Considere que $\overline{abc} = \overset{\circ}{9}+5$.

Resolución

Sabemos que

$$\overline{abc} = \overset{\circ}{9}+5 \quad \leftrightarrow \quad a+b+c = \overset{\circ}{9}+5$$

Luego,

- $$\begin{aligned}\overline{ac(b+1)} &= \overset{\circ}{9}+\underbrace{a+b+c}+1\\ &= \overset{\circ}{9}+\left(\overset{\circ}{9}+5\right)+1\\ &= \overset{\circ}{9}+6\end{aligned}$$

- $$\begin{aligned}\overline{2c1b(a+2)} &= \overset{\circ}{9}+\underbrace{a+b+c}+5\\ &= \overset{\circ}{9}+\left(\overset{\circ}{9}+5\right)+5\\ &= \overset{\circ}{9}+1\end{aligned}$$

Reemplazamos en L.

$$L = \left(\overset{\circ}{9}+6\right)+\left(\overset{\circ}{9}+1\right) = \overset{\circ}{9}+7$$

Por lo tanto, el residuo de dividir L entre 9 es 7.

Otra forma

Podemos sumar las cifras directamente de L.

$$L = \overline{ac(b+1)}+\overline{2c1b(a+2)}$$

$\rightarrow$ (suma de cifras de L) $= 2(a+b+c)+6$

$$\begin{aligned}&= 2\left(\overset{\circ}{9}+5\right)+6\\ &= \overset{\circ}{9}+16\\ &= \overset{\circ}{9}+\left(\overset{\circ}{9}+7\right) = \overset{\circ}{9}+7\end{aligned}$$

Por lo tanto, el residuo de dividir L entre 9 es 7.

9.3. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR 11

En la tabla se muestran los restos potenciales de 10 con respecto al módulo 11.

Potencias de la base	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	...
Módulo	Restos potenciales						
11	1	1*	1	1*	1	1*	...

* Residuos por exceso

Sea $N=\overline{\underset{-1}{a}\ \underset{1}{b}\ \underset{-1}{c}\ \underset{1}{d}\ \underset{-1}{e}\ \underset{1}{f}}$

Luego, como hemos visto

$$N=\overset{\circ}{\overline{11}}+T$$

Recuerde, para que $N=\overset{\circ}{\overline{11}}$, solo depende del valor de T.

$$T=f-e+d-c+b-a$$

Entonces

$$N=\overset{\circ}{\overline{11}} \leftrightarrow T=\overset{\circ}{\overline{11}}$$

$$N=\overset{\circ}{\overline{11}}+r \leftrightarrow T=\overset{\circ}{\overline{11}}+r$$

Ejemplos

- $\underset{1}{7}\ \underset{-1}{2}\ \underset{1}{4}\ \underset{-1}{3}\ \underset{1}{9}$

  $\rightarrow 7-2+4-3+9=15=\overset{\circ}{\overline{11}}+4$

  $\therefore\ 72439=\overset{\circ}{\overline{11}}+4$

- $\underset{-1}{4}\ \underset{1}{2}\ \underset{-1}{5}\ \underset{1}{1}\ \underset{-1}{7}\ \underset{1}{2}$

  $\rightarrow -4+2-5+1-7+2=-11=\overset{\circ}{\overline{11}}$

  $\therefore\ 425172=\overset{\circ}{\overline{11}}$

Observación

- Todo numeral capicúa con una cantidad par de cifras es $\overset{\circ}{\overline{11}}$.

  Ejemplos

  - $\overline{\underset{-1}{a}\ \underset{1}{a}}=\overset{\circ}{\overline{11}}$

    $a-a=0=\overset{\circ}{\overline{11}}$

  - $\overline{\underset{-1}{a}\ \underset{1}{b}\ \underset{-1}{b}\ \underset{1}{a}}=\overset{\circ}{\overline{11}}$

    $-a+b-b+a=0=\overset{\circ}{\overline{11}}$

- Si se intercambian las cifras que le corresponden multiplicarse por el mismo número (1 o −1), el numeral sigue dejando el mismo residuo al dividirse entre 11.

  Ejemplos

  - $\underset{1}{1}\ \underset{-1}{2}\ \underset{1}{2}=\overset{\circ}{\overline{11}}+1$

    $\underset{1}{2}\ \underset{-1}{2}\ \underset{1}{1}=\overset{\circ}{\overline{11}}+1$

    En ambos numerales, se tiene que

    $1-2+2=1=\overset{\circ}{\overline{11}}+1$

  - Al dividir $\overline{abcd}$ entre 11, deja residuo r.

    $\overline{\underset{-1}{a}\ \underset{1}{b}\ \underset{-1}{c}\ \underset{1}{d}}=\overset{\circ}{\overline{11}}+r \leftrightarrow -a+b-c+d=\overset{\circ}{\overline{11}}+r$

  Los siguientes numerales también son $\overset{\circ}{\overline{11}}+r$, dado que en todos se cumple

  $(-a+b-c+d)=\overset{\circ}{\overline{11}}+r$

  $\overline{\underset{-1}{c}\ \underset{1}{b}\ \underset{-1}{a}\ \underset{1}{d}}$; $\overline{\underset{-1}{a}\ \underset{1}{d}\ \underset{-1}{c}\ \underset{1}{b}}$; $\overline{\underset{-1}{c}\ \underset{1}{d}\ \underset{-1}{a}\ \underset{1}{b}}$

- En forma práctica, en lugar de escribir 1; −1; 1; −1; ..., se coloca +, −, +, −, ...

  $\overline{\underset{-}{a}\ \underset{+}{b}\ \underset{-}{c}\ \underset{+}{d}}=\overset{\circ}{\overline{11}}+r$

Aplicación 28

Al dividir el numeral $\overline{(x-1)4(x+2)9}$ entre 11, deja 2 de residuo. Halle x.

Resolución

En el numeral,

$$\overline{(x-1)4(x+2)9} = \overset{\circ}{\overline{11}}+2$$

$$\underset{-1}{(x-1)}\ \underset{1}{4}\ \underset{-1}{(x+2)}\ \underset{1}{9}$$

Esto se cumple si y solo si

$$-(x-1)+4-(x+2)+9=\overset{\circ}{\overline{11}}+2$$

$$-x+1+4-x-2+9=\overset{\circ}{\overline{11}}+2$$

$$-2x+12=\overset{\circ}{\overline{11}}+2$$

$$-x+6=\overset{\circ}{\overline{11}}+1$$

$$-x=\overset{\circ}{\overline{11}}-5$$

$$x=\overset{\circ}{\overline{11}}+5$$

$\therefore\ x=5$

9.4. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR 7

Este criterio fue demostrado al inicio del punto nueve.

Ejemplos

- $\underset{-1}{3}\ \underset{2}{5}\ \underset{3}{6}\ \underset{1}{4}$

  $-1(3)+2(5)+3(6)+1(4)=29=\overset{\circ}{7}+1$

  $\rightarrow\ 3564=\overset{\circ}{7}+1$

- $\underset{-2}{3}\ \underset{-3}{4}\ \underset{-1}{2}\ \underset{2}{8}\ \underset{3}{6}\ \underset{1}{5}$

  $-2(3)-3(4)-1(2)+2(8)+3(6)+1(5)=19=\overset{\circ}{7}+5$

  $\rightarrow\ 342865=\overset{\circ}{7}+5$

- $\underset{1}{9}\ \underset{-2}{1}\ \underset{-3}{4}\ \underset{-1}{6}\ \underset{2}{1}\ \underset{3}{4}\ \underset{1}{6}$

  $1(9)-2(1)-3(4)-1(6)+2(1)+3(4)+1(6)=9=\overset{\circ}{7}+2$

  $\rightarrow\ 9146146=\overset{\circ}{7}+2$

Nota

Algunos numerales que tienen una forma particular son los siguientes:

- Un bloque de 3 cifras que se repite

  $\overline{\underset{-2}{a}\ \underset{-3}{b}\ \underset{-1}{c}\ \underset{2}{a}\ \underset{3}{b}\ \underset{1}{c}}=\overset{\circ}{7}$

  $\leftrightarrow\ -2a-3b-c+2a+3b+c=0=\overset{\circ}{7}$

- Un bloque de seis cifras iguales

  $\overline{\underset{-2}{a}\ \underset{-3}{a}\ \underset{-1}{a}\ \underset{2}{a}\ \underset{3}{a}\ \underset{1}{a}}=\overset{\circ}{7}$

  $\leftrightarrow\ -2a-3a-a+2a+3a+a=0=\overset{\circ}{7}$

Aplicación 29

Si $\overline{2ab4a}$ es divisible por 7, halle b.

Resolución

A partir del dato,

$$\overline{\underset{-3}{2}\ \underset{-1}{a}\ \underset{2}{b}\ \underset{3}{4}\ \underset{1}{a}}=\overset{\circ}{7}$$

$$\leftrightarrow\ -3(2)-a+2b+3(4)+a=\overset{\circ}{7}$$

$$2b+6=\overset{\circ}{7}$$

$$b+3=\overset{\circ}{7}$$

$\therefore\ b=4$

9.5. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR 13

En la tabla se muestran los restos potenciales de 10 con respecto al módulo 13.

Potencias de la base	10^0	10^1	10^2	10^3	10^4	10^5	10^6	...
Módulo	Restos potenciales							
13	1	3*	4*	1*	3	4	1	...

* Residuos por exceso

Sea $N=\overline{\underset{4}{a}\ \underset{3}{b}\ \underset{-1}{c}\ \underset{-4}{d}\ \underset{-3}{e}\ \underset{1}{f}}$

Luego, como hemos visto

$$N=\overset{\circ}{\overline{13}}+T$$

Recuerde, para que $N=\overset{\circ}{\overline{13}}$, solo depende del valor de T.

$$T=f-3e-4d-c+3b+4a$$

Entonces

$$N=\overset{\circ}{\overline{13}} \leftrightarrow T=\overset{\circ}{\overline{13}}$$

$$N=\overset{\circ}{\overline{13}}+r \leftrightarrow T=\overset{\circ}{\overline{13}}+r$$

Ejemplos

- $\underset{-1}{5}\ \underset{-4}{8}\ \underset{-3}{4}\ \underset{1}{3}$

$$-1(5)-4(8)-3(4)+1(3)=-46=\overset{\circ}{\overline{13}}+6$$

$$\therefore\ 5843=\overset{\circ}{\overline{13}}+6$$

- $\underset{4}{7}\ \underset{3}{9}\ \underset{-1}{3}\ \underset{-4}{2}\ \underset{-3}{5}\ \underset{1}{8}$

$$4(7)+3(9)-1(3)-4(2)-3(5)+1(8)=37=\overset{\circ}{\overline{13}}+11$$

$$\therefore\ 793258=\overset{\circ}{\overline{13}}+11$$

Nota

Algunos numerales que tienen una forma particular son los siguientes:

- Un bloque de 3 cifras que se repite

$$\overline{\underset{4}{a}\ \underset{3}{b}\ \underset{-1}{c}\ \underset{-4}{a}\ \underset{-3}{b}\ \underset{1}{c}}=\overset{\circ}{\overline{13}}$$

$$\leftrightarrow\ 4a+3b-c-4a-3b+c=0=\overset{\circ}{\overline{13}}$$

- Un bloque de seis cifras iguales

$$\overline{\underset{4}{a}\ \underset{3}{a}\ \underset{-1}{a}\ \underset{-4}{a}\ \underset{-3}{a}\ \underset{1}{a}}=\overset{\circ}{\overline{13}}$$

$$\leftrightarrow\ 4a+3a-a-4a-3a+a=0=\overset{\circ}{\overline{13}}$$

Aplicación 30

Halle el valor de b si se sabe que al dividir $\overline{ab2a5}$ entre 13 deja residuo 8.

Resolución

Según los datos, se cumple que

$$\overline{\underset{3}{a}\ \underset{-1}{b}\ \underset{-4}{2}\ \underset{-3}{a}\ \underset{1}{5}}=\overset{\circ}{\overline{13}}+8$$

$$\leftrightarrow\ 3a-b-4(2)-3a+5=\overset{\circ}{\overline{13}}+8$$

$$-b-3=\overset{\circ}{\overline{13}}+8$$

$$-b=\overset{\circ}{\overline{13}}+11=\overset{\circ}{\overline{13}}-2$$

$$b=\overset{\circ}{\overline{13}}+2$$

$$\therefore\ b=2$$

9.6. CRITERIO DE DIVISIBILIDAD POR $(n^K\pm1)$

En estos criterios de divisibilidad, el módulo es $n^K\pm1$; $K\in\mathbb{Z}^+$.

donde n es la base del sistema de numeración en el cual se encuentra el numeral.

Cuando $K=1$

$$\overset{\circ}{\overline{(n^1-1)}};\ \overset{\circ}{\overline{(n^1+1)}}$$

Para $n=10$

$$N=\overline{abcd}$$

$$N=a\times10^3+b\times10^2+c\times10^1+d \qquad (*)$$

Ahora expresamos la base en función de $\overset{\circ}{9}$ (la base -1) y $\overset{\circ}{\overline{11}}$ (la base $+1$).

- $10=\overset{\circ}{9}+1 \rightarrow \left(\overset{\circ}{9}+1\right)^E=\overset{\circ}{9}+1$
- $10=\overset{\circ}{\overline{11}}-1 \rightarrow \left(\overset{\circ}{\overline{11}}-1\right)^{E}=\overset{\circ}{\overline{11}}\pm1;\ E\in\mathbb{Z}^+$

Reemplazamos en (*).

$$\boxed{\begin{aligned}N&=\overset{\circ}{9}+d+c+b+a\\ N&=\overset{\circ}{\overline{11}}+d-c+b-a\end{aligned}}$$

Ejemplo

Sea el número $A=2738$

Expresamos A en función de $\overline{(\text{base}-1)}^{\circ}$.

$$A=2\,7\,3\,8$$
$$1\;1\;1\;1$$

$$2+7+3+8=20=\overset{\circ}{9}+2$$

$$\rightarrow A=\overset{\circ}{9}+2$$

Expresamos A en función de $\overline{(\text{base}+1)}^{\circ}$.

$$A=2\,7\,3\,8$$
$$-1\;1\;-1\;1$$

$$-2+7-3+8=10=\overset{\circ}{\overline{11}}+10$$

$$\rightarrow A=\overset{\circ}{\overline{11}}+10$$

A partir del ejemplo anterior, generalizamos:

- Para expresar el número en función de $\overline{(\text{base}-1)}^{\circ}$, se suman las cifras del número.
- Para expresar el número en función de $\overline{(\text{base}+1)}^{\circ}$, se multiplican las cifras del número, de derecha a izquierda, por $+1$; -1; $+1$; -1; ...

Ejemplo

Sea el número $B=52615_8$

Expresamos B en función de $\overline{(\text{base}-1)}^{\circ}$

$$B=5\,2\,6\,1\,5_8 \rightarrow (\text{base}-1)=7$$
$$1\;1\;1\;1\;1$$

$$5+2+6+1+5=19=\overset{\circ}{7}+5$$

$$\rightarrow B=\overset{\circ}{7}+5$$

Expresamos B en función de $\overline{(\text{base}+1)}^{\circ}$

$$B=5\,2\,6\,1\,5_8 \rightarrow (\text{base}+1)=9$$
$$1\;-1\;1\;-1\;1$$

$$5-2+6-1+5=13=\overset{\circ}{9}+4$$

$$\rightarrow B=\overset{\circ}{9}+4$$

Cuando $K=2$

$$\overline{(n^2-1)}^{\circ};\ \overline{(n^2+1)}^{\circ}$$

Para $n=10$

$$N=\overline{a\,|\,bc\,|\,de\,|\,fg}$$

$$N=a\times10^6+\overline{bc}\times10^4+\overline{de}\times10^2+\overline{fg}$$

$$N=a(10^2)^3+\overline{bc}(10^2)^2+\overline{de}(10^2)^1+\overline{fg} \qquad (*)$$

Ahora expresamos la base en función de $\overline{99}^{\circ}\left((\text{base})^2-1\right)$ y $\overline{101}^{\circ}\left((\text{base})^2+1\right)$.

- $10^2=\overline{99}^{\circ}+1 \rightarrow \left(\overline{99}^{\circ}+1\right)^E=\overline{99}^{\circ}+1$
- $10^2=\overline{101}^{\circ}-1 \rightarrow \left(\overline{101}^{\circ}-1\right)^E=\overline{101}^{\circ}\pm1\,;\ E\in\mathbb{Z}^+$

Reemplazamos en (*).

$$N=\overline{99}^{\circ}+\overline{fg}+\overline{de}+\overline{bc}+a$$

$$N=\overline{101}^{\circ}+\overline{fg}-\overline{de}+\overline{bc}-a$$

Ejemplo

Sea el número $A=78548$

Expresamos A en función de $\overline{\left[(\text{base})^2-1\right]}^{\circ}$.

$$A=7\,85\,48$$
$$1\;\;1\;\;1$$

$$7+85+48=140=\overline{99}^{\circ}+41$$

$$\rightarrow A=\overline{99}^{\circ}+41$$

Expresamos A en función de $\overline{\left[(\text{base})^2+1\right]}^{\circ}$.

$$A=7\,85\,48$$
$$1\;\;-1\;\;1$$

$$7-85+48=-30=\overline{101}^{\circ}+71$$

$$\rightarrow A=\overline{101}^{\circ}+71$$

A partir del ejemplo anterior, generalizamos para $\left[(\text{base})^2-1\right]$ y $\left[(\text{base})^2+1\right]$.

Ejemplo

Sea el número $B=12132_4$

Expresamos B en función de $\overset{\circ}{\overline{\left[(\text{base})^2-1\right]}}$.

$$B=\underset{1}{1}\ \underset{1}{2}\ \underset{1}{1}\ 3\ 2_4 \quad \rightarrow \quad (\text{base})^2-1=15$$

$$1+21_4+32_4=24=\overset{\circ}{\overline{15}}+9$$

$$\rightarrow \ B=\overset{\circ}{\overline{15}}+9$$

Expresamos B en función de $\overset{\circ}{\overline{\left[(\text{base})^2+1\right]}}$.

$$B=\underset{1}{1}\ \underset{-1}{2}\ \underset{1}{1}\ 3\ 2_4 \quad \rightarrow \quad (\text{base})^2+1=17$$

$$1-21_4+32_4=6=\overset{\circ}{\overline{17}}+6$$

$$\rightarrow \ B=\overset{\circ}{\overline{17}}+6$$

Cuando $K=3$

$$\overset{\circ}{\overline{(n^3-1)}}\ ;\ \overset{\circ}{\overline{(n^3+1)}}$$

Para $n=10$

$$N=\overline{a\,|\,bcd\,|\,efg\,|\,hij}$$

$$N=a\times 10^9+\overline{bcd}\times 10^6+\overline{efg}\times 10^3+\overline{hij}$$

$$N=a(10^3)^3+\overline{bcd}(10^3)^2+\overline{efg}(10^3)^1+\overline{hij} \quad (*)$$

Ahora expresamos la base en función de $\overset{\circ}{\overline{999}}$ $\left((\text{base})^3-1\right)$ y $\overset{\circ}{\overline{1001}}$ $\left((\text{base})^3+1\right)$.

- $10^3=\overset{\circ}{\overline{999}}+1 \rightarrow \left(\overset{\circ}{\overline{999}}+1\right)^E=\overset{\circ}{\overline{999}}+1$
- $10^3=\overset{\circ}{\overline{1001}}-1 \rightarrow \left(\overset{\circ}{\overline{1001}}-1\right)^{E}=\overset{\circ}{\overline{1001}}\pm 1\ ;\ E\in\mathbb{Z}^+$

Reemplazamos en (*).

$$N=\overset{\circ}{\overline{999}}+\overline{hij}+\overline{efg}+\overline{bcd}+a$$

$$N=\overset{\circ}{\overline{1001}}+\overline{hij}-\overline{efg}+\overline{bcd}-a$$

Ejemplo

Sea el número $A=85\ 104\ 875$

Expresamos A en función de $\overset{\circ}{\overline{\left[(\text{base})^3-1\right]}}$.

$$A=\underset{1}{85}\ \underset{1}{104}\ \underset{1}{875}$$

$$85+104+875=1064=\overset{\circ}{\overline{999}}+65$$

$$\rightarrow \ A=\overset{\circ}{\overline{999}}+65$$

Expresamos A en función de $\overset{\circ}{\overline{\left[(\text{base})^3+1\right]}}$.

$$A=\underset{1}{85}\ \underset{-1}{104}\ \underset{1}{875}$$

$$85-104+875=856=\overset{\circ}{\overline{1001}}+856$$

$$\rightarrow \ A=\overset{\circ}{\overline{1001}}+856$$

A partir del ejemplo anterior, generalizamos para $\left[(\text{base})^3-1\right]$ y $\left[(\text{base})^3+1\right]$.

Ejemplo

Sea el número $B=11101110_2$

Expresamos B en función de $\overset{\circ}{\overline{\left[(\text{base})^3-1\right]}}$.

$$B=\underset{1}{11}\ \underset{1}{101}\ \underset{1}{110_2}$$

Entonces

$$(\text{base})^3-1=7$$

Luego,

$$11_2+101_2+110_2=14=\overset{\circ}{7}$$

$$\rightarrow \ B=\overset{\circ}{7}$$

Expresamos B en función de $\overline{\left[(\text{base})^3+1\right]}^{\circ}$

$$B=\underset{1}{11}\,\underset{-1}{101}\,\underset{1}{110}_2$$

Entonces

$$(\text{base})^3+1=9$$

Luego,

$$11_2-101_2+110_2=4=\overset{\circ}{9}+4$$

$\rightarrow B=\overset{\circ}{9}+4$

Conclusiones

1. Para el criterio de divisibilidad por (n^k-1), a partir de la derecha se separan bloques de k cifras y se suman.
2. Para el criterio de divisibilidad por (n^k+1), a partir de la derecha se separan bloques de k cifras y se alternan multiplicándolos por $+1$ y -1.
3. En ambos casos, se considera el último bloque de la izquierda aunque no tenga k cifras.

Importante

I. Cuando se tiene una ecuación en función de un módulo, se puede analizar así:

- Es correcto hacer lo siguiente:

$$2a=\overset{\circ}{3}+1$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \textcircled{2} \\ 5 \\ 8 \\ 11 \\ \vdots \end{array} \quad +\overset{\circ}{3}$$

- No es correcto hacer lo siguiente:

$$3a=\overset{\circ}{9}+6 \qquad (*)$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \textcircled{2} \\ 11 \\ 20 \\ 29 \\ \vdots \end{array} \quad +\overset{\circ}{9}$$

Recuerde que cuando se puede simplificar el módulo y no se simplifica, se pierden soluciones.

Observe que en (*) también cumple

a: 5; 8; 14; 17;...

Entonces, lo correcto sería simplificar.

$$\cancel{3}a=\overset{\circ}{\cancel{9}}+\cancel{6}$$

$$a=\overset{\circ}{3}+2$$

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ \textcircled{2} \\ 5 \\ 8 \\ 11 \\ 14 \\ 17 \\ 20 \\ \vdots \end{array} \quad +\overset{\circ}{3}$$

II. Cuando se conoce la base de un numeral, se pueden aplicar distintos criterios de divisibilidad.

$$A=12113_6=\begin{cases} \text{Potencia de la base} \\ \overset{\circ}{6}+3 \\ \overline{36}^{\circ}+13_6 \\ \overline{216}^{\circ}+113_6 \\ \overline{\left[(\text{base})^K-1\right]}^{\circ};\ \overline{\left[(\text{base})^K+1\right]}^{\circ} \\ \begin{cases} \overset{\circ}{5}+(1+2+1+1+3) \\ \overset{\circ}{7}+(3-1+1-2+1) \end{cases} \\ \begin{cases} \overline{35}^{\circ}+(13_6+21_6+1) \\ \overline{37}^{\circ}+(13_6-21_6+1) \end{cases} \\ \begin{cases} \overline{215}^{\circ}+(113_6+12_6) \\ \overline{217}^{\circ}+(113_6-12_6) \end{cases} \end{cases}$$

Además, no se debe olvidar que si $A=\overset{\circ}{n}$, también A será múltiplo de todos los divisores de n.

Biografía

Carl Friedrich Gauss: El príncipe de las matemáticas

Johann Carl Friedrich Gauss nació el 30 de abril de 1777 en Brunswick, Alemania, y murió el 23 de febrero de 1855 en Gottingen, también en el país teutón. Sus estudios e investigaciones pueden localizarse tanto en matemáticas como en física y astronomía. Posiblemente, la teoría de números sea la rama de las matemáticas en la que la influencia ejercida por Gauss haya sido mayor. Pero ni muchos menos la cosa se queda ahí. Las aportaciones de Gauss a la geometría diferencial, al análisis matemático, a la estadística o a la geodesia son realmente notables.

Podemos decir que Gauss fue un niño prodigio en lo que se refiere a las matemáticas en general y al cálculo en particular. A los 3 años de edad corrigió a su padre una operación que estaba realizando relacionada con pagos de salarios a los trabajadores que tenía a su cargo. Pero puede que la anécdota más conocida de su infancia sea la ocurrida cuando contaba con 7 años de edad. Estando en el colegio, en uno de esos típicos momentos de barullo entre niños de esa edad, su profesor J. G. Bütner castigó a toda la clase con sumar todos los números naturales desde el 1 hasta el 100. Casi de forma instantánea Gauss tenía la respuesta correcta: 5050.

En 1788, ingresó en el Gymnasium local (escuela secundaria) y aprendió principalmente cultura clásica. Su formación matemática continuó a través de instrucciones particulares y mediante la lectura de libros, entre los que se encuentran obras de arte como los *Principios matemáticos de la filosofía natural*, de Newton, o el *Ars Conjectandi*, de Bernoulli. Tal fue la fama que adquirió en el Gymnasium, que, a los 15 años, el duque de su ciudad natal apoyó a Gauss económicamente para que siguiera estudiando en el Collegium Carolinum de Brunswick.

En 1801, Gauss publicó en su obra ***Disquisitiones Arithmeticae***. En ella, a partir de la aritmética modular (congruencias), reunió una gran cantidad de resultados relacionados con teoría de números (la ley de reciprocidad cuadrática entre ellos). Esta publicación contribuyó de manera fundamental a la sistematización de dicha rama de las matemáticas.

Adaptado de "Carl Friedrich Gauss: el Principe de las Matemáticas". En <www.gaussianos.com>.

Problemas resueltos

Problema 1

El Burj Khalifa es un rascacielos ubicado en Dubái. Tiene una altura de H metros y es considerado el edificio más alto del mundo (hasta el 2018). Si a H le faltan 4 unidades para ser divisible por 13 y le sobran 2 unidades para ser divisible por 7, halle la suma de cifras de H. Considere que H está comprendido entre 800 y 900.

Resolución

Del enunciado,

$$H=\begin{cases}\overset{\circ}{\overline{13}}+9\\ \overset{\circ}{7}+2+7\end{cases}$$

$$H=\overset{\circ}{\overline{\mathrm{MCM}(13;7)}}+9=\overset{\circ}{\overline{91}}+9$$

Además, $800<H<900$

$$800<\underset{\substack{\downarrow\\ 9}}{91K}+9<900;\ K\in\mathbb{Z}$$

$$H=91(9)+9=828$$

Por lo tanto, la suma de cifras de H es

$$8+2+8=18$$

Problema 2

¿Cuántos números comprendidos entre 214 y 1295 son divisibles por 24?

Resolución

Sea N uno de los números que nos piden.

Se sabe que

- $N=\overset{\circ}{\overline{24}}=24K;\ K\in\mathbb{Z}$
- $214<24K<1295$
  $8{,}9...<K<53{,}9...$ $\div 24$

$\rightarrow\ K:\underbrace{9;10;11;...;53}_{53-8=45\text{ números}}$

Por lo tanto, al reemplazar el valor de K, se tiene 45 números divisibles por 24.

Otra forma

Entre 214 y 1295 se tiene

$$\underbrace{215;216;217;218;...;1294}_{1294-214=1080\text{ números}}$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números }\overset{\circ}{\overline{24}}\end{pmatrix}=\frac{1080}{24}=45$$

solo si la división resulta entera y exacta

Problema 3

¿Cuántos números de tres cifras que terminan en 2 son divisibles por 14?

Resolución

Se tiene

$$\overline{ab2}=\overset{\circ}{\overline{14}}=\underset{\substack{\downarrow\\ (...3)\\ (...8)}}{14K};\ K\in\mathbb{Z}$$

Entonces

$100\le 14K<1000$
$7{,}14...\le K\le 71{,}4...$ $\div 14$

$\rightarrow\ K:\underbrace{8;13;18;23;...;68}_{\frac{68-3}{5}=13\text{ números}}$ (PA razón=5)

Por lo tanto, al reemplazar el valor de K se tiene 13 números que cumplen la condición del problema.

Problema 4

¿Cuántos números de tres cifras que terminan en 4 no son divisibles por 13?

Resolución

Se tiene

$$\overline{ab\underline{4}} = \overline{13} = 1\underline{3}K;\ K \in \mathbb{Z}$$

(...8)

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} 100 \le 13K < 1000 \\ 7{,}69... \le K < 76{,}9 \end{array}\right\} \div 13$$

$\rightarrow$ K: 8; 18; 28; 38; 48; 58; 68

Entonces, como K toma 7 valores, al reemplazarlos tendremos 7 números que son $\overline{13}$.

Nos piden los que no son $\overline{13}$, entonces al total de números de 3 cifras que terminan en 4 le restamos los que son $\overline{13}$, es decir, lo resolvemos por el complemento.

$$\left(\begin{array}{c}\text{total de}\\ \text{números}\end{array}\right) - \left(\begin{array}{c}\text{números}\\ \overline{ab4} = \overline{13}\end{array}\right)$$

$$\overline{a\,b\,4}$$

$$9\times10=90 \quad - \quad 7 = 83$$

Por lo tanto, 83 números cumplen la condición del problema.

Problema 5

De los 1400 primeros enteros positivos, indique lo siguiente:

I. ¿Cuántos son $\overline{12}$?

II. ¿Cuántos son $\overline{15}$?

III. ¿Cuántos son $\overline{18}$?

Dé como respuesta la suma de los resultados.

Resolución

Se tiene los números: 1; 2; 3; 4; ...; 1400

Recuerde que cuando empieza en 1, dividimos y tomamos como respuesta la parte entera.

I. $\dfrac{1400}{12} = 116{,}\widehat{6}$

Entonces hay 116 números que son $\overline{12}$.

II. $\dfrac{1400}{15} = 93{,}\widehat{3}$

Entonces hay 93 números que son $\overline{15}$.

III. $\dfrac{1400}{18} = 77{,}\widehat{7}$

Entonces hay 77 números que son $\overline{18}$.

Por lo tanto, la suma de resultados es

$$116+93+77=286$$

Problema 6

De los números de 4 cifras, indique lo siguiente:

I. ¿Cuántos son divisibles por 12?

II. ¿Cuántos son $\overline{18}$?

III. ¿Cuántos son $\overline{28}$?

Dé como respuesta la suma de los resultados.

Resolución

Se tiene

$$\underbrace{1000; 1001; 1002; 1003; ...; 9999}_{9999-999=9000 \text{ números}}$$

Recuerde que

divisible < > múltiplo

I. $\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overline{12}\end{array}\right) = \dfrac{9000}{12} = 750$

II. $\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overline{18}\end{array}\right) = \dfrac{9000}{18} = 500$

solo si la división resulta entera y exacta

III. $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{\overline{28}}\end{pmatrix} = \dfrac{9000}{28} = 321{,}42$ No cumple

$\rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{28}} = 28K;\ K \in \mathbb{Z}$

$1000 \leq 28K < 10\,000$

$35{,}71... \leq K < 357{,}1$ $\div 28$

$K: \underbrace{36; 37; 38; 39; ...; 357}_{357-35=322 \text{ números}}$

Luego, al reemplazar K, tendremos 322 números $\overset{\circ}{\overline{28}}$.

Por lo tanto, la suma de resultados es

$750+500+322=1572$

Problema 7

¿Cuántos números de tres cifras son $\overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{8}$?

Resolución

Se tiene

$\underbrace{100; 101; 102; 103; ...; 999}_{999-99=900 \text{ números}}$

Notamos que hay números que son $\overset{\circ}{6}$ y $\overset{\circ}{8}$ a la vez, entonces serán $\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(6; 8)}} = \overset{\circ}{\overline{24}}$.

Luego,

- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{6}\end{pmatrix} = \dfrac{900}{6} = 150$ Sí cumple
- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{\overline{24}}\end{pmatrix} = \dfrac{900}{24} = 37{,}5$ No cumple

$\rightarrow \overline{abc} = \overset{\circ}{\overline{24}} = 24K;\ K \in \mathbb{Z}$

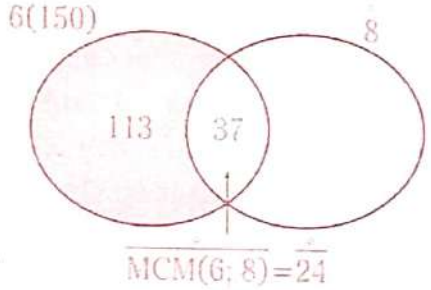
$100 \leq 24K < 1000$

$4{,}16... \leq K < 41{,}6$ $\div 24$

$\rightarrow K: \underbrace{5; 6; 7; 8; ...; 41}_{41-4=37 \text{ números}}$

Entonces, hay 37 números de tres cifras que son $\overset{\circ}{\overline{24}}$.

Reemplazamos lo calculado en el diagrama de Venn - Euler.



Por lo tanto, hay 113 números de 3 cifras que son $\overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{8}$.

Problema 8

¿Cuántos números de cuatro cifras son $\overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{\overline{18}}$?

Resolución

Se tiene

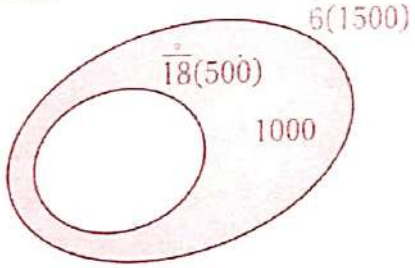
$\underbrace{1000; 1001; 1002; 1003; ...; 9999}_{9999-999=9000 \text{ números}}$

Notamos que todo número que es $\overset{\circ}{\overline{18}}$ también es $\overset{\circ}{6}$, entonces hay inclusión.

Luego,

- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{6}\end{pmatrix} = \dfrac{9000}{6} = 1500$ Sí cumple
- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números } \overset{\circ}{\overline{18}}\end{pmatrix} = \dfrac{9000}{18} = 500$ Sí cumple

Reemplazamos lo calculado en el diagrama de Venn - Euler.



Por lo tanto, hay 1000 números de cuatro cifras que son $\overset{\circ}{6}$ pero no $\overset{\circ}{\overline{18}}$.

Problema 9

Se encuestó a 164 personas. De las mujeres, se encontró que a 1/4, 1/6 y 1/5 de ellas les gusta ir en sus tiempos libres al cine, al teatro y al museo, respectivamente. ¿Cuántos varones fueron encuestados si se sabe que son menores en cantidad que las mujeres?

Resolución

Sea M la cantidad de mujeres encuestadas.

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{mujeres que les}\\ \text{gusta ir al cine}\end{pmatrix} = \underbrace{\frac{1}{4}\times M}_{\in \mathbb{Z}^+}$$

$$\rightarrow\ M = \overset{\circ}{4}$$

Análogamente al paso anterior, se tendría que

$$M = \overset{\circ}{6} \wedge M = \overset{\circ}{5}$$

$$\rightarrow\ M = \begin{cases}\overset{\circ}{4}\\ \overset{\circ}{6}\\ \overset{\circ}{5}\end{cases}$$

Luego,

$$M = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(4;6;5)}} = \overset{\circ}{\overline{60}} = 60K;\ K \in \mathbb{Z}^+$$

Sea V la cantidad de varones encuestados.

$$\rightarrow\ \underset{\downarrow}{V} + \underset{\downarrow}{M} = 164;\ \ V < M$$

104	60	No cumple
44	120	Sí cumple

Por lo tanto, fueron encuestados 44 varones.

Problema 10

Un reciclador de botellas, al final de la semana cuenta las botellas que recicló de 12 en 12, de 15 en 15, y de 10 en 10; en los tres casos le quedaron 4 botellas. Si la cantidad de botellas es el mayor número posible de tres cifras, indique la suma de sus dos últimas cifras.

Resolución

Sea B la cantidad de botellas que recicló. Se sabe que

$$B = \begin{cases}\overset{\circ}{\overline{12}} + 4\\ \overset{\circ}{\overline{15}} + 4\\ \overset{\circ}{\overline{10}} + 4\end{cases}$$

$$\rightarrow\ B = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(12;15;10)}} + 4$$

$$B = \overset{\circ}{\overline{60}} + 4 = 60K + 4;\ \ K \in \mathbb{Z}$$

Por condición del problema, B es el mayor número de 3 cifras.

$$\rightarrow\ 60\underset{\substack{\downarrow\\ 16}}{\overset{\substack{\text{máximo}\\ \downarrow}}{K}} + 4 < 1000$$

Finalmente,

$$B = 60(16) + 4 = 964$$

Por lo tanto, la suma de sus dos últimas cifras es $6+4=10$.

Problema 11

N es un número que cuando se divide entre 12; 15; 18 y 21 se obtiene como residuo 7; 10; 13 y 16, respectivamente. Halle el producto de las cifras de N si se sabe que N es el menor número de cuatro cifras.

Resolución

Sea N el menor número de 4 cifras, además

$$N = \begin{cases}\overset{\circ}{\overline{12}} + 7 = \overset{\circ}{\overline{12}} - 5\\ \overset{\circ}{\overline{15}} + 10 = \overset{\circ}{\overline{15}} - 5\\ \overset{\circ}{\overline{18}} + 13 = \overset{\circ}{\overline{18}} - 5\\ \overset{\circ}{\overline{21}} + 16 = \overset{\circ}{\overline{21}} - 5\end{cases}$$

$\rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(12;15;18;21)}} - 5$

$N = \overset{\circ}{\overline{1260}} - 5 = 1260\underset{\downarrow \atop 1}{K} - 5;\ K \in \mathbb{Z}$

$N = 1255$

Por lo tanto, el producto de las cifras N es

$1 \times 2 \times 5 \times 5 = 50$

Problema 12

Andrés tiene pegadas entre 400 y 500 figuras en su álbum. Si las cuenta de 8 en 8, le quedan 5; si las cuenta de 13 en 13, le quedan 6. Halle la cantidad de figuras que pegó Andrés y dé como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución

Sea F la cantidad de figuras que ha pegado Andrés.

Se sabe que

$400 < F < 500 \qquad (*)$

$$F = \begin{cases} \overset{\circ}{8} + \underline{5 + 40} = \overset{\circ}{8} + 45 \\ \overset{\circ}{\overline{13}} + \underline{6 + 39} = \overset{\circ}{\overline{13}} + 45 \end{cases}$$

Entonces

$F = \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(8;13)}} + 45$

$F = \overset{\circ}{\overline{104}} + 45 = 104K + 45;\ K \in \mathbb{Z}$

Reemplazamos en (*).

$400 < 104\underset{\downarrow \atop 4}{K} + 45 < 500$

$\rightarrow F = 104(4) + 45 = 461$

Por lo tanto, la suma de cifras es 11.

Problema 13

Indique el número por el que siempre es divisible $N = \overline{ababab}_3$.

Resolución

Tenemos que $N = \overline{ababab}_3$.

Descomponemos polinómicamente en bloques a N para encontrar alguno de sus factores.

$N = \overline{ab}_3 \times 3^4 + \overline{ab}_3 \times 3^2 + \overline{ab}_3$

$N = 91 \times \overline{ab}_3$

$N = \overset{\circ}{\overline{91}}$

$\rightarrow N = \overset{\circ}{\overline{(\text{divisores de } 91)}}$

Los divisores de 91 son 1; 7; 13 y 91.

$$\therefore N = \begin{cases} \overset{\circ}{1} \\ \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{\overline{13}} \\ \overset{\circ}{\overline{91}} \end{cases}$$

Problema 14

Al dividir $\overline{abba}_5$ entre 8, se obtiene 2 por residuo. Al respecto, señale la alternativa correcta.

A) $a + b = \overset{\circ}{4}$

B) $a + b = \overset{\circ}{4} + 1$

C) $a + b = \overset{\circ}{4} - 1$

D) $a - b = \overset{\circ}{4} + 1$

E) $2a + b = \overset{\circ}{4} + 1$

Resolución

Se tiene que

$\overline{abba}_5 = \overset{\circ}{8} + 2$

Por descomposición polinómica

$$a\times 5^3+b\times 5^2+b\times 5+a=\overset{\circ}{8}+2$$

$$126a+30b=\overset{\circ}{8}+2$$

$$(\overset{\circ}{8}+6)a+(\overset{\circ}{8}+6)b=\overset{\circ}{8}+2$$

$$\rightarrow\ 6a+6b=\overset{\circ}{8}+2$$

$$3a+3b=\overset{\circ}{4}+1=\overset{\circ}{4}-3$$

$$\therefore\ a+b=\overset{\circ}{4}-1$$

Problema 15

Dino compró pantalones y casacas a S/70 y S/190, respectivamente, gastando en total S/1860. Indique si compró más pantalones o más casacas y cuánto más.

Resolución

Si compró P pantalones y C casacas, se tiene

$$70\times P+190\times C=1860$$

$$7\times P+19\times C=186$$

Expresamos todos los términos en función del módulo 7.

$$\underbrace{7P}+19C=186 \qquad (*)$$

$$\overset{\circ}{7}+(\overset{\circ}{7}+5)C=\overset{\circ}{7}+4$$

$$5C=\overset{\circ}{7}+4$$

5 Sí cumple
12 No cumple

Reemplazamos $C=5$ en (*).

$$7P+19(5)=186$$

$$7P=91$$

$$P=13$$

Por lo tanto, compró 8 unidades más de pantalones que de casacas.

Problema 16

Un alumno muy ordenado, al finalizar su ciclo anual, se percató de que tenía resueltos N problemas. Para relajarse, expresa dicha cantidad en los sistemas de numeración binario, quinario y senario, siendo las últimas cifras en cada caso 101; 3 y 25, respectivamente. Si N está comprendido entre 1000 y 1360, halle la suma de sus 2 últimas cifras.

Resolución

Se tiene

$$N=\begin{cases}\ldots 101_2=\overset{\circ}{8}+101_2\\ \ldots 3_5=\overset{\circ}{5}+3\\ \ldots 25_6=\overset{\circ}{\overline{36}}+25_6\end{cases}$$

Entonces

$$N=\begin{cases}\overset{\circ}{8}+5+48 \rightarrow \text{(siempre impar)}\\ \overset{\circ}{5}+3+50\\ \overset{\circ}{\overline{36}}+17+36\end{cases}$$

(empieza por el mayor módulo)

$$\rightarrow\ N=\overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(8;5;36)}}+53$$

$$N=\overset{\circ}{\overline{360}}+53=360K+53;\ K\in\mathbb{Z}$$

Se sabe que

$$1000<N<1360$$

$$1000<360\underset{\substack{\downarrow\\3}}{K}+53<1360$$

Luego,

$$N=360(3)+53=1133$$

Por lo tanto, la suma de sus dos últimas cifras es 3+3=6.

Problema 17

Si al dividir $\overline{ab10ab11ab12ab13ab14}_6$ entre 35 se obtiene 15 de residuo, ¿cuántos valores puede tomar $\overline{ab}$?

Resolución

Se tiene que

$$\overline{ab10ab11ab12ab13ab14}_6 = \overset{\circ}{\overline{35}}+15$$

Como el módulo $35=6^2-1$, entonces aplicamos el criterio de divisibilidad.

$$5\times\overline{ab}_6+10_6+11_6+12_6+13_6+14_6=\overset{\circ}{\overline{35}}+15$$

$$5\times\overline{ab}_6+40=\overset{\circ}{\overline{35}}+15$$

$$\overline{ab}_6+8=\overset{\circ}{\overline{7}}+3$$

$$\overline{ab}_6+5=\overset{\circ}{\overline{7}};\ 6\le\overline{ab}_6<6^2$$

$\rightarrow\ \overline{ab}_6$: 9; 16; 23; 30

Por lo tanto, $\overline{ab}$ puede tomar 4 valores.

Problema 18

El número de teléfono fijo de Valentino es un número capicúa de 7 cifras. Cuando Alejandra le pregunta por su número, él le dice que, al dividir dicho número entre 8; 9; 11 y 25, se obtiene por residuos 7; 5; 8 y 17, respectivamente. Si Alejandra responde correctamente, indique el producto de las tres primeras cifras de dicho número.

Resolución

Sea $\overline{abcdcba}$ el número telefónico.

$$\overline{abcdcba}=\begin{cases}\overset{\circ}{8}+7\rightarrow a \text{ es impar}\\ \left.\begin{array}{l}\overset{\circ}{9}+5+36\\ \overset{\circ}{\overline{11}}+8+33\end{array}\right\}\ \overset{\circ}{\overline{\text{MCM}(9;11)}}+41\\ \qquad\qquad\qquad\qquad \overset{\circ}{\overline{99}}+41\\ \overset{\circ}{\overline{25}}+17\end{cases}$$

$$\overline{ba}=\begin{cases}00+17=17 & \text{Sí cumple}\\ 25+17=42 & \text{No cumple}\\ 50+17=67 & \text{Sí cumple}\\ 75+17=92 & \text{No cumple}\end{cases}$$

Luego,

$$\overline{ba}=17$$

$$\overline{cba}=\underset{4}{\overset{\circ}{8}}+\underset{4+3}{7}\ \rightarrow\ \overline{ba}=\underset{17}{\overset{\circ}{4}}+3 \quad \text{No cumple}$$

$\rightarrow\ \overline{ba}=67$

Ahora hallamos c.

$$\overline{7\ 6c\ dc\ 67}=\overset{\circ}{\overline{99}}+41$$

$$7+\overline{6c}+\overline{dc}+67=\overset{\circ}{\overline{99}}+41$$

$$\underbrace{\overline{6c}+\overline{dc}}_{\text{par}}=\overset{\circ}{\overline{99}}-33=\underset{0}{\overset{\circ}{\overline{99}}}+66$$

$$\begin{array}{r}\overline{6c}+\\ \overline{dc}\\ \hline 66\end{array}\ \rightarrow\ c=3\ \wedge\ d=0$$

Verificamos que $\overline{cba}=\overset{\circ}{8}+7$

$$\overline{cba}=367=\overset{\circ}{8}+7 \quad \text{Sí cumple}$$

Por lo tanto, el producto de las tres primeras cifras del número es

$$a\times b\times c=(7)(6)(3)=126$$

Problema 19

Si $N=\overline{1abba6}^{mn8}$ se expresa en el sistema de numeración undecimal, indique su cifra de menor orden.

Resolución

En el sistema undecimal,

$$N=\overline{...x}_{11}=\overset{\circ}{\overline{11}}+x;\ \text{nos piden } x.$$

Entonces, expresamos N en función de $\overset{\circ}{\overline{11}}$.

Empezamos con

$$\begin{array}{cccccc} \overline{1} & a & b & b & a & 6 \\ -1 & 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{array}$$

$$-1+6=5=\overset{\circ}{\overline{11}}+5$$

$$\rightarrow \overline{1abba6}=\overset{\circ}{\overline{11}}+5$$

Luego,

$$N=\overline{1abba6}^{\overline{mn8}}=\overset{\circ}{\overline{11}}+x$$

$$N=\left(\overset{\circ}{\overline{11}}+5\right)^{\overline{mn8}}=\overset{\circ}{\overline{11}}+x$$

$$\rightarrow 5^{\overline{mn8}}=\overset{\circ}{\overline{11}}+x$$

Luego, los restos potenciales de 5 respecto al módulo 11 son

	5^0	5^1	5^2	5^3	5^4	5^5	...
mód (11) residuos	1	5	3	4	9	1	...

$g=5$

Como el exponente $=\overline{mn8}=\overset{\circ}{5}+3$

$\rightarrow$ residuo$=x=4$

Por lo tanto, la cifra de menor orden es 4.

Problema 20

Si $n\in\mathbb{Z}^+$, halle el residuo de dividir A entre 17.

$A=2^{6n+3}+3^{4n+2}-2^{8n+5}$

Resolución

Tenemos que

$$A=2^{6n+3}+3^{4n+2}-2^{8n+5}$$

$$A=2^3\left(2^6\right)^n+3^2\left(3^4\right)^n-2^5\left(2^4\right)^{2n}$$

Expresamos todos los términos en función de $\overset{\circ}{\overline{17}}$.

$$A=\underbrace{8\left(\overset{\circ}{\overline{17}}-4\right)^n+9\left(\overset{\circ}{\overline{17}}-4\right)^n}-32\left(\overset{\circ}{\overline{17}}-1\right)^{2n}$$

$$A=\underbrace{17\left(\overset{\circ}{\overline{17}}-4\right)^n}-\underbrace{\left(\overset{\circ}{\overline{17}}-2\right)\left(\overset{\circ}{\overline{17}}+1\right)}$$

$$A=\overset{\circ}{\overline{17}}-\left(\overset{\circ}{\overline{17}}-2\right)$$

$$A=\overset{\circ}{\overline{17}}-\overset{\circ}{\overline{17}}+2$$

$$A=\overset{\circ}{\overline{17}}+2$$

Por lo tanto, el residuo de dividir A entre 17 es 2.

Problema 21

Si $x\in\mathbb{Z}$, determine la suma de cifras del menor valor de x que tenga tres cifras, tal que $3x\equiv 1$ (mód. 8)

Resolución

Se tiene que

$$3x\equiv 1 \text{ (mód. 8)}$$

Por definición,

$$3x-1=\overset{\circ}{8}$$

$$3x=\overset{\circ}{8}+1$$

$$3x=\overset{\circ}{8}+1+8$$

$$x=\overset{\circ}{8}+3=8K+3;\ K\in\mathbb{Z}$$

Como x tiene 3 cifras.

$$\rightarrow \underset{\substack{\downarrow \\ \text{menor valor} \\ \downarrow \\ x=107}}{x} = \underset{\substack{\downarrow \\ 13}}{8K}+3\geq 100$$

Por lo tanto, la suma de cifras del menor valor de x de tres cifras es 8.

Test

1. Si $10=\overset{\circ}{m}$, indique la suma de valores de m.

A) 7 B) 8 C) 11
D) 17 E) 18

2. Si $A=\begin{cases}\overset{\circ}{6}+1\\ \overset{\circ}{4}+1\end{cases}$ y $A=\overset{\circ}{n}+1$,

indique el valor de n.

A) 24 B) 18 C) 15
D) 12 E) 10

3. Si $B=\begin{cases}\overset{\circ}{\overline{10}}+9\\ \overset{\circ}{\overline{15}}+14\end{cases}$

indique el residuo que se obtiene al dividir B entre 30.

A) 1 B) 7 C) 13
D) 17 E) 29

4. Halle el residuo que se obtiene al dividir $\overline{ab101}_2$ entre 8.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7

5. Si $3A=\overset{\circ}{\overline{31}}+21$, indique el residuo que se obtiene al dividir A entre 31.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 7 E) 10

6. Si $A=(\overset{\circ}{7}-2)(\overset{\circ}{7}+5)(\overset{\circ}{7}-1)$, halle el residuo que se obtiene al dividir A entre 7.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

7. $\overline{abcabc}$ siempre es divisible por

A) 3 B) 8 C) 12
D) 13 E) 17

8. Si $\overline{abc59d}=\overset{\circ}{8}+1$, halle el valor de d.

A) 1 B) 3 C) 5
D) 6 E) 7

9. Si $\overline{a2aa1a}=\overset{\circ}{3}+1$, halle la suma de valores de a.

A) 4 B) 5 C) 8
D) 10 E) 12

10. Si $\overline{aba}=\overset{\circ}{5}$ y $\overline{ccd}=\overset{\circ}{\overline{11}}$, halle $a+d$.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

11. Si $N=(\overline{a2}+\overline{a3}+\overline{a4})^{\overline{a2a3a4}}$, halle el residuo que se obtiene al dividir N entre 8.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 7

Claves

1 E 2 D 3 E 4 C 5 D 6 C 7 D 8 E 9 E 10 A 11 A

Problemas propuestos

Nivel básico

1. ¿Cuántos números de tres cifras del sistema de numeración octanario son divisibles por 6 y por 4?

A) 36 B) 37 C) 38
D) 40 E) 42

2. ¿Cuántos números de 4 cifras son $\overset{\circ}{6}$ y $\overset{\circ}{\overline{15}}$ pero no $\overset{\circ}{\overline{12}}$?

A) 1350 B) 750 C) 450
D) 180 E) 150

3. ¿Cuántos números de la forma $\overline{ab6}$ existen que sean $\overset{\circ}{\overline{12}}$?

A) 12 B) 14 C) 15
D) 17 E) 20

4. Halle el residuo de dividir A entre 16.
$A=\overline{n10101}_2\times\overline{ab232}_4-\overline{mn131}_8\times\overline{ba15}_{16}$

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

5. ¿Cuántos numerales de la forma $\overline{abc4}$ dejan residuo 10 cuando se dividen entre 18?

A) 50 B) 51 C) 99
D) 100 E) 101

6. Una embarcación de marineros naufragó. De los sobrevivientes, los 5/6 son casados y los 2/9 resultaron ilesos. ¿Cuántos se ahogaron si inicialmente eran 60? Considere que la cuarta parte de los sobrevivientes eran mujeres.

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

7. Jesús puede ahorrar S/30 diarios, pero cada día que se encuentra con su amiga María gasta S/7; y si no se encuentra con su amiga María, sale con Rosa, con quien gasta S/8. Si todos los días salió con una de dichas amigas, ¿cuántos días deben transcurrir como máximo para que ahorre S/223?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

8. Halle el producto de las cifras del mayor número de cuatro cifras del sistema decimal, tal que al expresarlo en los sistemas de numeración de base 7; 9; 12 y 15 terminen en 1; 3; 6 y 9, respectivamente.

A) 40 B) 216 C) 256
D) 432 E) 700

9. Halle la suma del menor y del mayor valor que puede tomar $\overline{ab}$, tal que

$$\overline{ab1}+3\times\overline{ab1}+5\times\overline{ab1}+7\times\overline{ab1}+\ldots+69\times\overline{ab1}=\overset{\circ}{\overline{343}}$$

A) 100 B) 105 C) 109
D) 115 E) 121

10. Si los estudiantes de un aula se agrupan de 10 en 10 o de 12 en 12, siempre sobran 8 estudiantes. Si se juntan con otras 2 aulas, cada una con la misma cantidad de estudiantes que la inicial, ahora el total de estudiantes se agrupan de 15 en 15. ¿Cuántos estudiantes faltarían para formar un grupo más de 15?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 9

Nivel intermedio

11. De los asistentes a una función de cine, se observa que la cantidad de adultos y de niños son $\overset{\circ}{\overline{18}}+10$ y $\overset{\circ}{\overline{12}}+7$, respectivamente. Si todos pagaron su entrada, pagando cada niño y cada adulto una cantidad de soles que son $\overset{\circ}{\overline{12}}+3$ y $\overset{\circ}{\overline{18}}+5$, respectivamente, halle el residuo que se obtiene al dividir la recaudación total entre 6.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

12. Al expresar

$$L=2\times\overline{n13}^{10}+4\times\overline{n15}^{12}+6\times\overline{n17}^{14}+8\times\overline{n19}^{16}+\ldots+60\times\overline{n71}^{68}$$

en la base 8, ¿cuál es su cifra de menor orden?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 6

13. Si el numeral $\overline{abc5}$ es divisible por 41, indique el residuo que se obtiene al dividir $\overline{7abc}$ entre 41.

A) 7 B) 9 C) 14
D) 20 E) 21

14. Halle un numeral comprendido entre 70 000 y 80 000 que sea igual a 45 veces el producto de sus cifras. Dé como respuesta la suma de sus dos cifras de mayor orden.

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 16

15. Halle el menor numeral de cuatro cifras que al ser dividido entre 31 deja 5 de residuo; además, al invertir el orden de sus cifras, resulta un numeral divisible por 9. Dé como respuesta la suma de sus dos últimas cifras.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 7 E) 10

16. Halle la suma de los valores que puede tomar b si $\overline{a5baa}=\overset{\circ}{\overline{28}}$.

A) 6 B) 10 C) 11
D) 13 E) 15

17. Halle el residuo que se obtiene al dividir $\overline{baba}$ entre 7 si se sabe que $\overline{56ab4}=\overset{\circ}{9}+4$ y $\overline{7ab25}=\overset{\circ}{\overline{11}}+8$.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 5 E) 6

18. Si al dividir el numeral $\overline{a31b95}$ entre 182 se obtiene 1 de residuo, halle el mayor valor de $(a+b)$.

A) 7 B) 9 C) 11
D) 12 E) 13

19. Determine la cantidad de cifras del menor número formado solo por cifras 3 que se debe sumar a $\overline{aabcabc45a}$ para obtener un número que sea $\overset{\circ}{7}+3$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

20. Fabiola invirtió S/2357 en la compra de cuadernos de 3 tipos: 11 cuadernos anillados, 231 cuadernos plastificados y 13 cuadernos simples. Los costos unitarios de cada tipo son una cantidad entera de soles menor que S/18 cada uno. Halle el precio del costo unitario de los cuadernos plastificados.

A) S/7 B) S/8 C) S/9
D) S/12 E) S/17

21. Sean

$A=\overline{a37b24}_8$

$B=\underbrace{\overline{(a+b)(a+b)(a+b)...(a+b)}}_{\overline{ab}\text{ cifras}}$

Si al dividir A entre 7 se obtiene 2 de residuo, halle el residuo que se obtiene al dividir B entre 8.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

22. Se sabe que

$\overline{ab54cd46}=\overset{\circ}{\overline{99}}+1$

$\overline{cd}-\overline{ab}=\overset{\circ}{\overline{53}}$

Halle el valor de $a\times b\times c\times d$ si cada letra diferente representa un valor diferente.

A) 196 B) 216 C) 252
D) 280 E) 360

23. Compré cuadernos de S/1; S/4 y S/12. ¿Cuántos cuadernos de cada uno de estos precios compré si en total compré 40 cuadernos, gastando un total de S/100?

A) 23; 6; 2 B) 26; 8; 1 C) 27; 10; 5
D) 28; 9; 3 E) 29; 7; 4

24. Calcule el residuo al dividir E entre 8.

$E=101^{100}+105^{104}+109^{108}+...+405^{404}$

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

25. Calcule las dos últimas cifras del desarrollo de $S=1!+3!+5!+...+2005!$ Dé como respuesta la suma de dichas cifras.

A) 10 B) 14 C) 8
D) 11 E) 9

26. Si al dividir N entre 9, el residuo es 5, halle b.

$N=\overline{200201202203204...997998999100010010b(b+1)}$

A) 1 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

27. Si $406^{\overline{ababb6}}=\overset{\circ}{\overline{13}}+9$

halle el mayor valor posible de $a+b$.

A) 18 B) 17 C) 16
D) 13 E) 10

28. Exprese el numeral $\overline{abc34}_6^{\overline{a1a1a}}$ en base 3. Dé como respuesta la suma de sus dos últimas cifras.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

29. Se tiene que $A=9^n-8$; $n\in\mathbb{Z}^+$.
Si A es divisible por 7, indique la forma de n.

A) $\overset{\circ}{3}$
B) $\overset{\circ}{3}+1$
C) $\overset{\circ}{3}+2$
D) $\overset{\circ}{5}+1$
E) $\overset{\circ}{5}-1$

30. A un acto teatral ingresaron 1370 personas, entre jóvenes y niños. El total de mujeres que ingresaron es los 3/11 de los jóvenes; la cantidad de personas que usan anteojos es igual a dos séptimos de la cantidad de jóvenes, y la tercera parte de los jóvenes llegaron tarde. ¿Cuántas mujeres llegaron tarde si es 1/5 del total de los que llegaron tarde; además, la cantidad de niños es menor que el número de mujeres?

A) 31 B) 44 C) 77
D) 101 E) 105

31. Si $\underbrace{\overline{a3b\,a3b\,a3b\ldots a3b}}_{51\text{ cifras}}=\overset{\circ}{\overline{36}}$, calcule la suma de los valores de $\overline{ab}$.

A) 128 B) 138 C) 136
D) 125 E) 140

32. Al dividir un número entre 11, el residuo es 3; al dividir otro número, también entre 11, el residuo es 6. Halle el residuo al dividir el producto de los dos números entre 11 y dé como respuesta el número de sistemas de numeración en los cuales dicho residuo al cuadrado se expresa como un numeral cuya cifra de menor orden sea máxima.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

33. Sea $N=\underbrace{32\,32\,32\,32\ldots}_{2015\text{ cifras}}{}_{15}$

Halle la suma de las dos últimas cifras al expresar N en base cinco.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 7 E) 9

34. Si $\underbrace{(444\ldots444)}_{85\text{ cifras}}{}^{\overline{ab}}=\overset{\circ}{7}-6$

¿cuántos valores toma $\overline{ab}$?

A) 20 B) 25 C) 30
D) 32 E) 47

Nivel avanzado

35. De la siguiente sucesión de segundo orden 60; 77; 96; 117; 140; ...
halle la suma de cifras del sexto término, que al dividirlo entre 13 deja residuo máximo.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 19 E) 20

36. Un comerciante invierte 1680 soles en la compra de polos, camisas y pantalones, cuyos costos unitarios son 60; 96 y 120 soles, respectivamente. Determine cuántas prendas adquirió como máximo si compró al menos dos prendas de cada tipo.

A) 25 B) 24 C) 23
D) 21 E) 20

37. Si $\overline{cabab}=\overset{\circ}{\overline{27}}+5$ y $\overline{a(a+3)ba(2b)}=\overset{\circ}{\overline{37}}+3$ halle $a+b-c$.

A) 3 B) 5 C) 6
D) 10 E) 11

38. Halle la suma de valores que puede tomar $\overline{ab}$ en $5\times\overline{ab0}^{\,2}=\overset{\circ}{\overline{11}}+1$.

A) 396
B) 420
C) 460
D) 484
E) 880

39. Si $512^{\overline{ARIT}^{\overline{METICA}}}=\overset{\circ}{\overline{11}}+5$ y $\overline{ARIT}=\overset{\circ}{\overline{5}}+4$ halle el mayor valor que puede tomar $\overline{CA}$.

A) 99 B) 98 C) 96
D) 86 E) 84

40. Consideremos la expresión
$E(n)=n^2+(n+1)^2+(n+2)^2+\ldots+(n+9)^2;\ n\in\mathbb{N}$
Entonces podemos decir que $E(n)=\overset{\circ}{\overline{11}}$, si

A) no existe $n\in\mathbb{N}/E(n)=\overset{\circ}{\overline{11}}$
B) $n\in\{11k-1/k\in\mathbb{N}\}$
C) $n\in\{11k+2/k\in\mathbb{N}\}$
D) $n\in\{11k+1/k\in\mathbb{Z}\}$
E) $n\in\{11m+1/m\in\mathbb{Z}_0^+\}$

41. Se sabe que $\overline{aaa7}^{\overline{aaa7}}=\overset{\circ}{5}+2$. Determine el menor resto de dividir $\overline{aaa}$ entre 7.

A) 0 B) 2 C) 4
D) 5 E) 6

42. ¿Cuál es el residuo que se obtiene al dividir $E=2^{3K+1}+2^{6K+4}+2^3$ entre 7; $K\in\mathbb{Z}^+$?

A) 1 B) 2 C) 6
D) 5 E) 4

43. Si $\underbrace{\overline{ababab...}}_{60\text{ cifras}}{}_7=...0_8$; $b>a$

calcule la suma de valores de $a+b$.

A) 11 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

44. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. Si a y b son números enteros no divisibles por 3, entonces la suma o la diferencia de ellos es un múltiplo de tres.

II. Si a y b son múltiplos de cuatro con $a>b>0$, entonces el cociente $\frac{a}{b}$ es un múltiplo de cuatro.

III. Si a y b son múltiplos de cinco con $a;b>0$, entonces MCD(a; b) es un múltiplo de cinco.

A) VVV B) VFV C) VFF
D) FVF E) FFF

45. Si $\overline{361a}^7=\overset{\circ}{\overline{56}}+35$, halle el residuo de dividir $\overline{aaa}$ entre 17.

A) 5 B) 1 C) 9
D) 13 E) 16

46. Karla invirtió S/4544 en la compra de pantalones y casacas, cuyos costos por unidad eran de S/112 y S/180, respectivamente. ¿Cuántos artículos compró en total si la cantidad de pantalones adquiridos fue la menor posible?

A) 20 B) 22 C) 24
D) 26 E) 28

47. Determine la última cifra al llevar al sistema decimal el número

$$\underbrace{(666...66_7)}_{\overline{abc0}_7\text{ cifras}}{}^{\overline{abc}!}$$

A) 0 B) 1 C) 3
D) 6 E) 8

48. Si $3x+9y=\overset{\circ}{\overline{15}}$ y $6x+10y=\overset{\circ}{\overline{14}}$, entonces $2x+y$ es siempre divisible por $\overline{a5}$; además, $x, y\in\mathbb{Z}$. Calcule a.

A) 3 B) 4 C) 5
D) 6 E) 7

49. Si $\overline{mnnmnn}_5=...2_{17}$, calcule $m+n$.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

50. Indique la secuencia correcta después de determinar si la proposición es verdadera (V) o falsa (F).

I. $-3\equiv-9$ (mód 6)

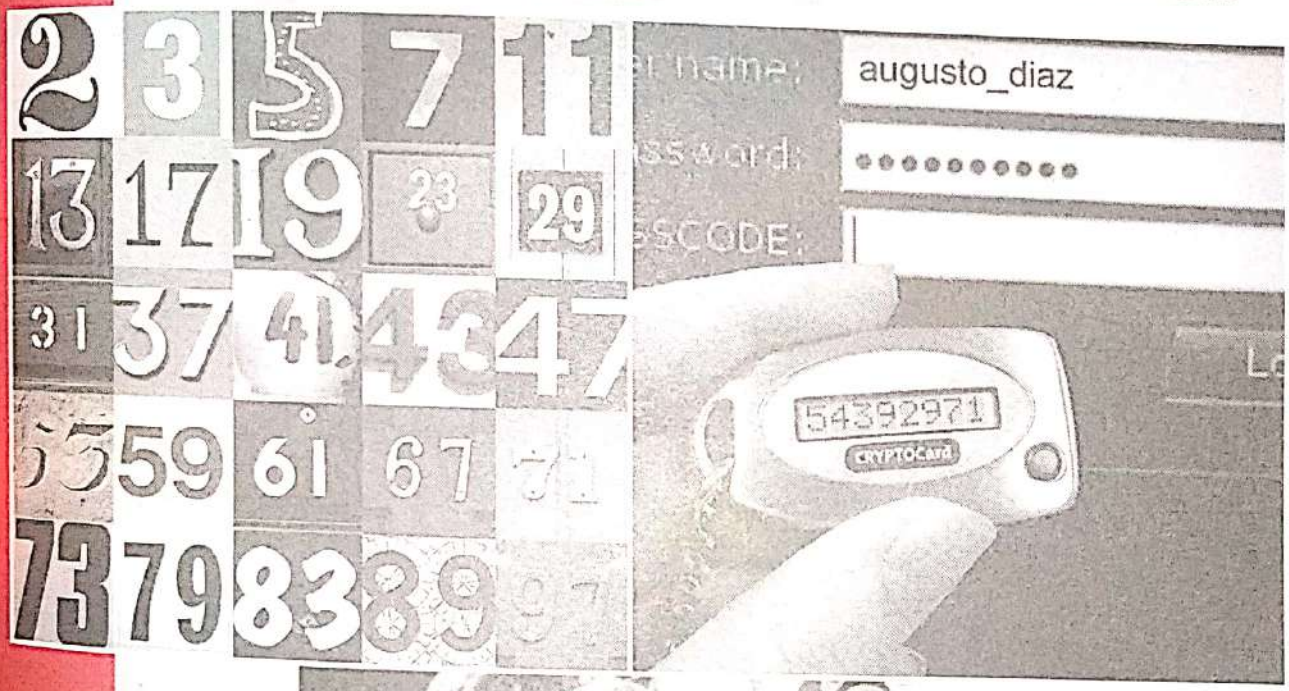
II. $19\equiv-5$ (mód 7)

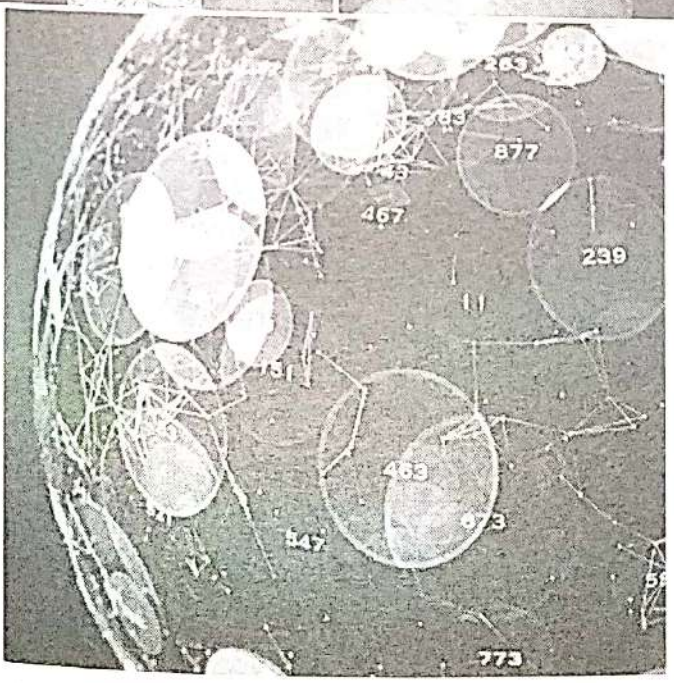
III. $x\equiv5$ (mód 8) $\rightarrow$ $x\in\{8n+5/n\in\mathbb{Z}\}$

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFV E) FVF

Capítulo

VIII





Estudio de los divisores enteros positivos de un número

Arturo Sánchez Vásquez

CAPÍTULO VIII

ESTUDIO DE LOS DIVISORES ENTEROS POSITIVOS DE UN NÚMERO

Objetivos

- Aprender a clasificar los números enteros positivos según su cantidad de divisores enteros positivos.
- Reconocer las propiedades de los números primos y números primos relativos, así como sus aplicaciones.
- Aprender a descomponer canónicamente un número entero positivo y obtener información acerca de sus divisores.

Introducción

¿Qué sabemos de los números primos? Sabemos que la sucesión de dichos números es infinita, que no siguen una regla general y que no hay fórmula alguna que determine todos los números primos. Pierre de Fermat (1607 - 1665) enunció que $2^{2^n}+1$ es un número primo para todo n natural; sin embargo, Leonhard Euler (1707 - 1783), en 1732, comprobó que para $n=5$ se obtiene el número compuesto $4\,294\,967\,297=641\times 6\,700\,417$.

A pesar del desorden que presentan los números primos, son estos los números enteros positivos más fascinantes dentro de las matemáticas, ya que con ellos podemos formar cualquier entero positivo (excepto la unidad). Estos números pudieron atrapar por su belleza a grandes matemáticos como Euclides, Fermat, Euler, Gauss, Riemann, Ramanujan, entre otros.

En la actualidad, la importancia de los números primos es vital en la seguridad informática, como por ejemplo, en las transacciones bancarias (virtuales o con tarjetas), protege nuestra computadora, laptop o tablet cuando navegamos por internet; en general, protege datos digitales. Aquí entra a tallar la criptografía que tiene como base la aritmética modular (que mencionamos en el capítulo de teoría de la divisibilidad) y los números primos, principalmente.

El contenido del presente capitulo está organizado de la siguiente manera: al inicio de la teoría encontraremos la clasificación de los números enteros positivos, las propiedades de los números primos, la criba de Erastótenes, el teorema fundamental de la aritmética y la clasificación de los números enteros positivos en grupos de dos o más números; más adelante veremos el estudio de los divisores enteros positivos de un número entero positivo, la descomposición canónica del factorial de un número, las formas de descomponer a un entero positivo como el producto de dos de sus divisores, la función de Euler y finalmente algunos complementos importantes.

1▸ CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

Dado el conjunto de los números enteros positivos $\mathbb{Z}^+ = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; ...\}$.

Los elementos de este conjunto pueden clasificarse según alguna característica en particular. Así, por ejemplo, si los clasificamos por su cantidad de cifras, tendríamos lo siguiente:

- Números de una cifra
  $\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$
- Números de dos cifras
  $\{10; 11; 12; 13; 14; ...; 98; 99\}$
- Números de tres cifras
  $\{100; 101; 102; 103; ...; 998; 999\}$

así sucesivamente.

Y si los clasificamos por su paridad, tendríamos lo siguiente:

- Números pares
  $\{2; 4; 6; 8; 10; 12; 14; ...\}$
- Números impares
  $\{1; 3; 5; 7; 9; 11; 13; 15; ...\}$

En el presente capítulo, clasificaremos los números enteros positivos según la cantidad de divisores enteros positivos que tiene cada uno.

A continuación, veamos la cantidad de divisores enteros positivos que tienen los primeros enteros positivos.

Número	Divisores	Cantidad de divisores
1	1	1
2	1 2	2
3	1 3	2
4	1 2 4	3
5	1 5	2
6	1 2 3 6	4
7	1 7	2
8	1 2 4 8	4
9	1 3 9	3
⋮	⋮	⋮

1.1. CLASIFICACIÓN SEGÚN LA CANTIDAD DE DIVISORES ENTEROS POSITIVOS

1.1.1. Números simples

Son aquellos enteros positivos que tienen únicamente uno o dos divisores enteros positivos. Estos son la unidad y los números primos.

a. La unidad

Es el único entero positivo que tiene un solo divisor entero positivo, que es él mismo.

Número	1
Divisor	1

b. Los números primos

Son aquellos enteros positivos que tienen exactamente dos divisores enteros positivos, que son la unidad y el mismo número. También se les denomina números primos absolutos.

Ejemplos

Números primos	2	3	5	7	11	13	...
Sus divisores enteros positivos	1 2	1 3	1 5	1 7	1 11	1 13	... ...

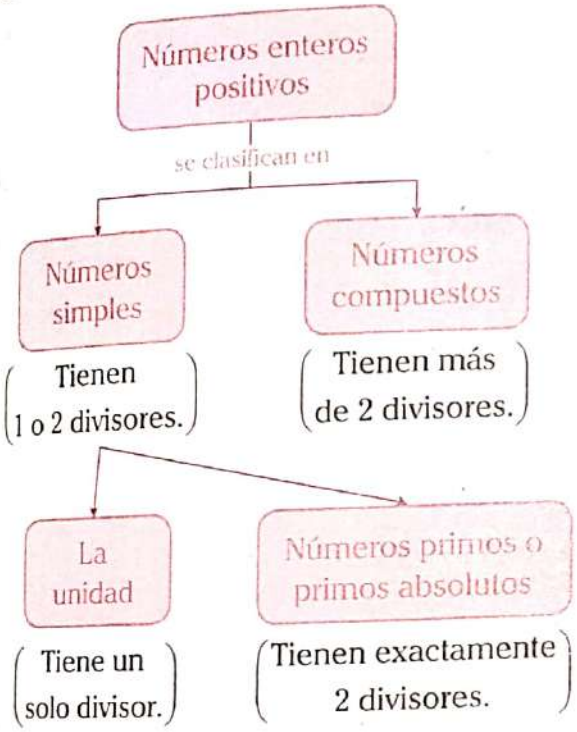
1.1.2. Números compuestos

Son aquellos enteros positivos que tienen más de dos divisores enteros positivos.

Ejemplos

Números compuestos	4	6	8	9	10	12	14	...
Sus divisores enteros positivos	1 2 4	1 2 3 6	1 2 4 8	1 3 9	1 2 5 10	1 2 3 4 6 12	1 2 7 14	... ...

En resumen, tenemos lo siguiente:



Observación

- La unidad es el único entero positivo que tiene un solo divisor entero positivo.
- El primer número primo es 2.
- El primer número compuesto es 4.

Teorema

Si un número es compuesto, entonces su menor divisor mayor que 1 es primo.

Demostración

Sea N un número compuesto y a es su menor divisor mayor que 1.

$\rightarrow N=\overset{\circ}{a};\ 1<a<N$

- Si a es primo, ya está demostrado el teorema.
- Si a no es primo, entonces a tendría un divisor b $(b<a)$.

$\rightarrow a=\overset{\circ}{b}$

y por lo tanto, b también sería divisor de N.

$\rightarrow N=\overset{\circ}{b};\ 1<b<a<N$

lo cual contradice lo supuesto.

Importante

Todo número compuesto está formado de al menos un número primo. Por lo tanto, bastará analizar los divisores primos que tiene un número, ya que con ellos se formarán los números compuestos. De allí la necesidad de estudiar las propiedades de los números primos.

2▸ PROPIEDADES DE LOS NÚMEROS PRIMOS

Propiedad 1

La sucesión de los números primos es infinita.
2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; ...

Demostración

Sea p el mayor número primo y
$N=2\times3\times5\times7\times...\times p+1;\ N>p$

Entonces

- si N es primo, ya estaría demostrado.
- si N es compuesto, tendría al menos un divisor primo que no es 2; 3; 5; 7; ...; ni p, ya que N no es divisible por estos números primos.

$$N=\begin{cases}\overset{\circ}{2}+1\\ \overset{\circ}{3}+1\\ \overset{\circ}{5}+1\\ \overset{\circ}{7}+1\\ \vdots\\ \overset{\circ}{p}+1\end{cases}$$

Por lo tanto, siempre habrá un número primo mayor que p, es decir, la sucesión de los números primos es infinita.

Observación

Los números primos menores que 100 son los siguientes:

2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89; 97

- Hay 4 números primos de una cifra.
- Hay 21 números primos de dos cifras.
- Hay 25 números primos que son menores que 100.

Propiedad 2

El único número primo $\overset{\circ}{a}$ es a.

Demostración

Sea N un número primo $\overset{\circ}{a}$,

$\rightarrow\ N=\overset{\circ}{a}=ak;\ k\in\mathbb{Z}^+$

- Si $k=1$, entonces $N=a$

  Por lo tanto, N tiene dos divisores que son 1 y a.

- Si $k\neq 1$, entonces $N=ak$.

  Por lo tanto, N tiene por lo menos tres divisores que son 1, a y ak; es decir, N es compuesto y contradice lo supuesto.

Consecuencias

1. El único número primo $\overset{\circ}{2}$ es 2, es decir, ningún número primo mayor que 2 es $\overset{\circ}{2}$. Por lo tanto, el único número primo par es 2, es decir, todo número primo mayor que 2 es impar.
2. El único número primo $\overset{\circ}{3}$ es 3, es decir, ningún número primo mayor que 3 es $\overset{\circ}{3}$.
3. El único número primo $\overset{\circ}{5}$ es 5, es decir, ningún número primo mayor que 5 es $\overset{\circ}{5}$.

Aplicación 1

Si $\overline{ab}$ es primo, halle la suma de valores que puede tomar b.

Resolución

Como $\overline{ab}$ es primo y mayor que 2, entonces $\overline{ab}$ es impar.

Además; $\overline{ab}\neq\overset{\circ}{5}$

$\downarrow$

1 Ejemplo: 31
3 Ejemplo: 53
7 Ejemplo: 97
9 Ejemplo: 79

$\rightarrow\ 1+3+7+9=20$

Por lo tanto, la suma de valores que puede tomar b es 20.

Propiedad 3

2 y 3 son los únicos números consecutivos que son primos.

Demostración

Supongamos que existen otros dos números consecutivos que son primos. Por ser consecutivos, uno de ellos debe ser $\overset{\circ}{2}$ y por la propiedad 2 sabemos que el único primo $\overset{\circ}{2}$ es el 2, lo cual contradice el supuesto.

Por lo tanto, 2 y 3 son los únicos números consecutivos que son primos.

Propiedad 4

3, 5 y 7 es la única terna de números impares consecutivos que son primos.

Demostración

Sean n, $(n+2)$ y $(n+4)$ tres números impares consecutivos.

Recuerde que en una terna de números impares consecutivos solo uno de ellos es $\overset{\circ}{3}$.

Veamos.

n	$(n+2)$	$(n+4)$	
$\overset{\circ}{3}$	$\overset{\circ}{3}+2$	$\overset{\circ}{3}+1$	(I)
$\overset{\circ}{3}+1$	$\overset{\circ}{3}$	$\overset{\circ}{3}+2$	(II)
$\overset{\circ}{3}+2$	$\overset{\circ}{3}+1$	$\overset{\circ}{3}$	(III)

Además, por la propiedad 2, se sabe que el único número primo $\overset{\circ}{3}$ es el 3.

Luego,

	n	$(n+2)$	$(n+4)$
De (I)	3	5	7
De (II)	1	3	5
De (III)	−1	1	3

Por lo tanto, 3; 5 y 7 es la única terna de números impares consecutivos que son primos.

Propiedad 5

Todo número primo mayor que 2 tiene la forma $\overset{\circ}{4}+1$ o $\overset{\circ}{4}-1$.

Demostración

Sea N un número primo mayor que 2.

Por la propiedad 2 se sabe que todo número primo mayor que 2 es impar.

Además, si dividimos N entre 4, los posibles restos son 0; 1; 2 y 3.

Luego,

$N=$
- $\overset{\circ}{4}$ — No cumple porque es par.
- $\overset{\circ}{4}+1$ — Puede ser primo.
- $\overset{\circ}{4}+2$ — No cumple porque es par.
- $\underbrace{\overset{\circ}{4}+3}_{4-1}$ — Puede ser primo.

Por lo tanto, todo número primo mayor que 2 tiene la forma $\overset{\circ}{4}+1$ o $\overset{\circ}{4}-1$.

Ejemplos

- $3=\overset{\circ}{4}-1$
- $5=\overset{\circ}{4}+1$
- $7=\overset{\circ}{4}-1$
- $11=\overset{\circ}{4}-1$
- $13=\overset{\circ}{4}+1$
- $17=\overset{\circ}{4}+1$
- $19=\overset{\circ}{4}-1$
- $23=\overset{\circ}{4}-1$

Importante

Lo contrario no siempre se cumple, es decir, si un número es $\overset{\circ}{4}+1$ o $\overset{\circ}{4}-1$, no significa que sea primo.

Ejemplos

- $35=\overset{\circ}{4}-1$, pero 35 no es primo.
- $49=\overset{\circ}{4}+1$, pero 49 no es primo.

Propiedad 6

Todo número primo mayor que 3 tiene la forma $\overset{\circ}{6}+1$ o $\overset{\circ}{6}-1$.

Demostración

Sea N un número primo mayor que 3.

Por la propiedad 2 se sabe que

- todo número primo mayor que 2 es impar.
- el único número primo $\overset{\circ}{3}$ es 3.

Además, si dividimos N entre 6, los posibles restos son 0; 1; 2; 3; 4 y 5.

Luego,

$N=$
- $\overset{\circ}{6}$ — No cumple porque es par y $\overset{\circ}{3}$.
- $\overset{\circ}{6}+1$ — Puede ser primo.
- $\overset{\circ}{6}+2$ — No cumple porque es par.
- $\overset{\circ}{6}+3$ — No cumple porque es $\overset{\circ}{3}$.
- $\overset{\circ}{6}+4$ — No cumple porque es par.
- $\underbrace{\overset{\circ}{6}+5}_{6-1}$ — Puede ser primo.

Por lo tanto, todo número primo mayor que 3 tiene la forma $\overset{\circ}{6}+1$ o $\overset{\circ}{6}-1$.

Ejemplos

- $5=\overset{\circ}{6}-1$
- $7=\overset{\circ}{6}+1$
- $11=\overset{\circ}{6}-1$
- $13=\overset{\circ}{6}+1$
- $17=\overset{\circ}{6}-1$
- $19=\overset{\circ}{6}+1$
- $23=\overset{\circ}{6}-1$
- $29=\overset{\circ}{6}-1$

Importante

Lo contrario no siempre se cumple, es decir, si un número es $\overset{\circ}{6}+1$ o $\overset{\circ}{6}-1$, no implica que sea primo.

Ejemplos

- $25=\overset{\circ}{6}+1$, pero 25 no es primo.
- $77=\overset{\circ}{6}-1$, pero 77 no es primo.

3 MÉTODO PARA DETERMINAR SI UN NÚMERO ES PRIMO O COMPUESTO

Sea N un número entero positivo, el cual queremos saber si es primo o compuesto, entonces seguiremos los siguientes pasos:

Paso 1

Se calcula la raíz cuadrada aproximada por defecto de N.

Paso 2

Se considera todos los números primos menores o iguales a dicha raíz cuadrada aproximada por defecto.

Paso 3

Se determina si N es o no divisible por cada uno de los números primos indicados en el paso anterior y en orden (2; 3; 5; 7; ...).

Paso 4

Podemos concluir lo siguiente:

- Si N no es divisible por ninguno de dichos números primos, entonces N es un número primo.
- Si N es divisible por al menos uno de dichos números primos, entonces N es un número compuesto.

Aplicación 2

¿211 es número primo o compuesto?

Resolución

Sigamos los pasos mostrados.

1. $\sqrt{211}$

   $14^2<211<15^2$

   $\sqrt{211}\approx 14$

2. $\overbrace{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13}^{\text{números primos}\ \leq 14}$

3. $211=\begin{cases}\overset{\circ}{2}+1\\ \overset{\circ}{3}+1\\ \overset{\circ}{5}+1\\ \overset{\circ}{7}+1\\ \overset{\circ}{11}+2\\ \overset{\circ}{13}+3\end{cases}$

4. 211 no es divisible por ninguno de dichos números primos, por lo tanto, 211 es número primo.

Aplicación 3

¿301 es número primo o compuesto?

Resolución

Sigamos los pasos mostrados.

1. $\sqrt{301}$

   $17^2<301<18^2$

   $\sqrt{301}\approx 17$

2. $\overbrace{2;\ 3;\ 5;\ 7;\ 11;\ 13;\ 17}^{\text{números primos}\ \leq 17}$

3. $301 = \begin{cases} \overset{\circ}{2}+1 \\ \overset{\circ}{3}+1 \\ \overset{\circ}{5}+1 \\ \overset{\circ}{7} \\ \vdots \end{cases}$

4. Basta con que 301 sea divisible por uno de dichos números primos para afirmar que 301 es un número compuesto.

4 La criba de Eratóstenes

Entre los primeros métodos que se emplearon para obtener los números primos, se encuentra uno llamado la criba de Eratóstenes, en honor a Eratóstenes de Cirene (273 - 194 a. n. e.), matemático, astrónomo y geógrafo griego, quien fue director de la biblioteca de Alejandría.

Eratóstenes ideó un método que funcionaba como una criba, es decir, como un filtro, un colador, que le permitía realizar un tamizado, dejando pasar los números compuestos y reteniendo a los números primos.

A continuación, ilustraremos este método con un ejemplo para hallar los números primos en los 100 primeros números naturales.

1. Tomamos el primer número primo, que es el 2, que como ya se demostró es el único primo $\overset{\circ}{2}$; luego eliminamos (tachamos) todos los siguientes números que son $\overset{\circ}{2}$.

	②	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	9	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	15	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
21	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	27	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	33	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	39	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	45	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
51	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	57	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	63	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	69	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	75	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
81	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	87	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	93	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	99	~~100~~

2. Ahora tomamos el primer número que quedó sin tachar, que es el 3, el cual es primo, y eliminamos todos los siguientes números que son $\overset{\circ}{3}$, ya que ninguno de ellos es primo.

	②	③	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	25	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	35	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	55	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	65	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	70
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	85	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	95	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

3. De la misma forma, tomamos el primer número que quedó sin tachar, que es el 5, el cual es primo, y eliminamos todos los siguientes números que son $\overset{\circ}{5}$, ya que ninguno de ellos es primo.

	②	③	~~4~~	⑤	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	49	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	77	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
91	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

4. Finalmente, tomamos el primer número que quedó sin tachar, que es el 7, el cual es primo y eliminamos todos los siguientes números que son $\overset{\circ}{7}$, ya que ninguno de ellos es primo.

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

5. Ahora podemos afirmar que, de los 100 primeros números naturales, los que quedaron después del tamizado son todos números primos:

   2; 3; 5; 7; 11; 13; 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61; 67; 71; 73; 79; 83; 89 y 97

5▸ TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA ARITMÉTICA

> "Cualquier número compuesto puede resolverse en factores primos de una manera única".
>
> Carl Friedrich Gauss
>
> *Disquisitiones Arithmeticae*

Como ya vimos, todo número compuesto está formado por al menos un número primo, por lo tanto, todos los números se pueden expresar en factores primos.

Ahora demostraremos que hay una manera única de expresar cada número en factores primos, excepto por el orden en que aparecen los factores primos.

Demostración

Supongamos que hay más de una forma de descomponer al número compuesto N en factores primos.

Sean

- $N \in \mathbb{Z}^+$
- a_i y b_i números primos

$$N=a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_p=b_1\times b_2\times b_3\times\ldots\times b_q$$

donde

$$a_1 \le a_2 \le a_3 \le \ldots \le a_p$$
$$b_1 \le b_2 \le b_3 \le \ldots \le b_q$$

Si cancelamos los primos iguales, entonces queda

$$N=a_1'\times a_2'\times a_3'\times\ldots\times a_m'=b_1'\times b_2'\times b_3'\times\ldots\times b_n'$$

donde todos los a_i' y b_i' son números primos diferentes entre sí.

Entonces

$$\underbrace{a_2'\times a_3'\times\ldots\times a_m'}_{\in\mathbb{Z}^+}=\frac{b_1'\times b_2'\times b_3'\times\ldots\times b_n'}{a_1'}$$

Es decir, a_1' divide a algún b_i', lo cual contradice que todos los a_i' y b_i' son números primos diferentes entre sí.

Por lo tanto, el número compuesto N solo se puede expresar en factores primos de una manera única, excepto por el orden en que aparecen los factores primos.

Ejemplos

- $10=2\times5$
- $12=2\times2\times3$
- $16=2\times2\times2\times2$
- $36=2\times2\times3\times3$
- $60=2\times2\times3\times5$

6 DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA (D. C.)

Al representar un número compuesto N en factores primos, según el teorema fundamental de la aritmética, pueden presentarse factores primos repetidos, los cuales se pueden agrupar y ordenar; es decir, N se puede representar como una multiplicación indicada de números primos diferentes entre sí elevados a exponentes enteros positivos. Dicha representación se denomina descomposición canónica.

Ejemplos

- $10=2\times5$ D. C.
- $12=2^2\times3$ D. C.
- $16=2^4$ D. C.
- $36=2^2\times3^2$ D. C.
- $60=2^2\times3\times5$ D. C.

Aplicación 4

¿Cómo se puede obtener la D. C. de 720?

Resolución

Veremos algunas formas de realizar la D. C. de 720.

1. Dividiendo entre sus divisores primos

$$\begin{array}{r|l} 720 & 2 \\ 360 & 2 \\ 180 & 2 \\ 90 & 2 \\ 45 & 3 \\ 15 & 3 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \rightarrow 720=\underbrace{2^4\times3^2\times5}_{\text{D.C.}}$$

2. Usando los criterios de divisibilidad

$720 < \begin{cases} \overset{\circ}{\overline{10}} \text{ (termina en cero)} \\ \overset{\circ}{4} \text{ (por el numeral formado por sus dos últimas cifras)} \\ \overset{\circ}{9} \text{ (por la suma de sus cifras)} \end{cases}$

3. Combinando los dos puntos anteriores

$$\begin{array}{c} 720 < \begin{cases} \overset{\circ}{\overline{10}} \\ \overset{\circ}{9} \end{cases} \\ \downarrow \\ 72\times10 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 9\times8 \quad 2\times5 \\ \swarrow \quad \searrow \\ 3^2 \quad 2^3 \end{array}$$

Luego,

$720=2^4\times3^2\times5$ D. C.

En general

$$\boxed{N=\underbrace{p_1^{a_1}\times p_2^{a_2}\times p_3^{a_3}\times\ldots\times p_n^{a_n}}_{\text{D.C.}}}$$

donde

- $p_1, p_2, p_3, \ldots, p_n$ son números primos diferentes entre sí.
- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son enteros positivos.

Ejemplos

- $1024=2^{10}$ D. C.
- $1001=7\times11\times13$ D. C.

Importante

Todos los divisores primos de N están siempre en la descomposición canónica de N.

Aplicación 5

Halle el mayor valor que puede tomar $a+b$ en

$N=a^5\times(a+1)\times\overline{ab}$ D. C.

Resolución

Si N se encuentra descompuesto canónicamente, entonces

- a y $(a+1)$ son dos números consecutivos y primos a la vez, es decir, 2 y 3, respectivamente.

- $\overline{ab}=\overline{2b}$ es un número primo.

$$\begin{array}{c}\overline{2b}\\ \downarrow\\ 3\\ 9\end{array}$$

$$\rightarrow\ a+b=\begin{cases}2+3=5\\ 2+9=11\end{cases}$$

Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar $a+b$ es 11.

Aplicación 6

Halle el menor valor que puede tomar $m+n$ en $A=m(m+2)(m+4)\overline{mn}^2$ D.C.

Resolución

Si A se encuentra descompuesto canónicamente, entonces

- m, $(m+2)$ y $(m+4)$ son tres números impares consecutivos y primos a la vez, es decir, 3; 5 y 7, respectivamente.
- $\overline{mn}=\overline{3n}$ es un número primo

$$\begin{array}{c}\overline{3n}\\ \downarrow\\ 1\\ 7\end{array}$$

$$\rightarrow\ m+n=\begin{cases}3+1=4\\ 3+7=10\end{cases}$$

Por lo tanto, el menor valor que puede tomar $m+n$ es 4.

Aplicación 7

Si $A=35^n+35^{n+1}$; $n\in\mathbb{Z}^+$

halle la descomposición canónica de A.

Resolución

La idea es buscar factores primos y por la forma que presenta A es conveniente factorizar.

$$A=35^n(1+35)$$

$$A=35^n\times 36$$

$$A=(5\times 7)^n\times 2^2\times 3^2$$

$$\therefore\ A=2^2\times 3^2\times 5^n\times 7^n \qquad \text{D.C.}$$

Aplicación 8

Se sabe que $N=\overline{abab}_3$.

Si al expresar $\overline{ab}_3$ en base 10 resulta un número primo, halle las formas en que se puede descomponer N canónicamente.

Resolución

La idea es buscar factores primos y por la forma que presenta N es conveniente descomponerlo polinómicamente.

$$N=\overline{abab}_3=\overline{ab}_3\times 3^2+\overline{ab}_3$$

$$N=10\times\overline{ab}_3$$

$$N=2\times 5\times\overline{ab}_3 \qquad (*)$$

Sabemos que $\overline{ab}_3$ expresado en base 10 es un número primo.

$$\rightarrow\ \underbrace{10_3}_{3}\leq\underset{\substack{\downarrow\\ 3;\,5;\,7}}{\boxed{\overline{ab}_3}}<\underbrace{100_3}_{3^2}$$

Finalmente, reemplazamos en (*).

- $\overline{ab}_3=3\ \rightarrow\ N=2\times 3\times 5$ D.C.
- $\overline{ab}_3=5\ \rightarrow\ N=2\times 5^2$ D.C.
- $\overline{ab}_3=7\ \rightarrow\ N=2\times 5\times 7$ D.C.

Nota

Euclides, en su obra *Los elementos* (aprox. 300 a. n. e.), enunció algunas proposiciones que están relacionadas directamente con el teorema fundamental de la aritmética. Sin embargo, fue Gauss quien, en su obra *Disquisitiones Arithmeticae* (escrita en 1798 pero publicada en 1801), enunció y demostró por primera vez el teorema fundamental de la aritmética.

7. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS EN GRUPO DE DOS O MÁS NÚMEROS

7.1. NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ (PESI)

Dos o más números enteros positivos se denominan números primos entre sí (PESI), primos relativos o coprimos cuando el único divisor común que comparten es la unidad.

> **Importante**
> Si dos o más números son PESI, estos no poseen algún divisor común que sea primo y esto lo podemos verificar en su descomposición canónica.

Ejemplos

- 12: $\overbrace{1; 2; 3; 4; 6; 12}^{\text{divisores}}$
  35: 1; 5; 7; 35

  Divisor común: 1
  → 12 y 35 son números PESI.

  También
  $12=2^2\times3$ D.C.
  $35=5\times7$ D.C.

  Como no poseen algún divisor común que sea primo, entonces 12 y 35 son números PESI.

- 18: $\overbrace{1; 2; 3; 6; 9; 18}^{\text{divisores}}$
  21: 1; 3; 7; 21

  Divisores comunes: 1 y 3
  → 18 y 21 no son números PESI.

  También
  $18=2\times\underline{3}^2$ D.C.
  $21=\underline{3}\times7$ D.C.

  Como poseen un divisor común, que es primo, entonces 18 y 21 no son números PESI.

- 8: $\overbrace{1; 2; 4; 8}^{\text{divisores}}$
  20: 1; 2; 4; 5; 10; 20
  25: 1; 5; 25

  Divisor común: 1
  → 8; 20 y 25 son números PESI.

  También
  $8=2^3$ D.C.
  $20=2^2\times5$ D.C.
  $25=5^2$ D.C.

  Como no poseen algún divisor común que sea primo, entonces 8; 20 y 25 son números PESI.

  ¡Cuidado!
  - 5 es divisor común solo para 20 y 25.
  - 2 y 4 son divisores comunes solo para 8 y 20.
  - Si decimos que es divisor común de los números 8; 20 y 25, debe ser un divisor común para los 3, con dicha condición solo cumple la unidad.

- 10: $\overbrace{1; 2; 5; 10}^{\text{divisores}}$
  15: 1; 3; 5; 15
  50: 1; 2; 5; 10; 25; 50

  Divisores comunes: 1 y 5
  → 10; 15 y 50 no son números PESI.

  También
  $10=2\times\underline{5}$ D.C.
  $15=3\times\underline{5}$ D.C.
  $50=2\times\underline{5}^2$ D.C.

  Como poseen un divisor común que es primo, entonces 10; 15 y 50 no son números PESI.

Nota

- Si dos o más números son PESI, esto no implica que dichos números sean primos.

  Ejemplos

  - 4 y 9 son PESI y ninguno es primo.
  - 7 y 10 son PESI y solo uno es primo.
  - 5 y 11 son PESI y los dos son primos.

- Para determinar si dos o más números son PESI, basta analizar los factores primos en su descomposición canónica.

  Ejemplos

  - N es PESI con 7 (número primo)

    $\therefore\ N \neq 7$

  - N es PESI con 15 (número compuesto)

    $\rightarrow\ 15=3\times5$ D.C.

    $\therefore\ N \neq \begin{cases} \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{5} \end{cases}$

  - N es PESI con 144 (número compuesto)

    $\rightarrow\ 144=2^4\times3^2$ D.C.

    $\therefore\ N \neq \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{3} \end{cases}$

  Como solo depende de los factores primos, entonces decir que N es PESI con 144 equivale a decir que N es PESI con 6, ya que $6=2\times3$ (D.C.), tiene los mismos factores primos.

Aplicación 9

Si el numeral $\overline{aa}$ y 12 son PESI, halle la suma de valores que puede tomar a.

Resolución

Sabemos que $\overline{aa}$ y 12 son PESI.

Como $12=2^2\times3$ D.C.

$$\rightarrow\ \overline{aa} \neq \begin{cases} \overset{\circ}{2};\ (a \text{ es impar}) \\ \overset{\circ}{3};\ (\text{suma de cifras} \neq \overset{\circ}{3}) \end{cases}$$

Luego,

$$2a \neq \overset{\circ}{3}$$

$$a \neq \overset{\circ}{3}$$

$\rightarrow\ a$: 1; 5; 7

Por lo tanto, la suma de valores que puede tomar a es 13.

7.1.1. Propiedades de los números primos entre sí

Propiedad 1

Dos números enteros positivos y consecutivos siempre son números PESI.

Demostración

Sea $\{a; n\} \subset \mathbb{Z}^+$

Supongamos que a y $(a+1)$ no son números PESI, entonces comparten al menos un divisor común diferente de 1.

Sea n un divisor común de a y $(a+1)$; $n \neq 1$, entonces

$$\begin{array}{r} a+1=\overset{\circ}{n} \\ a=\overset{\circ}{n} \\ \hline 1=\overset{\circ}{n} \end{array} \ (-)$$

$\rightarrow\ n=1$ ¡Contradicción!

Por lo tanto, a y $(a+1)$ son números PESI.

Propiedad 2

Dos números impares positivos y consecutivos siempre son números PESI.

Demostración

Sea $\{a; n\} \subset \mathbb{Z}^+$

$\forall a \in \mathbb{Z}^+ : (2a-1)$ y $(2a+1)$

son impares positivos y consecutivos.

Ahora, supongamos que $(2a-1)$ y $(2a+1)$ no son números PESI, entonces comparten al menos un divisor común diferente de 1.

Sea n un divisor común de $(2a-1)$ y $(2a+1)$; $n \neq 1$ y $n \neq 2$ (porque los números son impares).

Entonces

$$\begin{array}{r} 2a+1=\overset{\circ}{n} \\ \underline{2a-1=\overset{\circ}{n}} \\ 2=\overset{\circ}{n} \end{array} \quad (-)$$

$\rightarrow n=1 \ \vee \ n=2$ ¡Contradicción!

Por lo tanto, $(2a-1)$ y $(2a+1)$ son números PESI.

Propiedad 3

Si en un conjunto de dos o más números enteros positivos uno de ellos es la unidad, entonces dichos números son PESI.

Demostración

Esta demostración es trivial, ya que el único divisor que comparte en común la unidad con el resto de los números es el 1. Por lo tanto, dichos números son PESI.

Propiedad 4

Si en un conjunto de más de dos números enteros positivos al menos dos de ellos son números PESI, entonces todos los números son PESI.

Demostración

Sean $a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_k$ números enteros positivos, donde a_1 y a_2 son números PESI.

Ahora supongamos que $a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_k$ no son números PESI, entonces comparten al menos un divisor común diferente de 1.

Sea n un divisor común de $a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_k$; $n \neq 1$

Entonces n también sería un divisor común de a_1 y a_2, es decir, a_1 y a_2 no serían PESI, lo cual es una contradicción.

Por lo tanto, $a_1; a_2; a_3; a_4; ...; a_k$ son números PESI.

Casos particulares

1. Más de dos números enteros positivos y consecutivos siempre son PESI.
2. Más de dos números impares positivos y consecutivos siempre son PESI.

Propiedad 5

Sea $\{A; B\} \subset \mathbb{Z}^+; A > B$

Si A y B son números PESI, entonces se cumple que

- A y $(A+B)$ son números PESI.
- A y $(A-B)$ son números PESI.
- B y $(A+B)$ son números PESI.
- B y $(A-B)$ son números PESI.

Demostración

Sea $n \in \mathbb{Z}^+$

tal que n es un divisor común de A y B.

Luego,

$$A=\overset{\circ}{n} \ \wedge \ B=\overset{\circ}{n}$$

Por propiedad

$$A+B=\overset{\circ}{n} \ \wedge \ A-B=\overset{\circ}{n}$$

Entonces n es divisor común de

- A y $(A+B)$
- A y $(A-B)$
- B y $(A+B)$
- B y $(A-B)$

Pero como A y B son números PESI, entonces $n=1$

Por lo tanto, se cumple que

- A y $(A+B)$ son números PESI.
- A y $(A-B)$ son números PESI.
- B y $(A+B)$ son números PESI.
- B y $(A-B)$ son números PESI.

7.2. NÚMEROS PRIMOS ENTRE SÍ 2 A 2 (PESI 2 A 2)

Dos o más números enteros positivos se denominan primos entre sí 2 a 2 si al tomar todas las combinaciones posibles de 2 en 2 en todos los casos resultan ser números PESI.

Ejemplos

- 9: $\overbrace{1; 3; 9}^{\text{divisores}}$
  16: 1; 2; 4; 8; 16
  35: 1; 5; 7; 35

  Analicemos los números de 2 en 2.
  - 9 y 16 son números PESI.
  - 9 y 35 son números PESI.
  - 16 y 35 son números PESI.

  Por lo tanto, 9; 16 y 35 son números PESI 2 a 2.

- 8: $\overbrace{1; 2; 4; 8}^{\text{divisores}}$
  25: 1; 5; 25
  45: 1; 3; 5; 9; 15; 45

  Analicemos los números de 2 en 2.
  - 8 y 25 son números PESI.
  - 8 y 45 son números PESI.
  - 25 y 45 **no son** números PESI.

  Por lo tanto, 8; 25 y 45 no son números PESI 2 a 2.

Propiedad

Si dos o más números son PESI 2 a 2, entonces dichos números siempre serán PESI.

Demostración

Sean $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ números PESI 2 a 2.

Entonces

- por definición de números PESI 2 a 2, a_1 y a_2 son números PESI.
- por la propiedad 4 de números PESI, si a_1 y a_2 son números PESI, entonces $a_1, a_2, a_3, a_4, ..., a_n$ son números PESI.

Ejemplo

9: $\overbrace{1; 3; 9}^{\text{divisores}}$
16: 1; 2; 4; 8; 16
25: 1; 5; 25

Analizando los números de 2 en 2, se tiene que

- 9 y 16 son números PESI.
- 9 y 25 son números PESI.
- 16 y 25 son números PESI.

Por lo tanto, 9; 16 y 25 son números PESI 2 a 2.

Además, su único divisor común es la unidad, por lo tanto, 9; 16 y 25 son números PESI.

Nota

De la última propiedad, lo contrario no siempre se cumple; es decir, si dos o más números son PESI, no necesariamente son PESI 2 a 2.

Ejemplo

9: $\overbrace{1; 3; 9}^{\text{divisores}}$
25: 1; 5; 25
35: 1; 5; 7; 35

→ divisor común=1

Por lo tanto, 9; 25 y 35 son números PESI. Sin embargo, si analizamos los números de 2 en 2, se tiene que

- 9 y 25 son números PESI.
- 9 y 35 son números PESI.
- 25 y 35 **no son** números PESI.

Por lo tanto, 9; 25 y 35 no son números PESI 2 a 2.

Aplicación 10

Si 12; 25 y $\overline{aa}$ son números PESI 2 a 2, halle la suma de valores que puede tomar a.

Resolución

Como 12; 25 y $\overline{aa}$ son números PESI 2 a 2, entonces

- 12 y 25 son números PESI.
- $\overline{aa}$ y 12 son números PESI.

Luego,

$12=2^2\times 3$ D.C.

$\rightarrow \overline{aa} \neq \begin{cases} \overset{\circ}{2} \ (a \text{ es impar}) \\ \overset{\circ}{3} \ (\text{suma de cifras} \neq \overset{\circ}{3}) \end{cases}$

$2a \neq \overset{\circ}{3}$

$a \neq \overset{\circ}{3}$

- $\overline{aa}$ y 25 son números PESI.

Luego,

$25=5^2$ D.C.

$\rightarrow \overline{aa} \neq \overset{\circ}{5}$

$a \neq \overset{\circ}{5}$

Vemos que

$a \neq \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{5} \end{cases}$

$\rightarrow a=1$ o $a=7$

Por lo tanto, la suma de valores que puede tomar a es 8.

8▸ ESTUDIO DE LOS DIVISORES ENTEROS POSITIVOS DE N

Sea la descomposición canónica del entero positivo N

$$\underbrace{N = a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times a_3^{\alpha_3} \times \ldots \times a_k^{\alpha_k}}_{\text{D.C}}$$

Consideraciones

1. Si un número primo es divisor de N, se denomina divisor primo de N.
2. Si un número simple es divisor de N, se denomina divisor simple de N.
3. Si un número compuesto es divisor de N, se denomina divisor compuesto de N.
4. Se denomina divisor propio de N a todo divisor diferente de N.

Ejemplo

Veamos los divisores enteros positivos de 12.

$$\overbrace{\underbrace{1;\ \underbrace{2;\ 3}_{\text{divisores primos}}}_{\text{divisores simples}};\ \underbrace{4;\ 6;\ 12}_{\text{divisores compuestos}}}^{\text{divisores propios}}$$

Tenga presente que los divisores primos de un número se encontrarán siempre en su descomposición canónica.

$12=2^2\times 3$ D.C.

Importante

- La unidad es el único entero positivo que no tiene divisor propio.
- Todo entero mayor que la unidad tiene divisor propio.

En el ejemplo anterior, podemos observar la cantidad de divisores que tiene el número 12, cómo se subdividen estos, que sus divisores suman 28, etc. Sin embargo, para un número con mayor cantidad de divisores se debe conocer una forma general para estudiar sus divisores; en estos casos debemos empezar por la descomposición canónica del número.

8.1. CANTIDAD DE DIVISORES DE N, CD(N)

Para calcular la cantidad de divisores de un número, primero analizaremos cuando un número tiene solo un divisor primo.

Ejemplo

Observamos que

$$\begin{array}{lll} 5=5^1\,(\text{D.C.}) & \rightarrow \overbrace{1;\,5^1}^{\text{divisores}} & : \text{CD}(5^1)=1+1 \\ 25=5^2\,(\text{D.C.}) & \rightarrow 1;\,5^1;\,5^2 & : \text{CD}(5^2)=2+1 \\ 125=5^3\,(\text{D.C.}) & \rightarrow 1;\,5^1;\,5^2;\,5^3 & : \text{CD}(5^3)=3+1 \\ \vdots & & \\ k\in\mathbb{Z}^+,\,5^k\,(\text{D.C.}) & \rightarrow 1;\,5^1;\,5^2;\,5^3;\,\ldots;\,5^k & : \text{CD}(5^k)=k+1 \end{array}$$

En general, si p es primo, $\alpha\in\mathbb{Z}^+$ y $N=p^\alpha$ (D.C.) se cumple

$$\boxed{\text{CD}(p^\alpha)=\alpha+1}$$

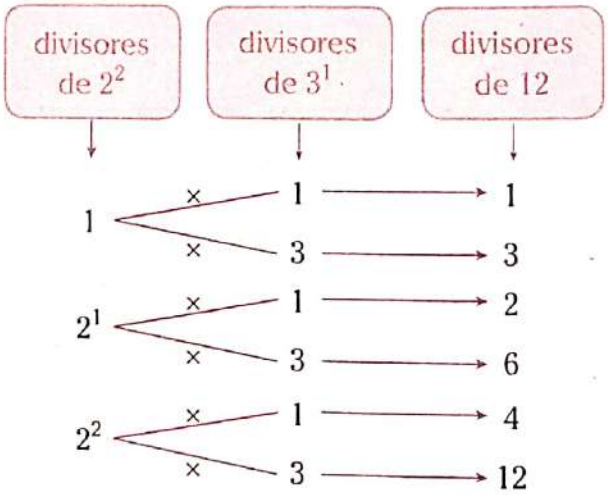
Ahora veamos cuando un número tiene de dos a más divisores primos.

Ejemplos

- Veamos el desarrollo para el número 12, el cual ya sabemos que tiene 6 divisores.

  $12=2^2\times3^1$ D.C.

  Luego obtenemos los divisores de 2^2 y 3^1 y los combinamos para obtener los divisores de 12.



Verificamos que 12 tiene 6 divisores.

Luego,

$$12=\underbrace{2^2}_{\substack{1\\2^1\\2^2}}\times\underbrace{3^1}_{\substack{1\\3^1}}\qquad\text{D.C.}$$

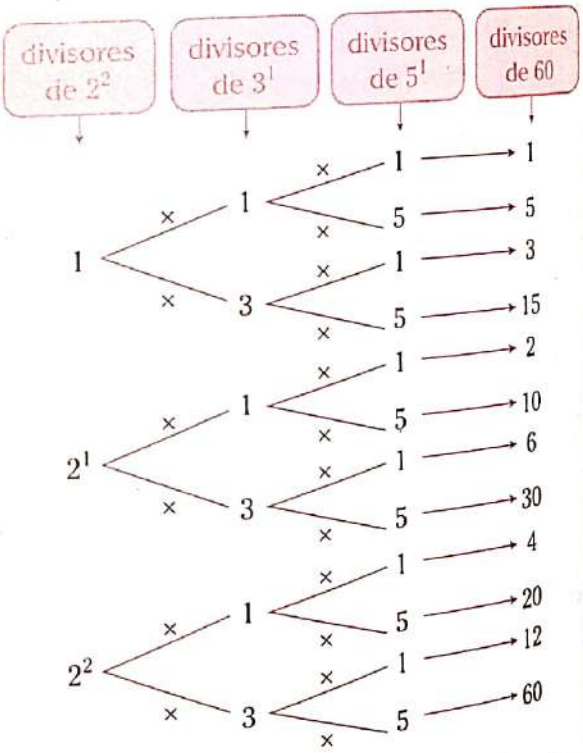
$$\text{CD}(12)=\text{CD}(2^2)\times\text{CD}(3^1)$$

$$\therefore\ \text{CD}(12)=(2+1)(1+1)=6$$

- Veamos el desarrollo para el número 60.

  $60=2^2\times3\times5$ D.C.

  Ahora obtenemos los divisores de 2^2, 3 y 5 y los combinamos para obtener los divisores de 60.



Observamos que 60 tiene 12 divisores.

Luego,

$$60=\underbrace{2^2}_{\substack{1\\2^1\\2^2}}\times\underbrace{3^1}_{\substack{1\\3^1}}\times\underbrace{5^1}_{\substack{1\\5^1}}$$

$$\text{CD}(60)=\text{CD}(2^2)\times\text{CD}(3^1)\times\text{CD}(5^1)$$

$$\therefore\ \text{CD}(60)=(2+1)(1+1)(1+1)=12$$

Podemos deducir, entonces, que para hallar la cantidad de divisores de un entero positivo, primero lo descomponemos canónicamente, luego aumentamos una unidad a cada exponente de los factores primos y los multiplicamos.

En general,

$$N = \underbrace{a_1^{\alpha_1} \times a_2^{\alpha_2} \times a_3^{\alpha_3} \times \ldots \times a_k^{\alpha_k}}_{\text{D.C.}}$$

Entonces

$$\boxed{CD(N) = (\alpha_1+1)(\alpha_2+1)(\alpha_3+1)\times\ldots\times(\alpha_k+1)}$$

Nota

La CD(N) es una función numérica multiplicativa, ya que

$$CD(N) = CD\left(a_1^{\alpha_1}\right)\times CD\left(a_2^{\alpha_2}\right)\times CD\left(a_3^{\alpha_3}\right)\times \ldots \times CD\left(a_k^{\alpha_k}\right)$$

cuando $a_1^{\alpha_1}; a_2^{\alpha_2}; a_3^{\alpha_3}; \ldots; a_k^{\alpha_k}$ son PESI 2 a 2.

Ejemplo

$$60 = \underbrace{2^2 \times 3^1 \times 5^1}_{\text{PESI 2 a 2}} \qquad \text{D.C.}$$

Entonces

- $CD(60) = CD(2^2)\times CD(3^1)\times CD(5^1)$
  $= 3\times 2\times 2 = 12$
- $CD(60) = \underbrace{CD(2^2)} \times \underbrace{CD(3^1\times 5^1)}$
  $= \quad 3 \quad \times \quad 4 = 12$
- $CD(60) = \underbrace{CD(2^2\times 3^1)} \times \underbrace{CD(5^1)}$
  $= \quad 6 \quad \times \quad 2 = 12$

Ahora analicemos los divisores enteros positivos de 90.

$$\underbrace{\underbrace{1;\ 2;\ 3;\ 5;}_{\text{divisores primos}}}_{\text{divisores simples}}\ \underbrace{6;\ 9;\ 10;\ 15;\ 18;\ 30;\ 45;\ 90}_{\text{divisores compuestos}}$$

Entonces

$$\underset{12}{CD(90)} = \underbrace{CD(\text{simples})} + \underset{8}{CD(\text{compuestos})}$$

$$12 = \underset{\substack{\uparrow \\ CD(\text{primos})}}{(1+3)} + 8$$

Se encuentran en su D.C.

Se cumple que

$$CD(N) = \boxed{CD(\text{simples})} + CD(\text{compuestos})$$

$$\boxed{1 + \boxed{CD(\text{primos})}}$$

$$\boxed{\text{en su D.C.}}$$

Aplicación 11

De los divisores de 180, determine lo siguiente:

I. ¿Cuántos son propios?
II. ¿Cuántos son primos?
III. ¿Cuántos son simples?
IV. ¿Cuántos son compuestos?
V. ¿Cuántos son $\overset{\circ}{\overline{10}}$?
VI. ¿Cuántos no son $\overset{\circ}{\overline{12}}$?
VII. ¿Cuántos son pares y cuántos son impares?

Resolución

En primer lugar, hallemos la cantidad de divisores de 180, para ello lo descomponemos canónicamente.

$$N = 180 = 2^2\times 3^2\times 5^1 \qquad \text{D.C.}$$

$\rightarrow$ $CD(N) = (2+1)(2+1)(1+1) = 18$

I. $CD(\text{propios}) = CD(N) - 1$
(No se considera el mismo número)

$\therefore$ $CD(\text{propios}) = 18 - 1 = 17$

II. $CD(\text{primos}) = 3$
Estos están en su D.C., son 2; 3 y 5.

III. $CD(\text{simples}) = 1 + CD(\text{primos})$

$\therefore$ $CD(\text{simples}) = 1 + 3 = 4$

IV. CD(compuestos)=¿?

$$\underbrace{CD(N)}_{18}=\underbrace{CD(\text{simples})}_{4}+CD(\text{compuestos})$$

$\therefore$ CD(compuestos)=14

V. $CD(\overset{\circ}{\overline{10}})$=¿?

Garantizamos que los divisores de N tengan el factor $10=2\times5$.

$$N=\underline{2\times5}\times\underline{(2^1\times3^2)}$$

Aquí hay 6 divisores.

$\boxed{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 9;\ 18}$

Cada uno de ellos se multiplica por 10.

$\underbrace{10;\ 20;\ 30;\ 60;\ 90;\ 180}_{}$

Estos son lo divisores de 180 que son $\overline{10}$.

Entonces, para calcular la $CD(\overset{\circ}{\overline{10}})$, factorizamos un 10 y calculamos la cantidad de divisores del número que queda, la cual resultará ser la respuesta.

$$N=\underline{\underline{2\times5}}\times\underbrace{(2^1\times3^2)}_{(1+1)(2+1)=\ 6\text{ divisores}}$$

$\therefore$ $CD(\overset{\circ}{\overline{10}})=6$

VI. $CD(\neq\overset{\circ}{\overline{12}})$= ¿?

En primer lugar, hallemos la $CD(\overset{\circ}{\overline{12}})$ y luego por complemento hallaremos lo que nos piden.

$CD(\overset{\circ}{\overline{12}})$=¿?

$$N=\underline{2^2\times3^1}\times\underbrace{(3^1\times5^1)}_{(1+1)(1+1)=4\text{ divisores}}$$

$\therefore$ $CD(\overset{\circ}{\overline{12}})=4$

Luego,

$CD(\neq\overset{\circ}{\overline{12}})=CD(N)-CD(\overset{\circ}{\overline{12}})$

$CD(\neq\overset{\circ}{\overline{12}})=18-4$

$\therefore$ $CD(\neq\overline{12})=14$

VII. CD(pares)=¿?

$CD(\text{pares})<>CD(\overset{\circ}{2})$

$$N=\underline{2}^1\times\underbrace{[2^1\times3^2\times5^1]}_{(1+1)(2+1)(1+1)=12\text{ divisores}}$$

$\rightarrow$ CD(pares)=12

Luego, por complemento hallamos la cantidad de divisores impares.

CD(impares)=CD(N)−CD(pares)

CD(impares)=18−12

$\therefore$ CD(impares)=6

Otra forma

En primer lugar, hallaremos la CD(impares) combinando solo los factores primos impares, ya que si tomamos al número primo 2 resultaría un divisor par.

$$N=2^2\times\boxed{3^2\times5^1}$$ D.C.

$(2+1)(1+1)=6$ divisores impares

$\rightarrow$ CD(impares)=6

Luego, por complemento,

CD(pares)=CD(N)−CD(impares)

CD(pares)=18−6

$\therefore$ CD(pares)=12

Nota

CD(impares) = $CD(\neq\overset{\circ}{2})$

Como 2 es un número primo, entonces

$CD(\neq\overset{\circ}{2})$=CD(PESI con 2)

Aplicación 12

Si $N=2^4\times3^2\times5^3\times7^1$ D.C.

determine lo siguiente:

I. La cantidad de divisores de N que son PESI con 2.

II. La cantidad de divisores de N que son PESI con 3.

III. La cantidad de divisores de N que son PESI con 5.

IV. La cantidad de divisores de N que son PESI con 7.

V. La cantidad de divisores de N que son PESI con 250.

VI. La cantidad de divisores de N que son PESI con 55.

VII. La cantidad de divisores de N que son $\overset{\circ}{\overline{21}}$ y PESI con 25.

VIII. La cantidad de divisores de N que son $\overset{\circ}{\overline{20}}$ y PESI con 91.

Resolución

Se tiene que

$N=2^4\times3^2\times5^3\times7^1$ D.C.

$\rightarrow$ CD(N)=(4+1)(2+1)(3+1)(1+1)=120

Recuerde

Si p es primo y A es PESI con p, entonces A no es múltiplo de p.

I. CD(PESI con 2)=CD($\neq\overset{\circ}{2}$)

$N=2^4\times\underbrace{\boxed{3^2\times5^3\times7^1}}_{(2+1)(3+1)(1+1)=24}$ D.C.

$\therefore$ CD(PESI con 2)=24

Además, por complemento podemos hallar la cantidad de divisores de N que no son PESI con 2.

CD(no PESI con 2)=CD(N)−CD(PESI con 2)

CD(no PESI con 2)=120−24

CD(no PESI con 2)=96

II. CD(PESI con 3)=CD($\neq\overset{\circ}{3}$)

$N=3^2\times\underbrace{\boxed{2^4\times5^3\times7^1}}_{(4+1)(3+1)(1+1)=40}$ D.C.

$\therefore$ CD(PESI con 3)=40

III. CD(PESI con 5)=CD($\neq\overset{\circ}{5}$)

$N=5^3\times\underbrace{\boxed{2^4\times3^2\times7^1}}_{(4+1)(2+1)(1+1)=30}$ D.C.

$\therefore$ CD(PESI con 5)=30

IV. CD(PESI con 7)=CD($\neq\overset{\circ}{7}$)

$N=7^1\times\underbrace{\boxed{2^4\times3^2\times5^3}}_{(4+1)(2+1)(3+1)=60}$ D.C.

$\therefore$ CD(PESI con 7)=60

Recuerde

Si B es compuesto y A es PESI con B, entonces A no es múltiplo de los divisores primos de B.

V. CD(PESI con 250)

$250=2^1\times5^3$ D.C.

Entonces buscamos los divisores de N que no son $\overset{\circ}{2}$ ni $\overset{\circ}{5}$.

$N=2^4\times5^3\times\underbrace{\boxed{3^2\times7^1}}_{(2+1)(1+1)=6}$ D.C.

$\therefore$ CD(PESI con 250)=6

VI. CD(PESI con 55)

$55=5^1\times11^1$ D.C.

Entonces buscamos los divisores de N que no son $\overset{\circ}{5}$ ni $\overset{\circ}{\overline{11}}$.

$N=5^3\times\underbrace{\boxed{2^4\times3^2\times7^1}}_{(4+1)(2+1)(1+1)=30}$ D.C.

$\therefore$ CD(PESI con 55)=30

VII. CD($\overset{\circ}{\overline{21}}$ y PESI con 25)

Primero garantizamos que los divisores de N sean PESI con 25.

$25=5^2$ D.C.

Entonces buscamos los divisores de N que no son $\overset{\circ}{5}$. Luego, garantizamos que estos divisores tengan el factor $21=3\times7$.

$$N=5^3\times\boxed{2^4\times3^2\times7^1}\qquad \text{D.C.}$$

$$\underline{\underline{3\times7}}\times\underbrace{(2^4\times3^1)}_{(4+1)(1+1)=10}$$

$\therefore\ \text{CD}(\overset{\circ}{21}\text{ y PESI con }25)=10$

VIII. $\text{CD}(\overset{\circ}{20}\text{ y PESI con }91)$

Primero garantizamos que los divisores de N sean PESI con 91.

$91=7\times13\qquad$ D.C.

Entonces buscamos los divisores de N que no son $\overset{\circ}{7}$ ni $\overset{\circ}{13}$. Luego, garantizamos que estos divisores tengan el factor $20=2^2\times5$.

$$N=7^1\times\boxed{2^4\times3^2\times5^3}\qquad \text{D.C.}$$

$$\underline{\underline{2^2\times5}}\times\underbrace{(2^2\times3^2\times5^2)}_{(2+1)(2+1)(2+1)=27}$$

$\therefore\ \text{CD}(\overset{\circ}{20}\text{ y PESI con }91)=27$

Aplicación 13

Determine la cantidad de divisores de 72 que son cuadrados perfectos.

Resolución

Los divisores de 72 son los siguientes:

1; 2; 3; 4; 6; 8; 9; 12; 18; 24; 36; 72

Los divisores cuadrados perfectos de 72 son 1; 4; 9 y 36.

Ahora, los encontraremos a partir de su descomposición canónica.

$72=2^3\times3^2\qquad$ D.C.

$$72=\underbrace{\underbrace{(2^1\times3^1)}_{(1+1)(1+1)=4}{}^2}_{\substack{\text{Elevamos al cuadrado}\\ \text{cada uno de estos divisores:}\\ 1;\ 2;\ 3\text{ y }6\\ 1^2=1;\ 2^2=4;\ 3^2=9;\ 6^2=36}}\times2^1$$

Por lo tanto, la $\text{CD}(k^2)$ es 4.

Otra forma

De la descomposición canónica, separamos los primos al cuadrado y los combinamos entre ellos.

$72=2^3\times3^2\qquad$ D.C.

$$72=\underbrace{(2^2)^1}_{\substack{1\\2^2}}\times\underbrace{(3^2)^1}_{\substack{1\\3^2}}\times2^1$$

$1\times1\to1;\ 2^2$

$2^2\times3^2\to3^2;\ 2^2\times3^2$

$\underbrace{(1+1)}\times\underbrace{(1+1)}=4$

$\therefore\ \text{CD}(k^2)=4$

De forma análoga, se puede hallar la cantidad de divisores cubos perfectos o de algunas otras potencias de un número.

Aplicación 14

Sea $N=2^6\times3^5\times7^2\qquad$ D.C.

determine lo siguiente:

I. La cantidad de divisores de N que son cuadrados perfectos.

II. La cantidad de divisores de N que son cubos perfectos.

Resolución

I. Piden $\text{CD}(k^2)$, entonces

- $N=(\underbrace{2^3\times3^2\times7^1}_{(3+1)(2+1)(1+1)=24})^2\times3$
- $N=\underbrace{(2^2)^3\times(3^2)^2\times(7^2)^1}_{(3+1)(2+1)(1+1)=24}\times3$

$\therefore\ \text{CD}(k^2)=24$

II. Piden $\text{CD}(k^3)$, entonces

- $N=(\underbrace{2^2\times3^1}_{(2+1)(1+1)=6})^3\times3^2\times7^2$
- $N=\underbrace{(2^3)^2\times(3^3)^1}_{(2+1)(1+1)=6}\times3^2\times7^2$

$\therefore\ \text{CD}(k^3)=6$

Aplicación 15

Sea $N=a^{2a}\times(a+1)^b$ D.C.

Halle el valor de b si se sabe que N tiene 37 divisores compuestos.

Resolución

Observamos que a y $(a+1)$ son números primos, entonces a es igual a 2.

Luego,

$N=2^4\times3^b$ D.C.

Además,

$$CD(N)=\underbrace{CD(\text{simples})}_{(1+2)}+\underbrace{CD(\text{compuestos})}_{37}$$

$\rightarrow$ $CD(N)=40$

$$(4+1)(\underbrace{b+1}_{8})=40$$

$\therefore$ $b=7$

8.2. SUMA DE DIVISORES DE N, SD(N)

Veamos los siguientes casos:

Caso 1

Si p es primo, sus únicos divisores son 1 y p, entonces

$$\boxed{SD(p)=p+1}$$

Ejemplos

- $SD(2)=2+1=3$
- $SD(3)=3+1=4$
- $SD(17)=17+1=18$

Caso 2

Si p es primo y $\alpha\in\mathbb{Z}^+$, entonces p^α es la D.C.

Ejemplos

- $5=5^1$ D.C.

$$SD(5)=1+5^1=\frac{5^2-1}{5-1}=6$$

- $25=5^2$ D.C.

$$SD(5^2)=1+5^1+5^2=\frac{5^3-1}{5-1}=31$$

- $125=5^3$ D.C.

$$SD(5^3)=1+5^1+5^2+5^3=\frac{5^4-1}{5-1}=156$$

$\vdots$

- 5^α D.C.

$$SD(5^\alpha)=1+5^1+5^2+5^3+...+5^\alpha=\frac{5^{\alpha+1}-1}{5-1}$$

En general, sea p^α la descomposición canónica

$\rightarrow$ $SD(p^\alpha)=1+p^1+p^2+p^3+...+p^\alpha$

$$\boxed{SD(p^\alpha)=\frac{p^{\alpha+1}-1}{p-1}}$$

Caso 3

Analicemos cuando en la descomposición canónica del número hay 2 o más números primos.

Ejemplos

- Los divisores de 12 son

  1; 2; 3; 4; 6; 12

  $SD(12)=28$

$$12=\underbrace{2^2}_{\substack{1\\2^1\\2^2}}\times\underbrace{3^1}_{\substack{1\\3^1}} \quad \text{D.C.}$$

$$SD(12)=(1+2^1+2^2)(1+3^1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$SD(12)=1+3^1+2^1+2^1\times3^1+2^2+2^2\times3^1$$

$$SD(12)=1+3+2+6+4+12$$

Entonces

$$SD(12)=(1+2^1+2^2)(1+3^1)$$

$$SD(12)=SD(2^2)\times SD(3^1)$$

$$SD(12)=\left(\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right)$$

$\therefore\ SD(12)=(7)(4)=28$

- Los divisores de 60 son
  1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 15; 20; 30; 60
  SD(60)=168

$$60=2^2\times 3^1\times 5^1 \qquad \text{D.C.}$$

$$\begin{array}{ccc} 1 & 1 & 1 \\ 2^1 & 3^1 & 5^1 \\ 2^2 & & \end{array}$$

$$SD(60)=(1+2^1+2^2)(1+3^1)(1+5^1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$SD(60)=(1+3+2+6+4+12)(1+5^1)$$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$SD(60)=1+5+3+15+2+10+6+30+4+20+12+60$$

Entonces

$$SD(60)=(1+2^1+2^2)(1+3^1)(1+5^1)$$

$$SD(60)=SD(2^2)\times SD(3^1)\times SD(5^1)$$

$$SD(60)=\left(\frac{2^{2+1}-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^{1+1}-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^{1+1}-1}{5-1}\right)$$

$\therefore\ SD(60)=(7)(4)(6)=168$

En general,

Sea $N=\underbrace{a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\ldots\times a_k^{\alpha_k}}_{\text{D.C.}}$

Entonces

$$SD(N)=SD\left(a_1^{\alpha_1}\right)\times SD\left(a_2^{\alpha_2}\right)\times SD\left(a_3^{\alpha_3}\right)\times\ldots\times SD\left(a_k^{\alpha_k}\right)$$

Finalmente,

$$SD(N)=\left(\frac{a_1^{\alpha_1+1}-1}{a_1-1}\right)\left(\frac{a_2^{\alpha_2+1}-1}{a_2-1}\right)\left(\frac{a_3^{\alpha_3+1}-1}{a_3-1}\right)\times\ldots\times\left(\frac{a_k^{\alpha_k+1}-1}{a_k-1}\right)$$

Nota

La SD(N) es una función numérica multiplicativa, ya que

$$SD(N)=SD\left(a_1^{\alpha_1}\right)\times SD\left(a_2^{\alpha_2}\right)\times SD\left(a_3^{\alpha_3}\right)\times\ldots\times SD\left(a_k^{\alpha_k}\right)$$

cuando $a_1^{\alpha_1}$; $a_2^{\alpha_2}$; $a_3^{\alpha_3}$; ... y $a_k^{\alpha_k}$ son PESI 2 a 2.

Ejemplos

- $120=2^3\times 3^1\times 5^1$ D.C.

  Entonces ya sabemos que

  $$SD(120)=\left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right)$$

  $\rightarrow\ SD(120)=360$

  Sin embargo, debemos tener presente que lo anterior equivale a

  $$120=\underbrace{2^3\times 3^1\times 5^1}_{\text{PESI 2 a 2}} \qquad \text{D.C.}$$

  Luego,

  $$SD(120)=SD(2^3)\times SD(3^1)\times SD(5^1)$$

  $\rightarrow\ SD(120)=(15)(4)(6)=360$

- $90=\underbrace{2^1\times 3^2\times 5^1}_{\text{PESI 2 a 2}}$ D.C.

  $\rightarrow\ SD(90)=SD(2^1)\times SD(3^2)\times SD(5^1)$

  $SD(90)=(3)(13)(6)=234$

Veamos los divisores enteros positivos de 90.

$$\underbrace{\underbrace{1; 2; 3; 5;}_{\text{divisores primos}}}_{\text{divisores simples}}\ \underbrace{6; 9; 10; 15; 18; 30; 45; 90}_{\text{divisores compuestos}}$$

$$\rightarrow \underset{234}{\underset{\downarrow}{SD(90)}} = \underbrace{SD(\text{simples})}_{\underset{\uparrow}{(1+10)}} + \underset{223}{\underset{\downarrow}{SD(\text{compuestos})}}$$

SD(primos)

Se encuentran en su D.C.

Entonces se cumple que

$$SD(N) = \boxed{SD(\text{simples})} + SD(\text{compuestos})$$

$$\boxed{1 + \boxed{SD(\text{primos})}}$$

$$\boxed{\text{en su D.C.}}$$

Aplicación 16

Del número 180 determine lo siguiente:

I. La suma de sus divisores

II. La suma de sus divisores propios

III. La suma de sus divisores simples

IV. La suma de sus divisores compuestos

V. La suma de sus divisores $\overset{\circ}{\overline{12}}$

VI. La suma de sus divisores $\overset{\circ}{\overline{10}}$

Resolución

En primer lugar, descomponemos canónicamente a 180.

$$N=180=2^2\times3^2\times5^1 \qquad \text{D.C.}$$

I. $SD(N)=SD(2^2)\times SD(3^2)\times SD(5^1)$

$SD(N)=(7)(13)(6)$

$\therefore\ SD(N)=546$

II. $SD(\text{propios de } N)=SD(N)-N$

$SD(\text{propios de } N)=546-180$

$\therefore\ SD(\text{propios de } N)=366$

III. $SD(\text{simples de } N)=1+SD(\text{primos de } N)$

$SD(\text{simples de } N)=1+(2+3+5)$

$\therefore\ SD(\text{simples de } N)=11$

IV. $\underbrace{SD(N)}_{546}=\underbrace{SD(\text{simples})}_{11}+SD(\text{compuestos})$

$\therefore\ SD(\text{compuestos de } N)=535$

V. $SD\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=¿?$

En primer lugar, garantizamos que los divisores de N tengan el factor $12=2^2\times3$.

$$N=\underline{2^2\times3}\times\underline{(3^1\times5^1)}$$

Aquí hay 4 divisores.

$$\boxed{1; 3; 5; 15}$$

Cada uno de ellos se multiplica por 12 y se suman.

$$\therefore\ SD\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=12+36+60+180=288$$

Lo que es equivalente a

$$N=\underline{2^2\times3}\times\underline{(3^1\times5^1)}$$

$$SD\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=12(1+3+5+15)$$

$$SD\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=12\times SD(3\times5)$$

$$SD\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=12\times SD\left(\frac{N}{12}\right)$$

VI. $SD(\overset{\circ}{\overline{10}})=¿?$

En primer lugar, garantizamos que los divisores de N tengan el factor $10=2\times5$.

Es decir,

$$N=\underline{2\times5}\times\underbrace{(2^1\times3^2)}$$

Aquí hay 6 divisores.

$$\boxed{1;\ 2;\ 3;\ 6;\ 9;\ 18}$$

Cada uno de ellos se multiplica por 10 y se suman.

$$\therefore\ SD(\overset{\circ}{\overline{10}})=10+20+30+60+90+180=390$$

Lo que es equivalente a

$$N=\underline{2\times5}\times\underbrace{(2^1\times3^2)}$$

$$SD(\overset{\circ}{\overline{10}})=10(1+2+3+6+9+18)$$

$$SD(\overset{\circ}{\overline{10}})=10\times SD(2^1\times3^2)$$

$$SD(\overset{\circ}{\overline{10}})=10\times SD\left(\frac{N}{10}\right)$$

En general, si a es un divisor de N,

$$\boxed{SD(\overset{\circ}{a})=a\times SD\left(\frac{N}{a}\right)}$$

Aplicación 17

Halle la suma de los divisores de 4200 que son múltiplos de 15 y PESI con 7.

Resolución

Descomponemos 4200 canónicamente.

$$4200=2^3\times3^1\times5^2\times7 \qquad \text{D.C.}$$

Ahora debemos garantizar que los divisores de N sean PESI con 7. Entonces buscamos los divisores que no son $\overset{\circ}{7}$. Luego, garantizaremos que los divisores de N tengan el factor $15=3\times5$.

Es decir,

$$4200=7^1\times\boxed{2^3\times3^1\times5^2} \qquad \text{D.C.}$$

$$\downarrow$$

$$\underline{3\times5}\times\underbrace{(2^3\times5)}$$

$$15\times[SD(2^3\times5)]$$

$$15\times[SD(2^3)\times SD(5)]$$

$$15\times(15\times6)$$

$$15\times90=1350$$

$$\therefore\ SD(\overset{\circ}{\overline{15}}\text{ y PESI con }7)=1350$$

Aplicación 18

Halle la media aritmética de los divisores del número 504.

Resolución

Tenemos que

$$\overline{MA}(\text{divisores de }504)=\frac{SD(504)}{CD(504)} \qquad (*)$$

Descomponemos canónicamente a 504.

$$504=2^3\times3^2\times7^1 \qquad \text{D.C.}$$

Luego,

$$CD(504)=(3+1)(2+1)(1+1)$$

$$SD(504)=SD(2^3)\times SD(3^2)\times SD(7^1)$$

$$\rightarrow\ SD(504)=(15)(13)(8)$$

Reemplazamos en (*).

$$\overline{MA}\ (\text{divisores de }504)=\frac{(15)(13)(8)}{(4)(3)(2)}$$

$$\therefore\ \overline{MA}\ (\text{divisores de }504)=65$$

8.3. SUMA DE LAS INVERSAS DE LOS DIVISORES DE N, SID(N)

Veamos los siguientes casos:

Caso 1

Si p es primo, sus únicos divisores son 1 y p.

$$\rightarrow\ SID(p)=\frac{1}{1}+\frac{1}{p}=\frac{p+1}{1\times p}$$

$$\boxed{SID(p)=\frac{SD(p)}{p}}$$

Ejemplos

- $SID(2)=\dfrac{SD(2)}{2}=\dfrac{3}{2}$
- $SID(3)=\dfrac{SD(3)}{3}=\dfrac{4}{3}$
- $SID(23)=\dfrac{SD(23)}{23}=\dfrac{24}{23}$

Caso 2

Si p es primo y $\alpha \in \mathbb{Z}^+$,

p^α es la descomposición canónica.

Ejemplos

- $5=5^1$ D.C.

$$SID(5)=\frac{SD(5)}{5}$$

- $25=5^2$ D.C.

$$SID(25)=\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}$$

$$SID(25)=\frac{5^2+5+1}{5^2}$$

$$SID(25)=\frac{SD(25)}{25}$$

- $125=5^3$ D.C.

$$SID(125)=\frac{1}{1}+\frac{1}{5}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{5^3}$$

$$SID(125)=\frac{5^3+5^2+5^1+1}{5^3}$$

$$SID(125)=\frac{SD(125)}{125}$$

En general, sea p^α la descomposición canónica.

$$\rightarrow SID(p^\alpha)=\frac{1}{1}+\frac{1}{p^1}+\frac{1}{p^2}+\frac{1}{p^3}+\ldots+\frac{1}{p^\alpha}$$

$$=\frac{p^\alpha+p^{\alpha-1}+p^{\alpha-2}+\ldots+1}{p^\alpha}$$

$$\boxed{SID(p^\alpha)=\frac{SD(p^\alpha)}{p^\alpha}}$$

Caso 3

Ahora analicemos cuando en la descomposición canónica del número hay 2 o más números primos.

Ejemplo

Los divisores de 12 son 1; 2; 3; 4; 6; 12.

Luego,

$$SID(12)=\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}$$

$$SID(12)=\frac{12+6+4+3+2+1}{12}$$

$$\rightarrow SID(12)=\frac{SD(12)}{12}$$

Descomponemos canónicamente a 12.

$$12=2^2\times 3^1 \qquad \text{D.C.}$$

$$\begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 2^1 & 3^1 \\ 2^2 & \\ \hline \end{array}$$

$$SID(12)=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)$$

Aplicamos la propiedad distributiva.

$$SID(12)=\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{4}+\frac{1}{12}$$

Entonces

$$SID(12)=\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}\right)$$

$$SID(12)=SID(2^2)\times SID(3^1)$$

$$SID(12)=\left[\frac{SD(2^2)}{2^2}\right]\times\left[\frac{SD(3^1)}{3^1}\right]$$

$$SID(12)=\frac{SD(2^2)\times SD(3^1)}{2^2\times 3^1}$$

Como $12=2^2\times 3^1$ es la D.C.

$$\rightarrow SID(12)=\frac{SD(2^2\times 3)}{2^2\times 3}$$

$$\therefore SID(12)=\frac{SD(12)}{12}$$

En general,

$$N=\underbrace{a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\ldots\times a_k^{\alpha_k}}_{\text{D.C.}}$$

$$\text{SID}(N)=\text{SID}\left(a_1^{\alpha_1}\right)\times\text{SID}\left(a_2^{\alpha_2}\right)\times\text{SID}\left(a_3^{\alpha_3}\right)\times\ldots\times\text{SID}\left(a_k^{\alpha_k}\right)$$

$$\text{SID}(N)=\left(\frac{\text{SD}\left(a_1^{\alpha_1}\right)}{a_1^{\alpha_1}}\right)\left(\frac{\text{SD}\left(a_2^{\alpha_2}\right)}{a_2^{\alpha_2}}\right)\left(\frac{\text{SD}\left(a_3^{\alpha_3}\right)}{a_3^{\alpha_3}}\right)\times\ldots\times\left(\frac{\text{SD}\left(a_k^{\alpha_k}\right)}{a_k^{\alpha_k}}\right)$$

$$\boxed{\text{SID}(N)=\frac{\text{SD}(N)}{N}}$$

Nota

La SID(N) es una función numérica multiplicativa, ya que

$$\text{SID}(N)=\text{SID}\left(a_1^{\alpha_1}\right)\times\text{SID}\left(a_2^{\alpha_2}\right)\times\text{SID}\left(a_3^{\alpha_3}\right)\times\ldots\times\text{SID}\left(a_k^{\alpha_k}\right)$$

cuando $a_1^{\alpha_1}$; $a_2^{\alpha_2}$; $a_3^{\alpha_3}$; ... y $a_k^{\alpha_k}$ son PESI 2 a 2.

Ejemplo

Sea $60=2^2\times3^1\times5^1$ D.C.

Entonces ya sabemos que

$$\text{SID}(60)=\frac{\text{SD}(60)}{60}$$

Sin embargo, debemos tener presente que lo anterior equivale a

$$60=\underbrace{2^2\times3^1\times5^1}_{\text{PESI 2 a 2}}\qquad\text{D.C.}$$

$$\rightarrow\ \text{SID}(60)=\text{SID}\left(2^2\right)\times\text{SID}\left(3^1\right)\times\text{SID}\left(5^1\right)$$

$$\text{SID}(60)=\frac{\text{SD}\left(2^2\right)}{2^2}\times\frac{\text{SD}\left(3^1\right)}{3}\times\frac{\text{SD}\left(5^1\right)}{5}$$

$$\therefore\ \text{SID}(60)=\frac{7}{4}\times\frac{4}{3}\times\frac{6}{5}=\frac{14}{5}$$

Aplicación 19

Halle la suma de las inversas de los divisores de 180 que son múltiplos de 12.

Resolución

Primero descomponemos 180 canónicamente.

$$180=2^2\times3^2\times5^1\qquad\text{D.C.}$$

Ahora garantizamos que los divisores tengan el factor $12=2^2\times3^1$

$$180=2^2\times3^2\times5^1\qquad\text{D.C.}$$

$$180=\underline{2^2\times3}\times\underbrace{\left(3^1\times5^1\right)}_{\text{Aquí hay 4 divisores.}}$$

$$\boxed{1;\ 3;\ 5;\ 15}$$

$$\underbrace{\text{Se invierte cada uno de ellos, se multiplican por 1/12 y se suman.}}$$

$$\therefore\ \text{SD}\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=\frac{1}{12}+\frac{1}{36}+\frac{1}{60}+\frac{1}{180}$$

Lo que es equivalente a

$$N=\underline{2^2\times3}\times\left(3^1\times5^1\right)$$

$$\text{SID}\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=\frac{1}{12}\times\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\frac{1}{15}\right)$$

$$\text{SID}\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=\frac{1}{12}\times\text{SID}(3\times5)$$

$$\text{SID}\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=\frac{1}{12}\times\text{SID}\left(\frac{N}{12}\right)$$

$$\text{SID}\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=\frac{1}{12}\times\left[\frac{\text{SD}\left(\frac{N}{12}\right)}{\frac{N}{12}}\right]$$

$$\therefore\ \text{SID}\left(\overset{\circ}{\overline{12}}\right)=\frac{1}{N}\times\text{SD}\left(\frac{N}{12}\right)$$

En general, si a es divisor de N, entonces

$$\boxed{\mathrm{SID}(a)=\frac{1}{N}\times \mathrm{SD}\left(\frac{N}{a}\right)}$$

Aplicación 20

Halle la media armónica de los divisores del número 120.

Resolución

Sabemos que

$$\overline{MH}(\text{divisores de } 120)=\frac{\mathrm{CD}(120)}{\mathrm{SID}(120)} \qquad (*)$$

Descomponemos canónicamente a 120.

$120=2^3\times 3^1\times 5^1$ D.C.

Entonces tenemos que

- $\mathrm{CD}(120)=(3+1)(1+1)(1+1)=16$
- $\mathrm{SID}(120)=\dfrac{\mathrm{SD}(120)}{120}$

$$\mathrm{SID}(120)=\frac{\mathrm{SD}(2^3)\times \mathrm{SD}(3)\times \mathrm{SD}(5)}{120}$$

$$\mathrm{SID}(120)=\frac{(15)(4)(6)}{120}=3$$

Reemplazamos en (*).

$$\therefore\ \overline{MH}(\text{divisores de } 120)=\frac{16}{3}$$

8.4. PRODUCTOS DE LOS DIVISORES DE N, PD(N)

Para desarrollar el tema de producto de los divisores, recordemos lo siguiente:

Si a es divisor de N, entonces $\left(\dfrac{N}{a}\right)$ es otro divisor de N.

Además, se cumple

$$(a)\left(\frac{N}{a}\right)=N$$

Ejemplos

- Si 2 es divisor de 40, entonces $\dfrac{40}{2}=20$ es otro divisor de 40.

  Además, $2\times 20=40$.
- Si 5 es divisor de 40, entonces $\dfrac{40}{5}=8$ es otro divisor de 40.

  Además, $5\times 8=40$
- Si 3 es divisor de 36, entonces $\dfrac{36}{3}=12$ es otro divisor de 36.

  Además, $3\times 12=36$

Ahora, mediante lo siguientes ejemplos, vamos a deducir la fórmula para hallar el producto de los divisores de un número entero positivo.

- Los divisores de 40 son

  1;2; 4; 5; 8; 10; 20; 40

  Entonces

$$\left.\begin{array}{l}\mathrm{PD}(40)=\ 1\times 2\ \times 4\ \times 5\times 8\times 10\times 20\times 40\\ \qquad\qquad\ \ )\ \ )\ \ )\ \ )\ \ )\ \ )\ \ )\ \ )\\ \mathrm{PD}(40)=40\times 20\times 10\times 8\times 5\times 4\ \times 2\ \times 1\end{array}\right\}(\times)$$

$$(\mathrm{PD}(40))^2=\underbrace{40\times 40\times 40\times 40\times 40\times 40\times 40\times 40}_{8\text{ factores}}$$

$$(\mathrm{PD}(40))^2=(40)^8$$

$$\left[(\mathrm{PD}(40))^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[(40)^8\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\mathrm{PD}(40)=(40)^{\frac{8}{2}}$$

Como $\mathrm{CD}(40)=8$

$$\rightarrow\ \mathrm{PD}(40)=(40)^{\frac{\mathrm{CD}(40)}{2}}$$

- Los divisores de 36 son
  1; 2; 3; 4; 6; 9; 12; 18; 36
  Entonces

$$\left.\begin{array}{l} PD(36)=1\times 2\times 3\times 4\times 6\times 9\times 12\times 18\times 36 \\ PD(36)=36\times 18\times 12\times 9\times 6\times 4\times 3\times 2\times 1 \end{array}\right\}(\times)$$

$$(PD(36))^2=\underbrace{36\times 36\times 36\times 36\times 36\times 36\times 36\times 36\times 36}_{9\text{ factores}}$$

$$(PD(36))^2=(36)^9$$

$$\left[(PD(36))^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[(36)^9\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$PD(36)=(36)^{\frac{9}{2}}$$

Como $CD(36)=9$

$$\rightarrow\ PD(36)=(36)^{\frac{CD(36)}{2}}$$

En general, sea $CD(N)=K$

Los divisores de N son

$$d_1=1;\ d_2;\ d_3;\ \ldots;\ d_{k-2};\ d_{k-1};\ d_k=N$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} PD(N)=1\times d_2\times d_3\times\ldots\times d_{k-2}\times d_{k-1}\times N \\ PD(N)=N\times d_{k-1}\times d_{k-2}\times\ldots\times d_3\times d_2\times 1 \end{array}\right\}(\times)$$

$$(PD(N))^2=\underbrace{N\times N\times N\times\ldots\times N\times N\times N}_{k\text{ factores}}$$

$$(PD(N))^2=(N)^k$$

$$\left[(PD(N))^2\right]^{\frac{1}{2}}=\left[(N)^k\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$PD(N)=(N)^{\frac{k}{2}}$$

Como $CD(N)=k$,

$$\boxed{PD(N)=(N)^{\frac{CD(N)}{2}}}$$

Aplicación 21

Halle el producto de los divisores de 150 que son múltiplos de 10.

Resolución

Primero descomponemos 150 canónicamente.

$150=2^1\times 3\times 5^2$ D.C.

Ahora garantizamos que los divisores tengan el factor $10=2^1\times 5^1$.

$\rightarrow\ 150=2^1\times 3\times 5^2$ D.C.

$$150=\underline{2\times 5}\times\underbrace{(3\times 5)}_{\text{Aquí hay 4 divisores}}$$

$$\boxed{1;\ 3;\ 5;\ 15}$$

Se multiplica cada uno por 10 y luego se multiplican entre sí.

$$\therefore\ PD(\overset{\circ}{\overline{10}})=(10)(30)(50)(150)=2\,250\,000$$

Lo que es equivalente a

$$N=\underline{2\times 5}\times\underbrace{(3\times 5)}_{[1;\ 3;\ 5;\ 15]}$$

Luego,

$$PD(\overset{\circ}{\overline{10}})=(10\times 1)(10\times 3)(10\times 5)(10\times 15)$$

$$PD(\overset{\circ}{\overline{10}})=10^4\times(1\times 3\times 5\times 15)$$

Como 4 es la $CD(\overset{\circ}{\overline{10}})$ de 150

$$\rightarrow\ PD(\overset{\circ}{\overline{10}})=10^{CD(\overset{\circ}{\overline{10}})}\times PD(3\times 5)$$

$$PD(\overset{\circ}{\overline{10}})=10^{CD(\overset{\circ}{\overline{10}})}\times PD\left(\frac{N}{10}\right)$$

En general, si a es divisor de N, entonces

$$\boxed{PD(\overset{\circ}{a})=a^{CD(\overset{\circ}{a})}\times PD\left(\frac{N}{a}\right)}$$

Aplicación 22

Halle la media geométrica de los divisores de 240.

Resolución

Sabemos que

$$\overline{MG}\text{ (divisores de 240)}=\sqrt[CD(240)]{PD(240)}\quad (*)$$

Primero descomponemos 240 canónicamente.

$240=2^4\times3\times5$ D.C.

Entonces

- $CD(240)=(4+1)(1+1)(1+1)=20$
- $PD(240)=(240)^{\frac{CD(240)}{2}}$

  $PD(240)=240^{10}$

Reemplazamos en (*).

$$\overline{MG}\text{ (divisores de 240)}=\sqrt[20]{240^{10}}$$

$$\therefore\ \overline{MG}\text{ (divisores de 240)}=\sqrt{240}$$

> **Importante**
>
> La $\overline{MG}$ de los divisores de N es igual a $\sqrt{N}$.

Tabla de divisores

Los divisores de un número entero positivo N también se pueden ordenar en filas y columnas, a dicho arreglo se le conoce como tabla de divisores de N.

Ejemplos

- Sea $72=2^3\times3^2$ D.C.

  Obtenemos los divisores de 72.

divisores de 2^3

(×) divisores de 3^2

	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72

tabla de divisores de 72

De la tabla de divisores podemos hallar la cantidad de divisores y la suma de divisores.

- $CD(72)=(\text{n.º de filas})(\text{n.º de columnas})$

  $CD(72)=(3)(4)$

  $CD(72)=12$

- $SD(72)=(1+2+4+8)+(3+6+12+24)+(9+18+36+72)$

  $SD(72)=(1+2+4+8)+3(1+2+4+8)+9(1+2+4+8)$

  $SD(72)=(1+2+4+8)(1+3+9)$

  $SD(72)=SD(2^3)\times SD(3^2)$

- Sea $360=2^3\times3^2\times5^1$ D.C.

  Obtenemos los divisores de 360.

(×)

(×)

	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72
	5	10	20	40
5	15	30	60	120
	45	90	180	360

tabla de divisores de 360

- Sea $1800=2^3\times3^2\times5^2$ D.C.

  Obtenemos los divisores de 1800.

(×)

(×)

(×)

	2^0	2^1	2^2	2^3
3^0	1	2	4	8
3^1	3	6	12	24
3^2	9	18	36	72
	5	10	20	40
5^1	15	30	60	120
	45	90	180	360
	25	50	100	200
5^2	75	150	300	600
	225	450	900	1800

tabla de divisores de 1800

Aplicación 23

En la tabla de divisores de un número que tiene 9 divisores, la suma de los divisores de la diagonal que contiene a la unidad es 463. Halle la suma de los divisores primos de dicho número.

Resolución

Se tiene que

- $CD(N)=9$
- la suma de los divisores de la diagonal que contiene a la unidad es 463.
- $N=\begin{cases} a^8 & \text{No cumple} \\ \underbrace{a^2\times b^2}_{\text{D.C.}} & \text{Sí cumple} \end{cases}$

$\rightarrow\ N=a^2\times b^2$ D.C.

(×)	a^0	a^1	a^2
b^0	1	a	a^2
b^1	b	ab	a^2b
b^2	b^2	ab^2	a^2b^2

Luego,

$$1+ab+a^2b^2=463$$

$$ab+a^2b^2=462$$

$$\underset{\substack{3\ 7\\7\ 3}}{ab}(\underbrace{1+ab}_{\substack{22\\22}})=2\times\underline{3}\times\underline{7}\times 11$$

22

$\rightarrow\ a+b=10$

Por lo tanto, la suma de los divisores primos de dicho número es 10.

9▸ DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA DEL FACTORIAL DE UN NÚMERO ENTERO POSITIVO

Para esta descomposición se debe analizar cada número primo contenido en dicho factorial y encontrar su respectivo exponente.

Ejemplo

Hallemos la descomposición canónica de 13!

$$13!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times7\times8\times9\times10\times11\times12\times13$$

Observamos que los factores primos que tiene 13! son 2; 3; 5; 7; 11 y 13.

- 7; 11 y 13 una sola vez
- 5 dos veces (una en el 5 y otro en el 10)

Entonces

$$13!=2^x\times3^y\times5^2\times7\times11\times13 \qquad \text{D.C.}$$

- Analizamos el exponente de 2 en 13!

Tomamos los factores que son $\overset{\circ}{2}$.

2; 4; 6; 8; 10; 12

Notemos que los seis son $\overset{\circ}{2}$, tres de ellos son $\overset{\circ}{4}$ y solo uno es $\overset{\circ}{8}$.

Veamos.

2; 4; 6; 8; 10; 12

$2\times[1\ \ 2\ \ 3\ \ 4\ \ 5\ \ 6]$ ← 6 veces

$\downarrow\ \ \downarrow\ \ \downarrow$

2 ; 4 ; 6

$2\times[1\ \ 2\ \ 3]$ ← 3 veces

$\downarrow$

2

$2\times[\ 1\ ]$ ← una vez

Entonces en 13!, el exponente de 2 es

$$x=6+3+1=10$$

Otra forma

En forma práctica, solo para el exponente de un factor primo.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 2 \\ 6 & 2 \\ 3 & 2 \\ 1 & \end{array}$$

Sumamos solo los cocientes.

$$x=6+3+1=10$$

- Analicemos el exponente de 3 en 13!

  Tomamos los factores que son $\overset{\circ}{3}$.

  3; 6; 9; 12

  Notamos que los cuatro son $\overset{\circ}{3}$ y solo uno es $\overset{\circ}{9}$.

  3; 6; 9; 12

  $3\times(1\quad 2\quad 3\quad 4)$ ← 4 veces

  ↓

  3

  $3\times(1)$ ← Una vez

  Entonces en 13!, el exponente de 3 es

  $y=4+1=5$

Otra forma

En forma práctica, solo para el exponente de un factor primo.

$$\begin{array}{r|l} 13 & 3 \\ \hline 4 & 3 \\ \hline & 1 \end{array}$$

Sumamos solo los cocientes.

$y=4+1=5$

Por lo tanto,

$13!=2^{10}\times3^5\times5^2\times7\times11\times13$ D. C.

Lo anterior se sintetiza con la fórmula de Polignac, la cual usa la función máximo entero.

Recuerde

Dado $x\in\mathbb{R}$

La función máximo entero de x, denotado por $[\![x]\!]$, es el único entero n que satisface

$n\le x<n+1$

Ejemplos

- $[\![3{,}1]\!]=3$
- $[\![5{,}81]\!]=5$
- $[\![8]\!]=8$
- $[\![0{,}26]\!]=0$
- $[\![-3{,}12]\!]=-4$
- $[\![-5{,}73]\!]=-6$
- $[\![\sqrt{5}]\!]=2$

9.1. FÓRMULA DE POLIGNAC

Sea p un número primo que divide a $n!$, el exponente de p en $n!$ se calcula como

$$f_p(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\!\!\left[\frac{n}{p^i}\right]\!\!\right]$$

Observación

Existe un $k\in\mathbb{N}$, tal que $p^k\le n<p^{k+1}$

Entonces

$$f_p(n)=\sum_{i=1}^{\infty}\left[\!\!\left[\frac{n}{p^i}\right]\!\!\right]=\sum_{i=1}^{k}\left[\!\!\left[\frac{n}{p^i}\right]\!\!\right]$$

Ya que

$$0<\frac{n}{p^i}<1;\ \forall i>k$$

$$\rightarrow\ \left[\!\!\left[\frac{n}{p^i}\right]\!\!\right]=0;\ \forall i>k$$

En el ejemplo anterior,

- x es el exponente de 2 en 13!

  $2^3\le13<2^4$

  $$\rightarrow\ x=\sum_{i=1}^{3}\left[\!\!\left[\frac{13}{2^i}\right]\!\!\right]$$

  $$x=\left[\!\!\left[\frac{13}{2^1}\right]\!\!\right]+\left[\!\!\left[\frac{13}{2^2}\right]\!\!\right]+\left[\!\!\left[\frac{13}{2^3}\right]\!\!\right]$$

  $$x=[\![6{,}5]\!]+[\![3{,}25]\!]+[\![1{,}625]\!]$$

  $\therefore\ x=6+3+1=10$

  Observamos que

  $$0<\frac{13}{2^i}<1;\ \forall i>3$$

  $$\rightarrow\ \left[\!\!\left[\frac{13}{2^i}\right]\!\!\right]=0;\ \forall i>3$$

- y es el exponente de 3 en 13!

$$3^2 \leq 13 < 3^3$$

$$\rightarrow \quad y = \sum_{i=1}^{2} \left[\!\left[\frac{13}{3^i} \right]\!\right]$$

$$y = \left[\!\left[\frac{13}{3^1} \right]\!\right] + \left[\!\left[\frac{13}{3^2} \right]\!\right]$$

$$y = [\![4,\widehat{3}]\!] + [\![1,\widehat{4}]\!]$$

$$\therefore \quad y = 4+1 = 5$$

Observemos que

$$0 < \frac{13}{3^i} < 1; \ \forall i > 2$$

$$\rightarrow \quad \left[\!\left[\frac{13}{3^i} \right]\!\right] = 0; \ \forall i > 2$$

> **Nota**
> Podemos utilizar cualquiera de las formas mencionadas.

Aplicación 24

Si 6^n divide a 30!, halle el mayor valor entero positivo que puede tomar n.

Resolución

Sabemos que

- $6^n = (2\times3)^n = 2^n \times 3^n$
- $30! = 1\times2\times3\times4\times5\times6\times\ldots\times29\times30$
- $30! = 2^a \times 3^b \times 5^c \times \ldots \times 29^1$ D.C.

Para un 6, necesitamos un factor 2 y un factor 3, pero notamos que en 30! hay más factores 2 que factores 3, es decir, $a>b$. Por lo tanto, el exponente del 3 en 30! determinará el mayor valor de n.

Sin embargo, hallaremos el exponente de 2 en 30! para ser más explícitos.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 3 \\ \hline 10 & 3 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline 1 & \end{array}$$

Entonces

$$b = 10+3+1 = 14$$

Por lo tanto, el mayor valor de n es 14.

Sigamos.

$$\begin{array}{r|l} 30 & 2 \\ \hline 15 & 2 \\ \hline 7 & 2 \\ \hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \end{array}$$

$$\rightarrow \quad a = 15+7+3+1 = 26$$

Luego,

$$30! = 2^{26} \times 3^{14} \times 5^c \times \ldots \times 29^1 \qquad \text{D.C.}$$

$$30! = 2^{14} \times 3^{14} \times 2^{12} \times 5^c \times \ldots \times 29^1$$

$$30! = (6^{14}) \times 2^{12} \times 5^c \times \ldots \times 29^1$$

Por lo tanto, el mayor valor que puede tomar n es 14.

10 ▸ CANTIDAD DE FORMAS DE DESCOMPONER UN NÚMERO ENTERO POSITIVO N COMO EL PRODUCTO DE DOS DE SUS DIVISORES, $F(N)$

Previamente recordemos que si a es divisor de N, entonces $\left(\frac{N}{a}\right)$ es otro divisor de N.

Además, se cumple

$$\boxed{(a)\left(\frac{N}{a}\right) = N}$$

Veamos los siguientes casos.

Caso 1

Sea CD(N) par.

Ejemplo

$$40 = 2^3 \times 5^1 \qquad \text{D.C.}$$

$$\rightarrow \quad \text{CD}(40) = (3+1)(1+1) = 8$$

Divisores de 40:

1; 2; 4; 5; 8; 10; 20; 40

$$40 = \begin{cases} 1\times 40 \\ 2\times 20 \\ 4\times 10 \\ 5\times 8 \end{cases}$$

$\rightarrow\ F(40) = \dfrac{8}{2} = \dfrac{CD(40)}{2} = 4$

En general, si CD(N) es par,

$$F(N) = \frac{CD(N)}{2}$$

Caso 2

Sea CD(N) impar.

Ejemplo

$100 = 2^2 \times 5^2$ D.C.

$\rightarrow$ CD(100) = (2+1)(2+1) = 9

Divisores de 100:

1; 2; 4; 5; 10; 20; 25; 50; 100

$$100 = \begin{cases} 1\times 100 \\ 2\times 50 \\ 4\times 25 \\ 5\times 20 \\ \mathbf{10\times 10} \end{cases}$$

$\rightarrow\ F(100) = \dfrac{9+1}{2} = \dfrac{CD(100)+1}{2} = 5$

En general, si CD(N) es impar,

$$F(N) = \frac{CD(N)+1}{2}$$

Importante

La CD(N) es impar si y solo si N es un número cuadrado perfecto.

Ejemplos

- $36 = 6^2$

  $36 = 2^2 \times 3^2$ D.C.

  CD(36) = (2+1)(2+1) = 9

- $144 = 12^2$

  $144 = 2^4 \times 3^2$ D.C.

  CD(144) = (4+1)(2+1) = 15

- $900 = 36^2$

  $900 = 2^2 \times 3^2 \times 5^2$ D.C.

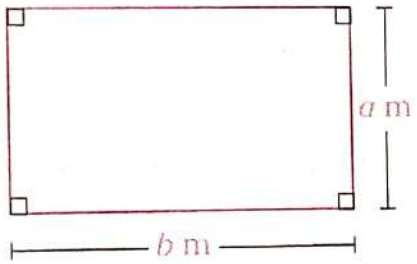
  CD(900) = (2+1)(2+1)(2+1) = 27

Aplicación 25

¿Cuántos rectángulos de lados enteros existen cuyas áreas son iguales a 240 m^2?

Resolución

Sea $a < b$; $\{a; b\} \subset \mathbb{Z}^+$



$\rightarrow\ \mathbb{A}_{\square} = 240\ \text{m}^2$

$a \times b = 240$

$a \times b = 2^4 \times 3 \times 5$ D.C.

Luego,

CD(240) = (4+1)(1+1)(1+1) = 20

$\rightarrow\ F(240) = \dfrac{CD(240)}{2} = \dfrac{20}{2} = 10$

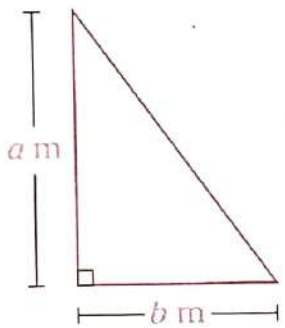
Por lo tanto, existen 10 rectángulos que cumplen las condiciones del problema.

Aplicación 26

¿Cuántos triángulos rectángulos de catetos enteros existen, cuyas áreas son iguales a 200 m^2?

Resolución

Sea $\{a; b\} \subset \mathbb{Z}^+$



$\rightarrow$ $A_{\triangle} = 200\ m^2$

$$\frac{1}{2} \times a \times b = 200$$

$$a \times b = 400$$

$$a \times b = 2^4 \times 5^2 \qquad \text{D.C.}$$

Luego,

$$CD(400) = (4+1)(2+1) = 15$$

$$\rightarrow\ F(400) = \frac{CD(400)+1}{2} = \frac{15+1}{2} = 8$$

Por lo tanto, existen 8 triángulos rectángulos.

11 ▸ Función de Euler o indicador de un número entero positivo

Se define la función de Euler o indicador de N, $\phi(N)$ o $\varphi(N)$, como la cantidad de números enteros positivos que son menores o iguales que N y primos entre sí con N, sea $N \in \mathbb{Z}^+$.

> ▸▸ Importante
>
> El único entero positivo menor o igual a 1 que es PESI con 1, es él mismo.
>
> $\phi(1) = 1$

Veamos los siguientes casos:

Caso 1

Sea N un número primo.

Ejemplos

- 1; 2 ; $\phi(2) = 2-1 = 1$

  PESI con 2

- 1; 2; 3 ; $\phi(3) = 3-1 = 2$

  PESI con 3

- 1; 2; 3; 4; 5 ; $\phi(5) = 5-1 = 4$

  PESI con 5

En general, si $N = p$ y p es primo,

$$\boxed{\phi(p) = p-1}$$

Demostración

Como p es primo, los únicos números enteros positivos que no son PESI con p son los p.

$$1; 2; 3; 4; \ldots; (p-1); p$$

Entonces, de estos p números enteros positivos menores o iguales que p, el único que no es PESI con p es p.

$\therefore\ \phi(p) = p-1$

Caso 2

Sea N un primo elevado a un exponente entero positivo.

Ejemplos

- 1; 2; 3; 2^2

  son PESI con 2^2

  De los cuatro números, el 1(2) y $2(2) = 2^2$ no son PESI con 2^2.

  $\rightarrow\ \phi(2^2) = 2^2 - 2 = 2^1(2-1)$

- 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 2^3

  son PESI con 2^3

  De los ocho números, el 1(2), 2(2), 3(2) y $4(2) = 2^3$ no son PESI con 2^3.

  $\rightarrow\ \phi(2^3) = 2^3 - 4$

  $\phi(2^3) = 2^3 - 2^2$

  $\phi(2^3) = 2^2(2-1)$

- $1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 3^2$

son PESI con 3^2

De los nueve números, el 1(3), 2(3) y $(3)3=3^2$ no son PESI con 3^2.

$\rightarrow \phi(3^2)=3^2-3=3(3-1)$

En general, si $N=p^\alpha$; p es primo y $\alpha \in \mathbb{Z}^+$,

$$\boxed{\phi(N)=p^\alpha-p^{\alpha-1}=p^{\alpha-1}(p-1)}$$

Demostración

Como p es primo, los únicos números enteros positivos que no son PESI con p^α son los $\overset{\circ}{p}$.

$1; 2; 3; 4; ...; p^\alpha$

Entonces de estos p^α números enteros positivos menores o iguales que p^α, los que no son PESI con p^α son

$$\underbrace{p, 2p, 3p, ..., (p^{\alpha-1})p}_{p^{\alpha-1}\text{ números}}$$

$$\phi(p^\alpha)=p^\alpha-p^{\alpha-1}$$

$$\therefore\ \phi(p^\alpha)=p^{\alpha-1}(p-1)$$

Ejemplos

- $\phi(7^3)=7^3-7^2=7^2(7-1)$
- $\phi(11^2)=11^2-11=11(11-1)$
- $\phi(13^5)=13^5-13^4=13^4(13-1)$

Caso 3

Sea N un número compuesto.

Ejemplo

$12=2^2\times 3$

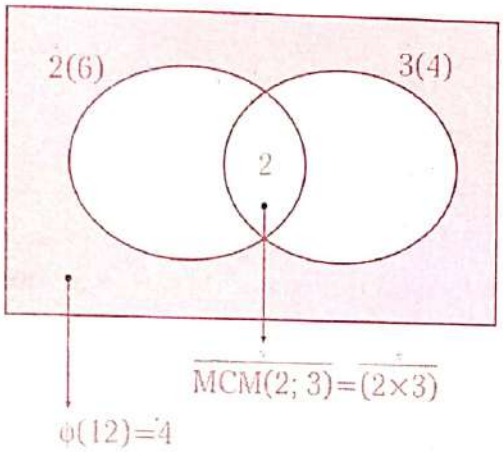
Luego, D.C.

$1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; 11; 2^2\times 3$

son PESI con $2^2\times 3$

Entonces para que sea PESI con 12, el número no debe ser $\overset{\circ}{2}$ ni $\overset{\circ}{3}$.

De los 12 números,



- $\left(\text{cantidad de números } \overset{\circ}{2}\right)=\dfrac{12}{2}$
- $\left(\text{cantidad de números } \overset{\circ}{3}\right)=\dfrac{12}{3}$
- $\left(\text{cantidad de números } \overline{(2\times 3)}\right)=\dfrac{12}{2\times 3}$

Luego, la cantidad de números enteros positivos menores o iguales que 12 y PESI con 12 es

$$\phi(12)=12-\left(\frac{12}{2}+\frac{12}{3}-\frac{12}{2\times 3}\right)$$

$$\phi(12)=12\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{2\times 3}\right)$$

$$\phi(12)=12\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)-\frac{1}{3}\left(1-\frac{1}{2}\right)\right]$$

$$\phi(12)=12\left(1-\frac{1}{2}\right)\left(1-\frac{1}{3}\right)$$

$$\phi(12)=2^2\times 3\left(\frac{2-1}{2}\right)\left(\frac{3-1}{3}\right)$$

$$\phi(12)=\underbrace{2(2-1)}_{\phi(2^2)}\underbrace{(3-1)}_{\phi(3)}$$

$$\therefore\ \phi(2^2\times 3)=\phi(2^2)\times\phi(3)$$

En general, si $N=p^{\alpha}\times q^{0}$ D.C.

$$\boxed{\phi(N)=p^{\alpha-1}\times(p-1)q^{0-1}\times(q-1)}$$

Esto equivale a

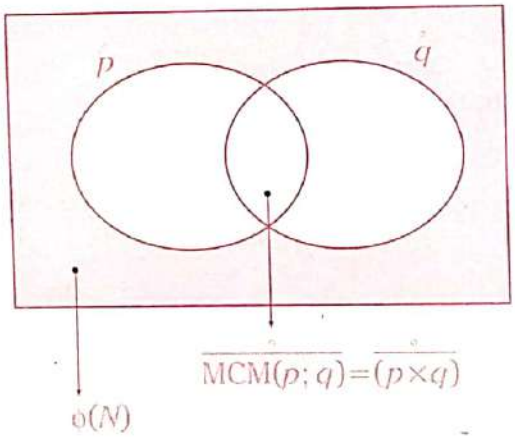
$$\boxed{\phi(N)=\phi\left(p^{\alpha}\right)\times\phi\left(q^{0}\right)}$$

Demostración

Sea $N=p^{\alpha}\times q^{0}$ D.C.

Entonces para que sea PESI con N, el número no debe ser $\overset{\circ}{p}$ ni $\overset{\circ}{q}$.

De los N números,



- $\left(\text{cantidad de números } \overset{\circ}{p}\right)=\dfrac{N}{p}$
- $\left(\text{cantidad de números } \overset{\circ}{q}\right)=\dfrac{N}{q}$
- $\left(\text{cantidad de números } \overset{\circ}{\overline{(p\times q)}}\right)=\dfrac{N}{p\times q}$

Luego, la cantidad de números enteros positivos menores o iguales que N y PESI con N es

$$\phi(N)=N-\left(\frac{N}{p}+\frac{N}{q}-\frac{N}{p\times q}\right)$$

$$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{p\times q}\right)$$

$$\phi(N)=N\left[\left(1-\frac{1}{p}\right)-\frac{1}{q}\left(1-\frac{1}{p}\right)\right]$$

$$\phi(N)=N\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(1-\frac{1}{q}\right)$$

$$\phi(N)=p^{\alpha}\times q^{0}\left(\frac{p-1}{p}\right)\left(\frac{q-1}{q}\right)$$

$$\phi(N)=\underbrace{p^{\alpha-1}(p-1)}_{\phi(p^{\alpha})}\underbrace{q^{0-1}(q-1)}_{\phi(q^{0})}$$

$$\therefore\ \phi(N)=\phi\left(p^{\alpha}\right)\times\phi\left(q^{\theta}\right)$$

Ejemplo

La cantidad de enteros positivos menores o iguales que 72 que son PESI con 72 es $\phi(72)$.

$72=2^{3}\times3^{2}$ D.C.

$\rightarrow\ \phi(72)=\phi\left(2^{3}\right)\times\phi\left(3^{2}\right)$

$\phi(72)=2^{2}(2-1)\times3^{1}(3-1)$

$\therefore\ \phi(72)=24$

11.1. PROPIEDADES DE LA FUNCIÓN DE EULER

Propiedad 1

Sea

$$N=\underbrace{a_1^{\alpha_1}\times a_2^{\alpha_2}\times a_3^{\alpha_3}\times\ldots\times a_k^{\alpha_k}}_{\text{D.C.}}$$

$\phi(N)$ es una función numérica multiplicativa, ya que

$$\phi(N)=\phi\left(a_1^{\alpha_1}\right)\times\phi\left(a_2^{\alpha_2}\right)\times\phi\left(a_3^{\alpha_3}\right)\times\ldots\times\phi\left(a_k^{\alpha_k}\right)$$

cuando $a_1^{\alpha_1}$; $a_2^{\alpha_2}$; $a_3^{\alpha_3}$; ... y $a_k^{\alpha_k}$ son PESI 2 a 2.

Ejemplos

- $\phi(210)=¿?$

  $210=2\times3\times5\times7$ D.C.

$\rightarrow\ \phi(210)=\phi(2)\times\phi(3)\times\phi(5)\times\phi(7)$

$\phi(210)=(2-1)(3-1)(5-1)(7-1)$

$\phi(210)=1\times2\times4\times6$

$\therefore\ \phi(210)=48$

- Sea $N=2^4\times5^3\times7^2$ D.C.

$\phi(N)=\phi(2^4)\times\phi(5^3)\times\phi(7^2)$

$\phi(N)=2^3(2-1)\times5^2(5-1)\times7^1(7-1)$

$\phi(N)=33\,600$

Propiedad 2

Si $N>1$, entonces la suma de los números enteros positivos que son menores o iguales a N y PESI con N es

$$\boxed{S=\frac{\phi(N)\times N}{2}}$$

Demostración

Sean m_1; m_2; m_3; ... y $m_{\phi(N)}$ los $\phi(N)$ números enteros positivos que son menores o iguales que N y PESI con N, cuya suma es

$$S=m_1+m_2+m_3+...+m_{\phi(N)}$$

Por propiedad, se sabe que si m_i y N son PESI, entonces $(N-m_i)$ y N son PESI para todo $i\in\{1;2;3;...;\phi(N)\}$

Entonces los enteros positivos que son menores o iguales que N y PESI con N son

$$(N-m_1);\ (N-m_2);\ (N-m_3);\ ...\ y\ (N-m_{\phi(N)})$$

Luego,

$$\left.\begin{array}{l} S=m_1+m_2+m_3+...m_{\phi(N)} \\ S=(N-m_1)+(N-m_2)+(N-m_3)+...+(N-m_{\phi(N)}) \end{array}\right\}(+)$$

$$2S=\underbrace{N+N+N+...+N}_{\phi(N)\text{ sumandos}}$$

$$2S=\phi(N)\times N$$

$$\therefore\ S=\frac{\phi(N)\times N}{2}$$

Ejemplo

Analicemos los enteros positivos que son menores o iguales que 12 y PESI con 12.

Sabemos que

$$\underbrace{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;}_{\text{son PESI con 12}}\ 12$$

$\rightarrow\ \phi(12)=4$

$S=1+5+7+11=24$

Recuerde

Sea $\{A;B\}\subset\mathbb{Z}^+;A>B$

Si A y B son PESI, entonces B es PESI con $(A-B)$.

Ejemplos

- 1 y 12 son PESI $\rightarrow$ $(12-1)$ y 12 son PESI.
- 5 y 12 son PESI $\rightarrow$ $(12-5)$ y 12 son PESI.
- 7 y 12 son PESI $\rightarrow$ $(12-7)$ y 12 son PESI.
- 11 y 12 son PESI $\rightarrow$ $(12-11)$ y 12 son PESI.

Entonces

$$\left.\begin{array}{l} S=1+5+7+11 \\ S=(12-1)+(12-5)+(12-7)+(12-11) \end{array}\right\}(+)$$

$$2S=\underbrace{12+12+12+12}_{\phi(12)\text{ sumandos}}$$

$$2S=\phi(12)\times12$$

$$\therefore\ S=\frac{\phi(12)\times12}{2}=24$$

Aplicación 27

Halle la suma de los enteros positivos que son menores o iguales que 1000 y PESI con 1000.

Resolución

Sea

$1000=2^3\times5^3$ D.C.

$\rightarrow\ \phi(1000)=2^2(2-1)\times5^2(5-1)$

$\phi(1000)=400$

Luego,

$$S=\frac{1}{2}\times\phi(1000)\times1000\ \rightarrow\ S=\frac{1}{2}\times400\times1000$$

$$\therefore\ S=200\,000$$

Propiedad 3

La cantidad de números enteros positivos que son PESI con N, comprendidos entre dos múltiplos consecutivos de N, es igual a $\phi(N)$.

Ejemplo

Analicemos los enteros positivos que son PESI con 12, comprendidos entre dos múltiplos consecutivos de 12.

Sea $N=2^2\times 3$ D.C.

$\rightarrow\ \phi(N)=2^1(2-1)(3-1)=4$

Sabemos que

$$1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ 12$$

son PESI con 12

Luego,

$$\boxed{\mathbf{0(12)}};\ 1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ 7;\ 8;\ 9;\ 10;\ 11;\ \boxed{\mathbf{1(12)}}$$

son PESI con 12

$$\boxed{\mathbf{1(12)}};\ 13;\ 14;\ 15;\ 16;\ 17;\ 18\ 19;\ 20;\ 21;\ 22;\ 23;\ \boxed{\mathbf{2(12)}}$$

son PESI con 12

Observemos lo siguiente:

$1\equiv 13(\text{mód } 12);\ 5\equiv 17(\text{mód } 12);\ 7\equiv 19(\text{mód } 12);\ 11\equiv 23(\text{mód } 12)$

$$\boxed{\mathbf{2(12)}};\ 25;\ 26;\ 27;\ 28;\ 29;\ 30\ 31;\ 32;\ 33;\ 34;\ 35;\ \boxed{\mathbf{3(12)}}$$

son PESI con 12

$1\equiv 25(\text{mód } 12);\ 5\equiv 29(\text{mód } 12);\ 7\equiv 31(\text{mód } 12);\ 11\equiv 35(\text{mód } 12)$

$\vdots$

$$\boxed{\boldsymbol{n(12)}};\ \boxed{1+12n};\ \ldots;\ \boxed{5+12n};\ 6+12n;\ \boxed{7+12n};\ \ldots;\ \boxed{11+12n};\ \boxed{\boldsymbol{(n+1)(12)}}$$

son PESI con 12

Entonces

$1\equiv 1+12n\ (\text{mód } 12);\ 5\equiv 5+12n\ (\text{mód } 12)$

$7\equiv 7+12n\ (\text{mód } 12);\ 11\equiv 11+12n\ (\text{mód } 12)$

Por lo tanto, la cantidad de números enteros positivos que son PESI con 12, comprendidos entre dos múltiplos consecutivos de 12, es igual al $\phi(12)$.

Recuerde

$1=\overset{\circ}{\overline{12}}+1$ y $13=\overset{\circ}{\overline{12}}+1$

Entonces 1 y 13 son congruentes respecto al módulo 12.

$\therefore\ 1\equiv 13\ (\text{mód } 12)$

Aplicación 28

¿Cuántos números comprendidos entre 150 y 510 son PESI con 30?

Resolución

Sabemos que la cantidad de enteros positivos que son PESI con 30, comprendidos entre dos múltiplos consecutivos de 30, es igual a $\phi(30)$.

Entonces

$30=2\times3\times5$ D.C.

$\rightarrow \phi(30)=\phi(2)\times\phi(3)\times\phi(5)$

$\phi(30)=1\times2\times4=8$

Luego,

$$\underbrace{150}_{5(30)};\ \underbrace{151;\ 152;\ 153;\ \ldots;\ 509}_{\text{números PESI con 30}};\ \underbrace{510}_{17(30)}$$

$$5(30);\ \underbrace{\ldots}_{\text{8 números PESI con 30}};\ 6(30)$$

$$6(30);\ \underbrace{\ldots}_{\text{8 números PESI con 30}};\ 7(30)$$

$$7(30);\ \underbrace{\ldots}_{\text{8 números PESI con 30}};\ 8(30)$$

$$\vdots$$

$$16(30);\ \underbrace{\ldots}_{\text{8 números PESI con 30}};\ 17(30)$$

Así tenemos

$(17-5)\times8=(17-5)\phi(30)=96$

Por lo tanto, hay 96 números comprendidos entre 150 y 510 que son PESI con 30.

12. COMPLEMENTOS DEL ESTUDIO DE LOS DIVISORES ENTEROS POSITIVOS DE UN NÚMERO

12.1. TEOREMA DE EULER

Si a y m son PESI, entonces

$$\boxed{a^{\phi(m)}=\overset{\circ}{m}+1;\ m>1}$$

Ejemplos

- Hallemos el residuo que se obtiene al dividir 9^{12} entre 28.

  Tenemos que

  $9^{12}=(3^2)^{12}=3^{24}$

  $\rightarrow 9^{12}=(3^3)^8$

  $9^{12}=(\overset{\circ}{\overline{28}}-1)^8$

  $9^{12}=\overset{\circ}{\overline{28}}+1$

  Por lo tanto, el residuo es 1.

  Ahora, apliquemos el teorema de Euler.

  9 y 28 son PESI

  - $28=2^2\times7$ D.C.
  - $\phi(28)=2^1(2-1)\times(7-1)=12$

  $\rightarrow 9^{\phi(28)}=\overset{\circ}{\overline{28}}+1$ ← residuo

- 21 y 100 son PESI.
  - $100=2^2\times5^2$ D.C.
  - $\phi(100)=2^1(2-1)5^1(5-1)=40$

  Por lo tanto,

  $21^{\phi(100)}=\overset{\circ}{\overline{100}}+1$

  $21^{40}=\overset{\circ}{\overline{100}}+1$ ← residuo

12.2. TEOREMA DE FERMAT

Si p es primo y a es PESI con p, entonces

$$\boxed{a^{p-1}=\overset{\circ}{p}+1}$$

Ejemplos

- $15^1=\overset{\circ}{2}+1$
- $11^2=\overset{\circ}{3}+1$

  $121=\overset{\circ}{3}+1$
- $8^4=\overset{\circ}{5}+1$

  $4096=\overset{\circ}{5}+1$
- $2^6=\overset{\circ}{7}+1$

  $64=\overset{\circ}{7}+1$

Nota

El teorema de Fermat es un caso particular del teorema de Euler; sin embargo, fue enunciado por el matemático francés Pierre de Fermat un siglo antes.

Del teorema de Euler

$a^{\phi(m)}=\overset{\circ}{m}+1$, donde a y m son PESI

como p es primo, entonces

- a y p son PESI.
- $\phi(p)=p-1$

$\rightarrow$ $\boxed{a^{p-1}=\overset{\circ}{p}+1}$

12.3. TEOREMA DE WILSON

Si p es primo, entonces

$$\boxed{(p-1)!=\overset{\circ}{p}-1} \quad \text{o} \quad \boxed{(p-1)!+1=\overset{\circ}{p}}$$

Ejemplos

- $p=2$

  $1!=\overset{\circ}{2}-1$

  $1=\overset{\circ}{2}-1$

- $p=3$

  $2!=\overset{\circ}{3}-1$

  $1\times 2=2=\overset{\circ}{3}-1$

- $p=5$

  $4!=\overset{\circ}{5}-1$

  $1\times 2\times 3\times 4=24=\overset{\circ}{5}-1$

- $p=31$

  $30!=\overset{\circ}{\overline{31}}-1$

Corolario 1

Si p es primo, entonces

$$\boxed{(p-2)!=\overset{\circ}{p}+1}$$

Demostración

Sabemos que $(p-1)!=\overset{\circ}{p}-1$

Entonces

$$\underbrace{1\times 2\times 3\times\ldots(p-3)(p-2)}_{(p-2)!}(p-1)=\overset{\circ}{p}-1$$

$$(p-2)!\times(p-1)=\overset{\circ}{p}-1$$

$$\underbrace{(p-2)!\times p}_{\overset{\circ}{p}}-(p-2)!=\overset{\circ}{p}-1$$

$$-(p-2)!=\overset{\circ}{p}-1$$

$$-(p-2)!=\overset{\circ}{p}-1$$

$$\therefore\ (p-2)!=\overset{\circ}{p}+1$$

Ejemplos

- $p=2$

  $0!=\overset{\circ}{2}+1$

  $1=\overset{\circ}{2}+1$

- $p=3$

  $1!=\overset{\circ}{3}+1$

  $1=\overset{\circ}{3}+1$

- $p=5$

  $3!=\overset{\circ}{5}+1$

  $1\times 2\times 3=6=\overset{\circ}{5}+1$

- $p=17$

  $15!=\overset{\circ}{\overline{17}}+1$

Corolario 2

Si p es primo mayor que 2, entonces

$$\boxed{(p-3)!=\overset{\circ}{p}+\left(\frac{p-1}{2}\right)}$$

Demostración

Sabemos que

$$(p-2)!=\overset{\circ}{p}+1$$

Entonces

$$\underbrace{1\times 2\times 3\times\ldots(p-4)(p-3)}_{(p-3)!}(p-2)=\overset{\circ}{p}+1$$

$$(p-3)!\times(p-2)=\overset{\circ}{p}+1$$

$$\underbrace{(p-3)!\times p}_{\overset{\circ}{p}}-2(p-3)!=\overset{\circ}{p}+1$$

$$-2(p-3)!=\overset{\circ}{p}+1$$

$$-2(p-3)!=\overset{\circ}{p}+1$$

$$2(p-3)!=\overset{\circ}{p}-1$$

$$2(p-3)!=\overset{\circ}{p}-1+p$$

Como p es primo mayor que 2, entonces p es impar.

Luego,

$$2(p-3)!=\overset{\circ}{p}+\underbrace{(p-1)}_{\text{par}}$$

$$\therefore\ (p-3)!=\overset{\circ}{p}+\left(\frac{p-1}{2}\right)$$

Ejemplos

- $p=3$

  $0!=\overset{\circ}{3}+\left(\frac{3-1}{2}\right)$

  $0!=\overset{\circ}{3}+1$

  $1=\overset{\circ}{3}+1$

- $p=5$

  $2!=\overset{\circ}{5}+\left(\frac{5-1}{2}\right)$

  $2!=\overset{\circ}{5}+2$

  $1\times2=2=\overset{\circ}{5}+2$

- $p=7$

  $4!=\overset{\circ}{7}+\left(\frac{7-1}{2}\right)$

  $4!=\overset{\circ}{7}+3$

  $1\times2\times3\times4=24=\overset{\circ}{7}+3$

- $p=13$

  $10!=\overset{\circ}{13}+\left(\frac{13-1}{2}\right)$

  $10!=\overset{\circ}{13}+6$

12.4. NÚMEROS PERFECTOS

Un entero positivo N se denomina número perfecto si es igual a la suma de sus divisores propios, es decir, la suma de todos sus divisores es igual al doble de N.

- $N=\text{SD}(\text{propios de } N)$

  $N=\text{SD}(N)-N$

- $\text{SD}(N)=2N$

Ejemplos

Los tres primeros números perfectos son 6; 28 y 496.

- Divisores de 6

  $\overbrace{1;\ 2;\ 3}^{\text{divisores propios}};\ 6$

  SD(propios de 6)=6

  SD(6)=12=2(6)

- Divisores de 28

  $\overbrace{1;\ 2;\ 4;\ 7;\ 14}^{\text{divisores propios}};\ 28$

  SD(propios de 28)=28

  SD(28)=56=2(28)

- Divisores de 496

  $\overbrace{1;\ 2;\ 4;\ 8;\ 16;\ 31;\ 62;\ 124;\ 248}^{\text{divisores propios}};\ 496$

  SD(propios de 496)=496

  SD(496)=992=2(496)

Teorema

Un entero par es un número perfecto si tiene la forma $2^{p-1}(2^p-1)$, donde 2^p-1 es un número primo

Demostración

Como 2^p-1 es un número primo

$\rightarrow\ N=2^{p-1}(2^p-1)$ D.C.

Luego,

$$\text{SD}(N)=\text{SD}(2^{p-1})\times\text{SD}(2^p-1)$$

$$\text{SD}(N)=(1+2+2^2+2^3+\ldots+2^{p-1})(1+2^p-1)$$

$$\text{SD}(N)=\left(\frac{2^p-1}{2-1}\right)\times2^p$$

$$\text{SD}(N)=2\times\underbrace{2^{p-1}\times(2^p-1)}_{N}$$

$$\text{SD}(N)=2N$$

Por lo tanto, N es un número perfecto.

Ejemplos

- $2^2-1=3$ ← Es un número primo.

  $2^1(2^2-1)=6$ ← Es un número perfecto.

- $2^3-1=7$ ← Es un número primo.

  $2^2(2^3-1)=28$ ← Es un número perfecto.

- $2^5-1=31$ ← Es un número primo.

  $2^4(2^5-1)=496$ ← Es un número perfecto.

12.5. NÚMEROS ABUNDANTES

Un entero positivo N se denomina número abundante si la suma de sus divisores propios es mayor que N.

$$\boxed{\text{SD(propios de } N) > N}$$

Ejemplos

- Sean los divisores de 12

  $\overbrace{1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 6}^{\text{divisores propios}};\ 12$

  $\rightarrow$ SD(propios de 12) $= 16 > 12$

  Por lo tanto, 12 es un número abundante.

- Sean los divisores de 30

  $\overbrace{1;\ 2;\ 3;\ 5;\ 6;\ 10;\ 15}^{\text{divisores propios}};\ 30$

  $\rightarrow$ SD(propios de 30) $= 42 > 30$

  Por lo tanto, 30 es un número abundante.

12.6. NÚMEROS DEFECTUOSOS

Un entero positivo N se denomina número defectuoso si la suma de sus divisores propios es menor que N.

$$\boxed{\text{SD(propios de } N) < N}$$

Ejemplos

- Sean los divisores de 91

  $\overbrace{1;\ 7;\ 13}^{\text{divisores propios}};\ 91$

  $\rightarrow$ SD(propios de 91) $= 21 < 91$

  Por lo tanto, 91 es un número defectuoso.

- Sean los divisores de 45

  $\overbrace{1;\ 3;\ 5;\ 9;\ 15}^{\text{divisores propios}};\ 45$

  $\rightarrow$ SD(propios de 45) $= 33 < 45$

  Por lo tanto, 45 es un número defectuoso.

12.7. NÚMEROS AMIGOS

Dos números enteros positivos A y B se denominan números amigos si la suma de los divisores propios de A es igual a B y la suma de los divisores propios de B es igual a A.

$$\boxed{\begin{array}{l}\text{SD(propios de } A) = B \quad \text{y} \\ \text{SD(propios de } B) = A\end{array}}$$

Observemos.

- SD(propios de A) $= B$

  $\text{SD}(A) - A = B$

  $\rightarrow \text{SD}(A) = A + B$

- SD(propios de B) $= A$

  $\text{SD}(B) - B = A$

  $\rightarrow \text{SD}(B) = A + B$

Por lo tanto, si A y B son números amigos, se cumple que

$$\boxed{\text{SD}(A) = \text{SD}(B) = A + B}$$

Ejemplos

Sean los números 220 y 284.

- $220 = 2^2 \times 5 \times 11$ D.C.

  $\text{SD}(220) = \text{SD}(2^2) \times \text{SD}(5) \times \text{SD}(11)$

  $\text{SD}(220) = (7)(6)(12) = 504$

  SD(propios de 220) $= \text{SD}(220) - 220$

  SD(propios de 220) $= 284$

- $284 = 2^2 \times 71$ D.C.

  $\text{SD}(284) = \text{SD}(2^2) \times \text{SD}(71)$

  $\text{SD}(284) = (7)(72) = 504$

  SD(propios de 284) $= \text{SD}(284) - 284$

  SD(propios de 284) $= 220$

Observemos.

SD(propios de 220)=284

SD(propios de 284)=220

Por lo tanto, 220 y 284 son números amigos.

Además,

SD(220)=SD(284)=220+284

Otros números amigos son 1184 y 1210; 2620 y 2924; 5020 y 5564; 6232 y 6368; 10 744 y 10 856.

12.8. NÚMEROS PRIMOS GEMELOS

Dos números primos A y B se denominan números primos gemelos si se diferencian en dos unidades.

Ejemplos

Los primos gemelos menores que 100 son

(3 y 5); (5 y 7); (11 y 13); (17 y 19); (29 y 31); (41 y 43); (59 y 61); (71 y 73)

Nota

Los primos gemelos más grandes que se conocen (hasta agosto de 2009) son los formados por los números

$65516468355 \times 2^{333333} - 1$

y $65516468355 \times 2^{333333} + 1$

que tienen la friolera de 100 355 cifras.

Enrique Gracián

Los números primos. Un largo camino al infinito

12.9. CONJETURA DE GOLDBACH

Christian Goldbach conjeturó que todo número par mayor que 2 puede escribirse como la suma de dos primos.

Ejemplos

- 4=2+2
- 6=3+3
- 8=3+5
- 10=3+7=5+5
- 12=5+7
- 14=3+11=7+7
- 16=3+13=5+11
- 18=5+13=7+11
- 20=3+17=7+13
- 22=3+19=5+17=11+11
- 24=5+19=7+17=11+13

Nota

- Christian Goldbach, matemático prusiano, envió una carta a Leonhard Euler el 7 de junio de 1742, en la que hizo una conjetura acerca de los números primos. Euler la redujo a lo que actualmente se conoce como
  - conjetura fuerte o binaria de Goldbach, que dice que todo número par mayor que 2 puede escribirse como una suma de dos números primos.
  - conjetura débil o ternaria de Goldbach, que dice que todo número impar mayor que 5 puede escribirse como una suma de tres números primos.
- En el 2013, el matemático peruano Harald Andrés Helfgott demostró la conjetura débil de Goldbach.
- Actualmente, la conjetura fuerte de Goldbach ha sido comprobada por métodos informáticos solo para los números pares menores de dos mil billones. La conjetura todavía no ha sido demostrada y está considerada por la comunidad matemática como uno de los problemas más difíciles de la historia de la ciencia.

Enrique Gracián

Los números primos. Un largo camino al infinito

12.10. NÚMEROS PRIMOS DE MERSENNE

Se denomina primo de Mersenne y se denota por M_p al número primo que tiene la forma 2^p-1, donde p es primo.

$$M_p=2^p-1;\ p \text{ es primo}$$

Teorema

Si un número de la forma 2^p-1 es primo, entonces p es primo.

Demostración

Usaremos el contrarrecíproco, es decir, el enunciado es equivalente a

Si p no es primo, entonces 2^p-1 no es primo.

- Sea $p=a\times b$ un número compuesto.

  $\{a;b\}\subset\mathbb{Z};\ a>1\ \wedge\ b>1$

  Entonces

  $$\begin{aligned}2^p-1&=2^{ab}-1\\&=(2^a)^b-1\\&=(2^a-1)[(2^a)^{b-1}+(2^a)^{b-2}+(2^a)^{b-3}+...+(2^a)+1]\end{aligned}$$

- Como $a>1$, entonces $2^a-1>1$

  Por lo tanto, 2^p-1 no es primo.

Nota

- En 1644, el matemático francés Marin Mersenne publicó su libro titulado *Cogitata Physico-Mathematica*, en cuyo prólogo indicaba que los números de la forma 2^p-1 resultan ser primos para valores de

  p: 2; 3; 5; 7; 13; 17; 19; 31; 67; 127 y 257

- Actualmente, se conoce que en dicha lista se omitió los primos para valores de

  p: 61; 89 y 107 además para p igual a 67 y 257 los números resultan compuestos.

- El 21 de diciembre de 2018, el grupo GIMPS (Great Internet Mersenne Prime Search) anunció el descubrimiento del primo de Mersenne número 51, el cual tiene 24 862 048 cifras y fue encontrado el 7 de diciembre de 2018 por Patrick Laroche.

  Dicho primo de Mersenne es el siguiente:

  $$M_{82\,589\,933}=2^{82\,589\,933}-1$$

$\phi(N)$	+0	+1	+2	+3	+4	+5	+6	+7	+8	+9
0+		1	1	2	2	4	2	6	4	6
10+	4	10	4	12	6	8	8	16	6	18
20+	8	12	10	22	8	20	12	18	12	28
30+	8	30	16	20	16	24	12	36	18	24
40+	16	40	12	42	20	24	22	46	16	42
50+	20	32	24	52	18	40	24	36	28	58
60+	16	60	30	36	32	48	20	66	32	44
70+	24	70	24	72	36	40	36	60	24	78
80+	32	54	40	82	24	64	42	56	40	88
90+	24	72	44	60	46	72	32	96	42	60

Valores de la función de Euler, $\phi(N)$, para $N < 100$.

2	59	137	227	313	419	509	617	727	829	947
3	61	139	229	317	421	521	619	733	839	953
5	67	149	233	331	431	523	631	739	853	967
7	71	151	239	337	433	541	641	743	857	971
11	73	157	241	347	439	547	643	751	859	977
13	79	163	251	349	443	557	647	757	863	983
17	83	167	257	353	449	563	653	761	877	991
19	89	173	263	359	457	569	659	769	881	997
23	97	179	269	367	461	571	661	773	883	
29	101	181	271	373	463	577	673	787	887	
31	103	191	277	379	467	587	677	797	907	
37	107	193	281	383	479	593	683	809	911	
41	109	197	283	389	487	599	691	811	919	
43	113	199	293	397	491	601	701	821	929	
47	127	211	307	401	499	607	709	823	937	
53	131	223	311	409	503	613	719	827	941	

Números primos menores que 1000.

LECTURA

Los números primos en la criptografía

En 1975, W. Diffie y M. Hellman, de la Universidad de Stanford, desarrollaron la idea de los cifrados asimétricos o de "clave pública", un sistema basado en determinadas funciones matemáticas, llamadas "de una sola dirección" o "funciones con trampa", que hacen posible el cifrado, pero virtualmente imposible el descifrado si no se conoce la clave. La idea es que cada usuario posea un par de claves, una pública y otra privada. Si quiero enviar un mensaje a una persona, cifro el mensaje según su clave, que es pública, en el sentido de que cualquiera puede conocerla, pero solo ella, con su clave privada, la puede descifrar. Una de las ventajas de este método es que la clave privada nunca circula por los medios de comunicación y, por tanto, no es necesario renovarla constantemente. No se trata de un tema sencillo, pero podemos intentar comprenderlo mediante una analogía. Imaginemos un gran almacén de pinturas en el que disponemos de cientos de miles de botes de distintos colores. Tomamos dos botes cualesquiera y hacemos una mezcla con diferentes cantidades de pintura de cada bote. Hasta aquí, se trata de una operación sencilla. Pero si ahora le mostramos el resultado a alguien y le pedimos que "descifre" las cantidades de colores que han intervenido en la mezcla final lo ponemos ante un problema de difícil solución.

Este es el mecanismo de las funciones matemáticas con trampa o de una sola dirección, en las que es muy fácil "ir" pero prácticamente imposible "volver". Supongamos ahora que en el almacén, en vez de botes de pintura tenemos números primos. Tomamos dos al azar, por ejemplo el 7 y el 13, y los multiplicamos, operación análoga a mezclar los botes de pintura, con el resultado de $7 \times 13 = 91$.

La pregunta que se plantea entonces es la siguiente: "¿Se puede saber qué dos números primos multiplicados entre sí dan 91 como resultado?". Es cuestión de tener una lista de números primos e ir haciendo pruebas. La cosa parece sencilla, como lo sería también la de averiguar los colores que forman la mezcla de pinturas si en el almacén no hubiera más que una docena de colores básicos. Pero las cosas no son así y mucho menos, con los números primos.

Averiguar, por ejemplo, que el número 1 409 305 684 859 es el resultado de multiplicar los dos números primos 705 967 y 1 996 277 puede poner a prueba la paciencia de cualquiera, sobre todo si se tiene en cuenta que estos dos números primos se han extraído de una lista en la que figuran todos aquellos que hay entre el número 1 y el número 2 000 000, que son la friolera de 148 933.

Adaptado de GRACIÁN, Enrique. *Los números primos. Un largo camino al infinito.*

Problemas resueltos

Problema 1

Una recta de 350 m se puede dividir en partes iguales, siendo la longitud de cada parte una cantidad entera de centímetros. ¿De cuántas formas diferentes se puede realizar dicha división?

Resolución

Sabemos que

350 m < > 35 000 cm

Sea L la longitud de cada parte.

Si L debe ser un número entero contenido en 35000, entonces L es un divisor de 35000.

$\rightarrow$ $35000=2^3\times5^4\times7$ D.C.

$CD(35000)=4\times5\times2=40$

Se debe eliminar $L=35000$, ya que no se estaría realizando ninguna división de la recta.

Por lo tanto, dicha división se puede realizar de 39 formas diferentes.

Problema 2

Durante el Mundial Rusia 2018, Andrés, Barny y Claudio coleccionaron cada uno un álbum de 600 figuritas. Hasta el momento, ellos tienen 352; 336 y 328 figuritas, respectivamente. Si el álbum cuesta N soles, halle N si se sabe que este valor es igual a la mayor diferencia entre la cantidad de divisores del número de figuritas que le faltan a Andrés, Barny y Claudio para completar el álbum.

Resolución

Sean A, B y C las cantidades de figuritas que le faltan a Andrés, Barny y Claudio, respectivamente.

$A=600-352=248=2^3\times31$ D.C.

$B=600-336=264=2^3\times3\times11$ D.C.

$C=600-328=272=2^4\times17$ D.C.

$\rightarrow$ $CD(A)=(4)(2)=8$

$CD(B)=(4)(2)(2)=16$

$CD(C)=(5)(2)=10$

$\therefore$ $N=16-8=8$

Problema 3

Halle $b+c$ si a, b y c son números primos absolutos que cumplen que $a+b=21$ y $a+c=33$.

Resolución

Supongamos que a, b y c son primos impares (I).

$$\underset{\text{I}}{a}+\underset{\text{I}}{b}=\underset{\text{P}}{21} \quad \text{No cumple} \qquad \underset{\text{I}}{a}+\underset{\text{I}}{c}=\underset{\text{P}}{33} \quad \text{No cumple}$$

Entonces en ambos casos debe estar el primo 2, el cual debe ser a.

$$\underset{2}{a}+\underset{19}{b}=21 \qquad \underset{2}{a}+\underset{31}{c}=33$$

$\therefore$ $b+c=50$

Problema 4

Halle el residuo que se obtiene al dividir el producto de los 1000 primeros números primos entre 44.

Resolución

Sea P el producto de los 1000 primeros números primos.

$$P=\overbrace{2\times3\times5\times7\times11\times13\times\ldots}^{\text{1000 factores}}$$

$$P=(2\times11)\times\underbrace{3\times5\times7\times13\times\ldots}_{\text{impar}}$$

$\rightarrow$ $P=(22)(2k+1);\ k\in\mathbb{Z}^+$

$$P=44k+22=\overset{\circ}{44}+22$$

Por lo tanto, el residuo pedido es 22.

Problema 5

Halle el residuo que se obtiene al dividir la suma de los 100 primeros números primos, elevados a la cuarta, entre 8.

Resolución

Sea S la suma de los 100 primeros números primos elevados a la cuarta.

$$S=\overbrace{2^4+3^4+5^4+7^4+11^4+\ldots}^{100\text{ sumandos}}$$

$\ldots$ $\overset{\circ}{8}+1$

Recuerde

$$(\text{impar})^{\text{par}}=\overset{\circ}{8}+1$$

$\rightarrow\ S=16+99(\overset{\circ}{8}+1)$

$S=\overset{\circ}{8}+(\overset{\circ}{8}+3)(\overset{\circ}{8}+1)$

$S=\overset{\circ}{8}+(\overset{\circ}{8}+3)=\overset{\circ}{8}+3$

Por lo tanto, el residuo pedido es 3.

Problema 6

Determine la cantidad de números primos que al ser expresados en el sistema cuaternario se escriben con 3 cifras.

Resolución

Sea N un número primo.

$N=\overline{abc}_4$

$\rightarrow\ 4^2\leq N<4^3$

N: 17; 19; 23; 29; 31; 37; 41; 43; 47; 53; 59; 61

Por lo tanto, hay 12 números primos que cumplen la condición.

Problema 7

A Andrés se le encargó que determinara si el número N es primo o compuesto. Él usó el método y advirtió que debía realizar 7 divisiones; sin embargo, en la cuarta división determinó que N es compuesto. ¿Cuántos valores toma N?

Resolución

Usando el método se tiene que

- $\sqrt{N}$ aprox.

  números primos $\leq\sqrt{N}$

  2; 3; 5; 7; 11; 13; 17

  * (ya que debía realizar 7 divisiones)

  Entonces

  $\sqrt{N}=\begin{cases}17,\ldots\\18,\ldots\end{cases}$

  De ahí se tiene que $17<\sqrt{N}<19$

- En la cuarta división determinó que era compuesto, entonces

  $N\neq\begin{cases}\overset{\circ}{2};\ (N\text{ es impar})\\\overset{\circ}{3}\\\overset{\circ}{5}\end{cases}$

  $N=\overset{\circ}{7}=7k;\ k\in\mathbb{Z}^+$

  Tengamos presente que también $k\neq\begin{cases}\overset{\circ}{2}\\\overset{\circ}{3}\\\overset{\circ}{5}\end{cases}$

  Como $17<\sqrt{N}<19$ ← Elevamos al cuadrado

  $289<N<361$

  $289<7k<361$

  $41,\ldots<k<51,\ldots$

  $k=43;\ 47;\ 49$

$\rightarrow\ N=\begin{cases}7(43)\\7(47)\\7(49)\end{cases}$

Por lo tanto, N toma 3 valores.

Problema 8

Sea $A=120\times45^n;\ n\in\mathbb{Z}^+$

Si A tiene 156 divisores compuestos, halle el valor de n.

Resolución

Tenemos que

$A=120\times45^n$

$A=12\times10\times(3^2\times5)^n$

$A=(2^2\times3)(2\times5)\times3^{2n}\times5^n$

$$A=2^3\times 3^{2n+1}\times 5^{n+1} \qquad \text{D.C.}$$

divisores primos

$\rightarrow$ CD(simples de A)$=4$

> **Recuerde**
>
> CD(A) = CD(simples) + CD(compuestos)

$\rightarrow$ CD(A)$=4+156=160$

$(3+1)(2n+2)(n+2)=160$

$4\times 2(n+1)(n+2)=160$

$\underbrace{(n+1)}_{4}\underbrace{(n+2)}_{5}=20$

$\therefore\ n=3$

Problema 9

Si $B=24^2\times 20^n$

¿cuántos divisores tiene B si se sabe que tiene 15 divisores impares?

Resolución

Tenemos que

$B=24^2\times 20^n$

$B=(2^3\times 3)^2\times(2^2\times 5)^n$

$B=2^6\times 3^2\times 2^{2n}\times 5^n$

$B=2^{2n+6}\times \boxed{3^2\times 5^n}$ (CD)

CD(impares)$=(2+1)(n+1)=15$

$\rightarrow\ n=4$

Luego,

$B=2^{14}\times 3^2\times 5^4$ D.C.

$\rightarrow$ CD(B)$=(14+1)(2+1)(4+1)$

$\therefore$ CD(B)$=225$

Problema 10

Sea $N=a\times b\times(a+2)\times\overline{ab}\times\overline{ba}^2$

Si N se encuentra descompuesto canónicamente, halle la suma de sus divisores simples.

Resolución

De la descomposición canónica de N,

- b; $\overline{ab}$ y $\overline{ba}$ son primos
  $\rightarrow\ b\in\{3;7\}$
- a y $(a+2)$ son primos
  $\rightarrow\ a=3\ \wedge\ b=7$

Así tenemos que

$$N=3\times 5\times 7\times 37\times 73^2 \qquad \text{D.C.}$$

divisores primos de N

Nos piden

$1+3+5+7+37+73=126$

Por lo tanto, la suma de los divisores simples de N es 126.

Problema 11

¿Cuántos números primos se expresan en base 6 como un número capicúa de 3 cifras?

Resolución

Sea N un número primo.

$N=\overline{aba}_6$ es impar

Entonces

$\underbrace{37a}_{\text{impar}}+6b=N$

$\rightarrow\ a=1;3;5$

Se descarta $a=3$ porque N sería $\overset{\circ}{3}$, por lo tanto no sería primo.

Luego,

$37a+6b=N$

a	b	N	
1	0	37	Sí cumple
	1	43	Sí cumple
	2	49	No cumple
	4	61	Sí cumple
	5	67	Sí cumple

$b=3\ \rightarrow\ N=\ldots 5$ No cumple

a	b	N	
5	1	191	Sí cumple
	2	197	Sí cumple
	3	$203=\overset{\circ}{7}$	No cumple
	4	$209=\overset{\circ}{11}$	No cumple

Para $b=0;5$ $N=\overset{\circ}{5}$ No cumple

Por lo tanto, son 6 números primos.

Problema 12

¿Cuántos números de tres cifras son PESI con 120?

Resolución

Sea

- $120=2^3\times3\times5$ D.C.
- $\overline{abc}$ es PESI con 120.

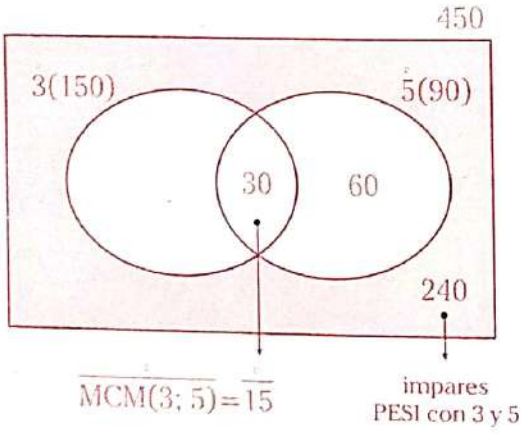
$$\rightarrow \overline{abc}\neq \begin{cases} \overset{\circ}{2};\ (\overline{abc}\text{ es impar}) \\ \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{5} \end{cases}$$

$$\overline{abc}:\underbrace{100;\ 101;\ 102;\ 103;\ ...;\ 999}_{900\text{ números}}$$

Entonces hay 450 números impares de tres cifras.

De los 450 números impares

- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números }\overset{\circ}{3}\end{pmatrix}=\dfrac{450}{3}=150$
- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números }\overset{\circ}{5}\end{pmatrix}=\dfrac{450}{5}=90$
- $\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números }\overset{\circ}{15}\end{pmatrix}=\dfrac{450}{15}=30$



Por lo tanto, hay 240 números de tres cifras que son PESI con 120.

Problema 13

¿En cuántos ceros termina 120!?

Resolución

Sea $A=120!=1\times2\times3\times4\times5\times6\times...\times120$

Si A termina en n ceros

$$A=\overline{abc...\alpha\underbrace{000...0}_{n\text{ ceros}}};\quad \alpha\neq0$$

$$A=\overline{abc...\alpha}\times10^n$$

Como $10^n=(2\times5)^n$

Entonces analizaremos las potencias de 2 y 5 contenidas en 120!

Ahora, observemos que en 120! hay más factores $\overset{\circ}{2}$ que factores $\overset{\circ}{5}$, entonces el valor de n lo determinará el exponente de 5 contenido en 120!

$$\begin{array}{r|l} 120 & 5 \\ \cline{2-2} 24 & 5 \\ \cline{2-2} & 4 \end{array}$$

$\rightarrow\ n=24+4=28$

Por lo tanto, 120! termina en 28 ceros.

Problema 14

¿Cuántas ternas de números primos diferentes entre sí existen, tal que el producto de dos de ellos más el otro sea igual a 33?

Resolución

Sean a, b y c números primos diferentes entre si, tal que

$$a\times b+c=33$$

Supongamos que a, b y c son primos impares (I).

$$\underset{I}{a}\times\underset{I}{b}+\underset{I}{c}=\underset{P}{33}\quad\text{No cumple}$$

Entonces uno de ellos debe ser el primo 2.

- $c=2$

  $\rightarrow\ a\times b=31$ No cumple

- $a=2$

$\rightarrow 2b+c=33$

3	27	No cumple
5	23	Sí cumple
7	19	Sí cumple
11	11	No cumple
13	7	Sí cumple

Cumplen (2; 5 y 23), (2; 7 y 19) y (2; 13 y 7).

Por lo tanto, hay 3 ternas.

Problema 15

Si $\overline{ab}$, $\overline{aa}$ y 12 son PESI 2 a 2, halle la suma de valores de b.

Resolución

Sea

$\overline{ab}$; $\overline{aa}$; $12=2^2\times 3$ D.C.

- $\overline{ab}$ y 12 son PESI; $\overline{ab} \neq \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{3} \end{cases}$ b: 1; 3; 5; 7; 9; $a+b=3$
- $\overline{aa}$ y 12 son PESI; $\overline{aa} \neq \begin{cases} \overset{\circ}{2} \\ \overset{\circ}{3} \end{cases}$ a: 1; 5; 7
- $\overline{ab}$ y $\overline{aa}$ son PESI $\rightarrow b\neq a$

Entonces

	$\overline{ab}$	$\overline{aa}$ y 12
$a=1$:	13	11
	17	11
	19	11
$a=5$:	53	55
	59	55
$a=7$:	71	77
	73	77
	79	77

Entonces los valores que toma b son 1; 3; 7 y 9.

Por lo tanto, la suma de valores de b es 20.

Problema 16

Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. Si tres números son primos relativos, entonces al menos uno de ellos es primo.

II. El cuadrado de todo número primo mayor que 3, expresado en base 6, termina en 1.

III. $(\overline{ab}+1)$ y $(2\times\overline{ab}+1)$ son coprimos.

Resolución

I. Falso

Veamos un contraejemplo:

4; 21 y 55 son números compuestos

4 ; 21 y 55 son PESI

1	1	1
2	3	5
4	7	11
	21	55

II. Verdadero

Por propiedad, si N es primo mayor que 3, entonces $N=\overset{\circ}{6}\pm 1$.

Luego,

$N^2=\overset{\circ}{6}+1=...1_6$

III. Verdadero

Propiedad: $\overline{ab}$ y $(\overline{ab}+1)$ son PESI

Propiedad: $(\overline{ab}+1)$ y $\underbrace{\left[\overline{ab}+(\overline{ab}+1)\right]}_{(2\times\overline{ab}+1)}$ son PESI

Problema 17

Sea $A+12^n=12^{n+2}+12^{n+1}$; $n\in\mathbb{Z}^+$

Halle el valor de n si sabe que A tiene 179 divisores propios.

Resolución

Sea

$A+12^n=12^{n+2}+12^{n+1}$

$A=12^{n+2}+12^{n+1}-12^n$

$A=12^n(12^2+12^1-1)$

$A=(2^2\times 3)^n(155) \rightarrow A=2^{2n}\times 3^n\times 5\times 31$ D.C.

Luego,

CD (propios de A) = CD(A) − 1

$\rightarrow$ CD(A) = 180

$(2n+1)(n+1)(1+1)(1+1)=180$

$\underbrace{(2n+1)}_{9}\underbrace{(n+1)}_{5}=45=3\times 3\times 5$

$\therefore\ n=4$

Problema 18

Si la suma de divisores de N es 1992, halle la suma de los valores que toma N.

Resolución

Sea

$$SD(N)=1922=2\times31\times31$$

Analicemos.

- 2 no puede ser la suma de divisores de un entero positivo.
- $2\times31=62$ es la suma de divisores del primo 61.
- 31 puede ser la suma de divisores de 2^4 o de 5^2.

Entonces

- $N=2^4\times61$ D.C.

  $SD(N)=SD(2^4)\times SD(61)$

  $\rightarrow\ SD(N)=31\times62$
- $N=5^2\times61$ D.C.

  $SD(N)=SD(5^2)\times SD(61)$

  $\rightarrow\ SD(N)=31\times62$

Por lo tanto, nos piden

$$2^4\times61+5^2\times61=(2^4+5^2)61=2501$$

Problema 19

Andrea debe elaborar una maqueta de una pista de baile con forma de un polígono regular, cuyo perímetro debe ser 2,4 m. Si la longitud de cada lado debe ser una cantidad entera de centímetros, ¿cuántos diseños diferentes puede realizar Andrea?

Resolución

Recordemos que un polígono regular tiene todos sus lados de igual longitud.

En la maqueta, la pista de baile tiene la forma de un polígono regular de n lados, donde L es la longitud de cada lado, tal que

$$\{n;L\}\subset\mathbb{Z}^+\ \wedge\ n>2$$

Por condición, el perímetro debe medir

$$2{,}4\text{ m} <> 240\text{ cm}$$

$\rightarrow\ n\times L=240$

n	L	
1	240	No cumple
2	120	No cumple
3	80	Sí cumple
4	60	Sí cumple
⋮	⋮	

Como se puede observar, solo depende de la CD(240), pero le debemos quitar los 2 casos que no cumplen.

$240=2^4\times3\times5$ D.C.

$\rightarrow\ CD(240)=(5)(2)(2)=20$

Luego,

$$20-2=18$$

Por lo tanto, Andrea puede realizar 18 diseños diferentes de su maqueta.

Problema 20

Si $\overline{abb}$ y $(\overline{abb}+60)$ son primos relativos, halle la suma del menor y mayor valor que puede tomar $\overline{abb}$.

Resolución

Sabemos que

$\overline{abb}$ y $(\overline{abb}+60)$ son PESI

Por propiedad, se cumple que

$\overline{abb}$ y $\underbrace{\left[(\overline{abb}+60)-\overline{abb}\right]}_{60}$ son PESI

$60=2^2\times3\times5$ D.C.

$$\rightarrow\ \overline{abb}\neq\begin{cases}\overset{\circ}{2}\ ;\ (b\text{ es impar})\\ \overset{\circ}{3}\ ;\ (a+2b\neq\overset{\circ}{3})\\ \overset{\circ}{5}\ ;\ (b\neq\overset{\circ}{5})\end{cases}$$

donde

- el mínimo valor de $\overline{abb}$ es $\overline{1b1}$ ($1\to3$)
- el mayor valor de $\overline{abb}$ es $\overline{9bb}$ ($9\to7$)

$\therefore\ 133+977=1110$

Problema 21

¿Cuántos números enteros positivos menores que 7623 son PESI con 231?

Resolución

Se tiene que

$231=3\times7\times11$ D.C.

Sea N el entero positivo menor que 7623, entonces

$$N\neq \begin{cases} \overset{\circ}{3} \\ \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{11} \end{cases}$$

Observamos que

$7623=3^2\times7\times11^2$ D.C.

Entonces N es menor que 7623 y PESI con 7623 (ya que tiene los mismos factores primos que 231), por lo que la cantidad de valores que toma N equivale a $\phi(7623)$.

$\phi(7623)=\phi(3^2)\times\phi(7)\times\phi(11^2)$

$\phi(7623)=3^1(3-1)\times6\times11^1(11-1)$

$\rightarrow \phi(7623)=3960$

Por lo tanto, hay 3960 números enteros positivos menores que 7623 que son PESI con 231.

Problema 22

Sea $N=\overline{abab}_{13}$

Si N tiene 19 divisores propios, halle $a\times b$.

Resolución

Debemos hallar la D.C. de N.

$N=\overline{abab}_{13}$

$N=\overline{ab}_{13}\times13^2+\overline{ab}_{13}=170\times\overline{ab}_{13}$

$N=2\times5\times17\times\overline{ab}_{13}$

Entonces N tiene al menos 3 divisores primos.

Además,

$CD(N)=CD(\text{propios})+1=20$

$CD(N)=20=2\times2\times5$

Luego, N tiene solo 3 divisores primos.

$N=(\ )^1(\ )^1(\ )^4$ D.C.

Además, $13\leq\overline{ab}_{13}<13^2$

Luego,

$N=2\times5\times17^4$ D.C. $\rightarrow \underbrace{17^3}_{\overline{ab}_{13}}$ No cumple

$N=2\times5^4\times17$ D.C. $\rightarrow 5^3$ Sí cumple

$N=2^4\times5\times17$ D.C. $\rightarrow 2^3$ No cumple

$\rightarrow \overline{ab}_{13}=5^3=125=98_{13}$

$a=9 \wedge b=8$

$\therefore\ a\times b=72$

Problema 23

Sea $N=1\,004\,006\,004\,001$

Halle la cantidad de divisores compuestos de N.

Resolución

Primero hallemos la D.C. de N.

$N=1\times10^{12}+4\times10^9+6\times10^6+4\times10^3+1$

$N=1\times(10^3)^4+4\times(10^3)^3+6\times(10^3)^2+4\times(10^3)^1+1$

$\rightarrow N=14641_{10^3}$

Si $10^3=k$, entonces

$N=14641_k=k^4+4k^3+6k^2+4k+1$

$N=(k+1)^4$

$N=1001^4=(7\times11\times13)^4$

$N=7^4\times11^4\times13^4$ D.C.

Luego,

$CD(N)=(5)(5)(5)=125$

$CD(\text{simples})=1+\underbrace{CD(\text{primos})}_{3}=4$

Recuerde

CD(N)=CD(simples)+CD(compuestos)

$\rightarrow$ 125=4+CD(compuestos)

$\therefore$ CD(compuestos)=121

Problema 24

Señale el valor de verdad de las siguientes proposiciones:

I. La mayor potencia de 6 contenida en 120! es 6^{23}.

II. Si N es un entero positivo impar, entonces $\phi(N)=\phi(2N)$

III. Al dividir 462×20! entre 23, se obtiene 1 de residuo.

Resolución

I. Falso

$120!=2^a\times3^b\times5^c\times\ldots$ D.C.

Como $a>b$, solo podremos formar

$120!=(2\times3)^b\times2^{a-b}\times5^c\times\ldots$

Entonces el exponente de 6 solo depende del valor que tome b.

$$\begin{array}{l|l} 120 & 3 \\ \quad (40) & 3 \\ \quad\quad (13) & 3 \\ \quad\quad\quad (4) & 3 \\ \quad\quad\quad\quad (1) & \end{array} \qquad \rightarrow b=40+13+4+1=58$$

Por lo tanto, la mayor potencia de 6 contenida en 120! es 6^{58}.

II. Verdadero

Por propiedad, si 2 y N son PESI 2 a 2, entonces

$$\phi(2N)=\underbrace{\phi(2)}_{1}\times\phi(N)=\phi(N)$$

III. Falso

$$\underbrace{462}_{21\times22}\times20!=22!$$

Por teorema de Wilson, como 23 es primo

$\rightarrow$ $(23-1)!=\overset{\circ}{\overline{23}}-1$

$22!=\overset{\circ}{\overline{23}}-1=\overset{\circ}{\overline{23}}+22$

Por lo tanto, al dividir 462×20! entre 23, se obtiene 22 de residuo.

Problema 25

Halle la suma de las 4 últimas cifras de 2045^{542} luego de expresarlo en el sistema ternario.

Resolución

Tenemos que

$$2045^{542}=\overline{x\ldots abcd}_3=\overset{\circ}{\overline{(3^4)}}+\overline{abcd}_3$$

$$\left(\overset{\circ}{\overline{81}}+20\right)^{542}=\overset{\circ}{\overline{81}}+\overline{abcd}_3$$

$$\overset{\circ}{\overline{81}}+20^{542}=\overset{\circ}{\overline{81}}+\overline{abcd}_3$$

$$20^{542}=\overset{\circ}{\overline{81}}+\overline{abcd}_3 \qquad (*)$$

Por teorema de Euler

- $81=3^4$ D.C.

  $\phi(81)=3^3(3-1)=54$

- 20 y 81 son PESI

  $20^{54}=\overset{\circ}{\overline{81}}+1$

$$\rightarrow 20^{542}=(20^{54})^{10}\times20^2$$
$$=\left(\overset{\circ}{\overline{81}}+1\right)^{10}\times400$$
$$=\left(\overset{\circ}{\overline{81}}+1\right)\left(\overset{\circ}{\overline{81}}+76\right)$$
$$=\overset{\circ}{\overline{81}}+76$$

Reemplazamos en (*).

$$\overset{\circ}{\overline{81}}+76=\overset{\circ}{\overline{81}}+\overline{abcd}_3$$

$$\rightarrow \overline{abcd}_3=76=2211_3$$

Luego,

$a+b+c+d=6$

Por lo tanto, la suma de las cuatro últimas cifras es 6.

Test

1. Señale la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
   I. Los únicos números consecutivos que son primos son el 2 y el 3.
   II. La única terna de impares consecutivos que son primos son 3; 5 y 7.
   III. Si $\overline{ab}$ es primo, entonces la suma de los valores que puede tomar b es 15.

   A) VVV B) VFV C) VFF
   D) VVF E) FVF

2. Sea $A=n^2(n+1)^3(5n+1)^4$ D.C.
   Halle la suma de los divisores simples de A.

   A) 15 B) 16 C) 17
   D) 18 E) 20

3. ¿Cuántos números primos de dos cifras existen?

   A) 25 B) 24 C) 22
   D) 21 E) 20

4. Sea $N=(a-1)^b\times a^b\times\overline{bb}^{a+b}$ D.C.
   Halle la cantidad de divisores de N.

   A) 12 B) 16 C) 20
   D) 24 E) 30

5. Se tiene que
   $A=(n-1)\times(n+1)\times(n+3)\times\overline{(n+5)b}^{n}$ D.C.
   ¿Cuántos divisores compuestos tiene A?

   A) 30 B) 32 C) 34
   D) 35 E) 36

6. Si $\overline{aa}$ y 30 son primos relativos, calcule la suma de los valores que puede tomar a.

   A) 8 B) 13 C) 15
   D) 20 E) 25

7. Si la suma de los divisores de N es 31, halle la suma de los valores que puede tomar N.

   A) 16 B) 31 C) 40
   D) 47 E) 65

8. Halle la suma de los divisores simples de 105 105.

   A) 36 B) 37 C) 40
   D) 47 E) 48

9. Calcule la cantidad de enteros positivos que son menores o iguales que 1000 y PESI con 1000.

   A) 225 B) 360 C) 399
   D) 400 E) 401

10. Señale la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
    I. Sea $N\in\mathbb{Z}^+$
    $SD(N)=SD(\text{simples})+SD(\text{compuestos})$
    II. $\overline{a7}$; $\overline{ab}$; $\overline{ba}$ y $\overline{a9}$ son primos relativos.
    III. Si A, B y C son PESI, entonces
    $\phi(A\times B\times C)=\phi(A)\times\phi(B)\times\phi(C)$

    A) VVV B) VFF C) FVF
    D) VVF E) VFV

CLAVES

1 D 2 C 3 D 4 C 5 D 6 A 7 D 8 C 9 D 10 D

Problemas propuestos

Nivel básico

1. El lado mayor de un triángulo mide 60 m. ¿De cuántas formas diferentes se puede dividir dicho lado, de tal manera que las partes tengan longitudes iguales, que sean enteras y medidas en centímetros?

A) 10 B) 11 C) 12
D) 39 E) 40

2. Señale la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I Todo número entero positivo tiene al menos un divisor compuesto.
II. El 6 es un número perfecto.
III. 581 es un número primo absoluto.

A) VVF
B) FVV
C) FFV
D) VFF
E) FVF

3. La suma de tres números primos absolutos es 146 y la diferencia de dos de ellos es 99. Halle la suma de divisores de la suma de los dos menores primos absolutos mencionados.

A) 56 B) 78 C) 84
D) 104 E) 124

4. Halle el residuo que se obtiene al dividir el producto de los $\overline{abc}$ primeros números primos entre 204.

A) 110 B) 102 C) 51
D) 24 E) 18

5. Sean
$A=(a-2)^3\times a\times(a+2)^2$ D.C.
$B=(n-2)^n\times(n-1)^{n+1}\times\overline{(n-2)(n-1)}$ D.C.
Halle la suma de divisores simples de A más la cantidad de divisores compuestos de B.

A) 40 B) 56 C) 70
D) 71 E) 72

6. La cantidad de divisores de 48^n excede a la cantidad de divisores de 45^n en 60. Halle la cantidad de divisores impares de $48^n\times45^n$.

A) 75 B) 84 C) 96
D) 104 E) 126

7. Si $A=20^n\times15^n$ tiene 60 divisores pares, halle la suma de divisores de A que son PESI con 125.

A) 144 B) 208 C) 403
D) 720 E) 2418

8. De los 180 primeros números enteros positivos, ¿cuántos son PESI con 48?

A) 30 B) 45 C) 59
D) 60 E) 90

9. ¿Cuántos números de dos cifras son primos relativos con $360^{\overline{ab}}$?

A) 18 B) 21 C) 24
D) 36 E) 63

10. ¿Cuántos números enteros comprendidos entre 350 y 1500 son primos relativos con 135?

A) 610 B) 612 C) 613
D) 614 E) 615

11. Halle el residuo que se obtiene al dividir la suma de los cuadrados de los primeros 600 números primos entre 3.

A) 0 B) 1 C) 2
D) 3 E) 4

12. Sean

$A=15^{2a+1}\times 25^{a}$; $a\in\mathbb{Z}^{+}$

$B=25^{a+1}\times 9^{a}$

Si la CD(A) excede a la CD(B) en 25, determine la cantidad de divisores compuestos que tiene $A\times B$.

A) 93 B) 112 C) 117
D) 157 E) 158

13. Sea $A=\overline{a(b+1)}^{2}\times\overline{a(b-1)}^{3}\times\overline{a(b+5)}^{4}$ D.C.
Halle la suma de los valores que puede tomar la suma de divisores simples de A.

A) 172 B) 144 C) 152
D) 164 E) 174

14. Sea $N=195^{a}\times 21^{b}$
Si N tiene 2690 divisores compuestos, halle la suma de divisores de $\overline{ba}$.

A) 68 B) 72 C) 84
D) 110 E) 144

15. ¿Cuántos de los divisores de 324 000 son divisibles por 6 y 8 pero no por 10?

A) 10 B) 12 C) 18
D) 27 E) 30

16. Sea $N=a^{3}\times b^{b}\times 3^{a}$ D.C.
Si N tiene 68 divisores compuestos y ninguno de ellos es $\overline{27}$, halle la cantidad de divisores impares que tiene N.

A) 12 B) 15 C) 18
D) 20 E) 21

17. Si a, b y c son números primos, tal que $ab+ac=99$, halle la mayor diferencia entre b y c.

A) 5 B) 11 C) 19
D) 23 E) 29

18. ¿Cuántos números de 2 cifras son PESI con 21?

A) 47 B) 48 C) 50
D) 51 E) 54

19. Se tiene que $N=34^{2}+34^{3}$.
¿Cuántos divisores propios tiene N?

A) 11 B) 19 C) 23
D) 35 E) 39

20. ¿Cuántos números compuestos se expresan en base 6 con 3 cifras y en base 9 con 2 cifras?

A) 30 B) 33 C) 34
D) 35 E) 36

Nivel intermedio

21. Los hermanos Daniel, Olga, Juan y Gladys tienen edades diferentes, las cuales se representan por los números primos a, b, c y d, respectivamente, siendo Juan el menor y Olga la mayor. Halle la edad de Olga si se sabe que

- $a\times b+c\times d=153$
- la suma de las edades de los tres menores es 18 años.

A) 11 años B) 13 años C) 17 años
D) 19 años E) 23 años

22. ¿Cuántos números primos se expresan en el sistema cuaternario como $\overline{abbb}_4$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

23. Sea $S=\overline{ab}+2\times\overline{ab}+3\times\overline{ab}+...+10\times\overline{ab}$
Si S tiene 27 divisores propios, halle la suma de divisores compuestos de $\overline{ab}$.

A) 62 B) 63 C) 64
D) 124 E) 125

24. Sea $A=12^n\times20^{n+1}\times30^{n+2}$; $n\in\mathbb{Z}^+$
Si A tiene 837 divisores que no son primos, ¿cuántos divisores de A son cuadrados perfectos impares?

A) 16 B) 24 C) 30
D) 42 E) 56

25. N es el menor entero positivo que tiene 29 divisores propios y es divisible por 21. Halle la suma de sus divisores propios.

A) 2040 B) 2216 C) 2612
D) 3016 E) 3223

26. El producto de divisores de N es $3^{105}\times6^{210}$. ¿En cuánto excede la cantidad de divisores cuadrados perfectos de N a la cantidad de divisores cubos perfectos de N?

A) 4 B) 6 C) 8
D) 9 E) 10

27. Si $\overline{2a}$, $\overline{(2b)b6}$ y $30^{\overline{ab}}$ son primos relativos, calcule la suma de valores que puede tomar a.

A) 13 B) 16 C) 17
D) 22 E) 25

28. ¿En cuántos ceros termina el 100! cuando se representa en el sistema de numeración de base 24?

A) 48 B) 45 C) 40
D) 36 E) 32

29. Para la elaboración de una maqueta se tiene que diseñar un techo con forma de un polígono regular de no menos de 5 lados. Si el perímetro del techo debe ser 3,6 m y cada lado debe medir una longitud entera en centímetros, ¿cuántos diseños diferentes se pueden realizar de dicho techo?

A) 19 B) 20 C) 21
D) 25 E) 26

30. Sea $A=18^{n+2}+18^n$; $n\in\mathbb{Z}^+$
Si A tiene 90 divisores que son $\overline{65}$, ¿cuántos divisores de A son PESI con 80?

A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 20

31. Si un número impar disminuye en sus $\frac{9}{13}$, se obtiene un número que tiene 20 divisores propios. ¿Cuántos divisores como máximo puede tener el primer número mencionado?

A) 8 B) 10 C) 12
D) 14 E) 20

32. Sea $A=2\times13^{n+2}+13^n$; $n\in\mathbb{Z}^+$
Si A tiene 8 divisores que son $\overline{39}$, ¿cuántos divisores de A son primos relativos con 75?

A) 6 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

33. Sea $A=(n-1)^a \times a^{2n+1} \times n^{a+n} \times \overline{bn}^n$ D.C.
Si A tiene divisores que terminan en cero, halle la suma de divisores del mayor valor que toma $a+b+n$.

A) 14 B) 18 C) 24
D) 28 E) 31

34. Si $\overline{mn(2m)(2n)}$ tiene 29 divisores propios, halle la suma de divisores de $\overline{mn}$.

A) 120 B) 104 C) 91
D) 60 E) 54

35. $N=1111000...0_5$ tiene 30 divisores que son PESI con 104. ¿Cuántos divisores de N no terminan en cero?

A) 54 B) 68 C) 84
D) 96 E) 112

36. Sea $N=\overline{abab}_7$
Halle la suma de cifras de N si se sabe que tiene 14 divisores propios.

A) 4 B) 6 C) 10
D) 14 E) 16

37. El entero positivo N tiene 3 divisores simples, su raíz cuadrada tiene 23 divisores propios y su cuadrado tiene 270 divisores compuestos. ¿Cuántos divisores de N no son primos?

A) 57 B) 58 C) 74
D) 75 E) 76

38. ¿Cuántos números enteros positivos impares que son menores que 21 000 son primos relativos con 315?

A) 3620 B) 3640 C) 4200
D) 4240 E) 4800

39. En la tabla de divisores de un entero positivo N que tiene 8 divisores propios, la suma de los términos de la diagonal que contiene al 1 es 1123. Halle la suma de los divisores compuestos de N.

A) 640 B) 1714 C) 1715
D) 1728 E) 1729

40. Sea $N=8^a \times 25^b$; $\{a; b\} \subset \mathbb{Z}$
Si se multiplica N por 5, su cantidad de divisores aumenta en 10; en cambio, si se divide N entre 4, su cantidad de divisores disminuye en 10. ¿Cuántos divisores tiene N?

A) 20 B) 35 C) 48
D) 50 E) 60

41. Sea $N=\overline{ababab}_3$
Halle la suma de divisores de N si $\overline{ab}$ es un número primo.

A) 1344 B) 1232 C) 784
D) 728 E) 364

42. Sea $N=12 \times 132^n \times 30^{n+2}$
Si N tiene 1315 divisores compuestos, halle la cantidad de divisores de N que son $\overline{20}$ y PESI con 63.

A) 48 B) 64 C) 75
D) 84 E) 108

Nivel avanzado

43. El mayor numeral $\overline{abcd}$ es múltiplo de 16 pero no de 32, además, es múltiplo de 9 pero no de 27. Halle la suma de los divisores impares de $\overline{abcd}$ si $a+c=b+d$.

A) 772 B) 822 C) 864
D) 901 E) 936

44. Señale la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. $\overline{ab}$ y $(1+2\times\overline{ab})$ son primos relativos.

II. Si a, b y c son PESI, entonces $\phi(a\times b\times c)=\phi(a)\times\phi(b)\times\phi(c)$

III. Hay 40 números enteros positivos que son menores o iguales a 100 y PESI con 100.

A) VVV B) VVF C) VFV
D) FFF E) FVV

45. N es la raíz cuadrada del producto de todos los enteros positivos menores que 1000, que tienen 4 divisores propios. Halle la suma de los divisores impares de N.

A) 248 B) 403 C) 741
D) 1025 E) 1729

46. Sea $N=1\,003\,003\,001$
Halle la cantidad de divisores propios de N.

A) 26 B) 27 C) 28
D) 63 E) 64

47. N tiene 2 divisores propios, y la suma de los números enteros positivos que son menores o iguales que N y PESI con N es 6655. Halle la suma de divisores de N.

A) 13 B) 31 C) 57
D) 111 E) 133

48. Exprese $(10!)^2$ en el sistema de numeración de base 23 y dé como respuesta la cifra de menor orden.

A) 1 B) 4 C) 7
D) 9 E) 11

49. Exprese 3746^{2942} en el sistema heptanario y dé como respuesta la suma de sus tres últimas cifras.

A) 6 B) 7 C) 8
D) 12 E) 14

50. Halle el residuo que se obtiene al dividir $(63!)^{36!}$ entre 97.

A) 1 B) 3 C) 13
D) 43 E) 96

51. Sea $S=\underbrace{2+3^2+5^4+7^6+11^{10}+13^{12}+\ldots}_{130\text{ sumandos}}$

Exprese S en el sistema duodecimal y dé como respuesta su cifra de menor orden.

A) 0 B) 1 C) 3
D) 7 E) 9

52. Sean $A=45\times 63!$
$B=19\times 63!$
$C=A+B$
$D=100A+36B$
Si C tiene k divisores, determine la cantidad de divisores de D, en función de k.

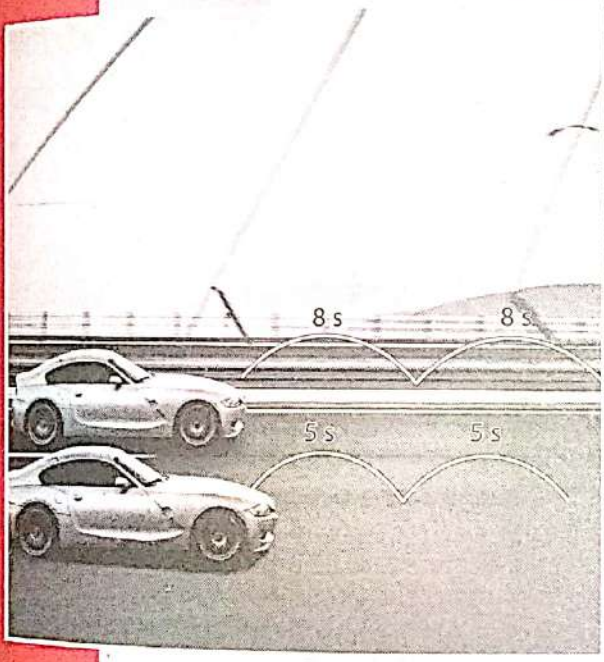
A) $\frac{7}{6}k$ B) $\frac{34}{31}k$ C) $\frac{17}{15}k$
D) $\frac{35}{33}k$ E) $\frac{35}{31}k$

53. Sea $N=\overline{abc}_6$
Se sabe que si el mayor $N!$ se expresa en base 13, termina en 14 ceros. Halle la suma de los divisores simples de N.

A) $\overline{cca}_6$ B) $\overline{bca}_6$ C) $\overline{ab(c+1)}_6$
D) 244 E) $2\times\overline{abc}_6$

Capítulo

IX



Euclides

Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

Raúl Flores Rivero

CAPÍTULO IX

MÁXIMO COMÚN DIVISOR Y MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO

Objetivos

- Reconocer los diferentes métodos para el cálculo del MCD y el MCM de números enteros positivos.
- Analizar las diferentes propiedades que se cumplen en el MCD y el MCM.
- Aprender a resolver los diferentes problemas de la realidad concreta utilizando el tema de MCD y MCM.

Introducción

Constantemente hacemos cálculos para obtener las dimensiones de un terreno, de una pieza mecánica, de una caja, etc.; encontrar las veces que coinciden las visitas periódicas de dos personas a un determinado lugar; el volumen que debe tener un recipiente como máximo para que al vaciar en ellos un volumen de líquido no sobre ni falte líquido; entre otros. Todo ello surge por la necesidad de obtener el menor costo posible, de evitar que haya desperdicios o, en todo caso, que este sea mínimo, con la intención de que en ciertos cálculos los resultados sean enteros.

Por ejemplo:

- Se desea colocar losetas en el piso de una determinada sala, para esto se debe diseñar losetas cuyas dimensiones sean tales que no haya la necesidad de cortar las losetas, o estos cortes sean mínimos.
- Diseñar cajas (generalmente cúbicas) que puedan almacenar objetos como jabones, cajas de fósforos, etc., tales que puedan contener la mayor cantidad de artículos posibles.
- Encontrar las dimensiones adecuadas en las cuales se debe dividir un terreno para obtener la menor cantidad de lotes sin que sobre terreno.

En el presente capítulo estudiaremos de qué manera se relacionan estas cantidades y los procedimientos teóricos y prácticos que nos permitan dar solución a estas situaciones concretas. En este sentido, evaluaremos los hechos de los que se desea obtener un divisor común de un conjunto de cantidades, siendo este el mayor posible, así como también ubicando un múltiplo común de otro conjunto de cantidades, siendo este el menor posible.

En este capítulo de MCD y MCM nos limitaremos a trabajar para números enteros positivos; sin embargo, el tema de MCD y MCM se puede extender a los números enteros.

1 ▸ MÁXIMO COMÚN DIVISOR (MCD)

En el capítulo de divisibilidad se definió lo que significa el divisor de un número, por ejemplo, 3 es divisor de 12. Hay situaciones de la vida cotidiana que involucran a dos o más cantidades y que se pueden resolver sin dificultad alguna, encontrando un número que sea divisor común de dichas cantidades y que sea el mayor de ellos.

Ejemplo

La señora Nilda tiene 300 monedas de 1 sol, y la señora Rosa tiene 400 monedas de 1 sol. Ambas desean cambiar sus monedas por billetes de una misma denominación y de mayor valor posible. Veamos cuántos billetes de dicha denominación tendrán cada una si hay solo billetes de S/10, S/20, S/50, S/100 y S/200.

Notamos que la señora Nilda podría cambiar por billetes de S/10; S/20; S/50 o S/100, pues estos son divisores de 300. La señora Rosa podría cambiar por billetes de S/10, S/20, S/50, S/100 o S/200, ya que estos son divisores de 400.

Como ambas desean cambiar por billetes de la misma denominación y de mayor valor posible, entonces elegirán aquel billete cuyo valor sea un divisor común de 300 y 400, y que sea el mayor de ellos. Es decir, cambiarán sus monedas por billetes de S/100.

A este valor 100 se le denomina MCD de 300 y 400.

- n.º de billetes obtenidos por Nilda $=\dfrac{300}{100}=3$
- n.º de billetes obtenidos por Rosa $=\dfrac{400}{100}=4$

1.1. DEFINICIÓN

Dado un conjunto de números enteros positivos, el máximo común divisor (MCD) de estos números es un número entero positivo que cumple las siguientes condiciones:

- Debe ser un divisor común de dichos números.
- Debe ser el mayor de los divisores comunes.

Ejemplo

Sean los números 36; 24 y 60.

Los divisores de 36 son

①, ②, ③, ④, ⑥, 9, ⑫, 18 y 36

Los divisores de 24 son

①, ②, ③, ④, ⑥, 8, ⑫ y 24

Los divisores de 60 son

①, ②, ③, ④, ⑥, 10, ⑫, 19, 20, 30 y 60

Se observa que los divisores comunes de 36, 24, y 60 son 1, 2, 3, 4, 6 y 12.

Entonces podemos decir que el mayor divisor común es 12.

$\therefore$ MCD(24; 36; 60) = 12

Observación

- Cada uno de los números se puede expresar como el producto de su MCD por otros factores; dichos factores siempre deben ser primos entre sí (PESI).

$24 = 12 \times ②$
$36 = 12 \times ③$
$60 = 12 \times ⑤$
PESI

- Además, cada uno de los números siempre son múltiplos de su MCD.

Es decir,

$24 = \overset{\circ}{\overline{12}}$; $36 = \overset{\circ}{\overline{12}}$; $60 = \overset{\circ}{\overline{12}}$

- Veamos los divisores de 12.

1; 2; 3; 4; 6 y 12

Luego podemos afirmar que

$\left(\begin{array}{l}\text{divisores comunes}\\ \text{de 36; 24 y 60}\end{array}\right) = \left(\begin{array}{l}\text{divisores}\\ \text{de 12}\end{array}\right)$

En general, sean los números A, B, C, D, ... enteros positivos, tal que si $\text{MCD}(A; B; C; D; ...)=d$, podemos afirmar las siguientes propiedades:

1. d es el mayor divisor común de A, B, C, D, ...

2. $\left.\begin{array}{l} A=dk \\ B=dp \\ C=dq \\ D=dr \\ \vdots \quad \vdots \end{array}\right\}$ Los factores k, p, q, r, ... deben ser siempre números primos entre sí (PESI).

3. Cada uno de los números, A, B, C, D, ..., siempre son múltiplos de su MCD.

4. $\boxed{\begin{pmatrix}\text{divisores comunes} \\ \text{de } A, B, C, D, ...\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{divisores de} \\ \text{su MCD}\end{pmatrix}}$

Aplicación 1

Si el máximo común divisor de 3 números enteros positivos es 360, determine la cantidad de divisores comunes de dichos números.

Resolución

Sean los números A, B y C, tal que si $\text{MCD}(A; B; C)=360$.

Entonces tenemos

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de divisores} \\ \text{comunes de } A, B \text{ y } C\end{pmatrix} = \text{CD}(360)$$

Luego bastará calcular la cantidad de divisores de 360.

$360=2^3\times3^2\times5^1$ D.C.

$\text{CD}(360)=(3+1)(2+1)(1+1)$

$\text{CD}(360)=4\times3\times2$

$\text{CD}(360)=24$

Por lo tanto, la cantidad de divisores comunes de A, B y C es 24.

Aplicación 2

Si el máximo común divisor de 2 números enteros positivos es 120, determine la suma de las inversas de los divisores comunes de dichos números.

Resolución

Sean los números A y B, tal que si

$\text{MCD}=(A; B)=120$

Entonces tenemos

$$\begin{pmatrix}\text{suma de las inversas de los} \\ \text{divisores comunes de } A \text{ y } B\end{pmatrix} = \text{SID}(120)$$

Bastará calcular la suma de las inversas de los divisores de 120.

$120=2^3\times3^1\times5^1$ D.C.

En primer lugar, calcularemos la SD (suma de divisores).

$$\text{SD}(120)=\left(\frac{2^4-1}{2-1}\right)\left(\frac{3^2-1}{3-1}\right)\left(\frac{5^2-1}{5-1}\right)$$

$\text{SD}(120)=360$

Entonces

$$\text{SID}(120)=\frac{\text{SD}(120)}{120}=\frac{360}{120}=3$$

Por lo tanto, la suma de las inversas de los divisores comunes de 120 es 3.

Aplicación 3

Si el $\text{MCD}(\overline{ab}; 72)=18$, calcule la suma de los valores que toma $\overline{ab}$.

Resolución

Se tiene que

$\text{MCD}(\overline{ab}; 72)=18$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab}=18k\\ 72=18\cdot 4\end{array}\right\}\ k \text{ y } 4 \text{ deben ser PESI, es decir, } k\neq\overset{\circ}{2}.$$

Ahora tenemos

$$\overline{ab}=18k$$

Entonces

k	1	3	5
$\overline{ab}$	18	54	90

Luego,

$$18+54+90=162$$

Por lo tanto, la suma de los valores de $\overline{ab}$ es 162.

Aplicación 4

Sean A y B dos números enteros positivos cuyo máximo común divisor es 18. Si la diferencia de los cuadrados de A y B es 2268, calcule $A+B$.

Resolución

De los números A y B se sabe que

$$\text{MCD}(A;B)=18 \qquad \text{(I)}$$

$$A^2-B^2=2268 \qquad \text{(II)}$$

De (I) tenemos

$$\left.\begin{array}{l}A=18k\\ B=18p\end{array}\right\}\ k \text{ y } p \text{ son PESI.}$$

Reemplazamos en (II).

$$(18k)^2-(18p)^2=2268$$

$$324k^2-324p^2=2268$$

$$k^2-p^2=7$$

$$\rightarrow\ \underbrace{(k-p)}_{1}\underbrace{(k+p)}_{7}=1\times 7$$

Es decir, $k=4$; $p=3$

Entonces

$$A=18\times 4=72$$

$$B=18\times 3=54$$

Por lo tanto, el valor de $A+B$ es 126.

Aplicación 5

Si el máximo común divisor de los números $\overline{aba}$ y $\overline{caa}$ es 35, calcule la suma de los valores de $a+b+c$.

Resolución

Se tiene que

$$\text{MCD}(\overline{aba};\ \overline{caa})=35$$

$$\rightarrow\ \overline{aba}=\overset{\circ}{35}\ \wedge\ \overline{caa}=\overset{\circ}{35}$$

Se observa que $a=5$.

Aplicamos el criterio de divisibilidad por 7.

$$\underbrace{\overline{5b5}}_{231}=\overset{\circ}{7}\ \wedge\ \underbrace{\overline{c55}}_{231}=\overset{\circ}{7}$$

$$15+3b=\overset{\circ}{7}\ \wedge\ 2c+20=\overset{\circ}{7}$$

$$b=2 \text{ o } 9\ \wedge\ c=4$$

Luego,

$$a+b+c=\begin{cases}5+2+4=11\\ 5+9+4=18\end{cases}$$

Por lo tanto, la suma de los valores de $a+b+c$ es 29.

Aplicación 6

¿Cuántas parejas de números cumplen con que su MCD sea 12 y su suma sea igual a 180?

Resolución

Sea A y B la pareja de números que cumplen tal condición, es decir:

$$\text{MCD}(A;B)=12 \qquad \text{(I)}$$

$$A+B=180 \qquad \text{(II)}$$

De (I) tenemos lo siguiente:

$$\left.\begin{array}{l} A=12k \\ B=12p \end{array}\right\} k \text{ y } p \text{ son PESI.}$$

Reemplazamos en (II).

$$12k+12p=180$$

$$k+p=15$$

Luego,

k	1	2	4	7	8	11	13	14
p	14	13	11	8	7	4	2	1

Hay 4 parejas para k y p.

Estas soluciones son las mismas que las anteriores, por ello ya no se consideran. (tenga en cuenta que cuando formamos parejas, no interesa el orden).

Es decir, para A y B también habrán 4 pares de números que cumplen las condiciones.

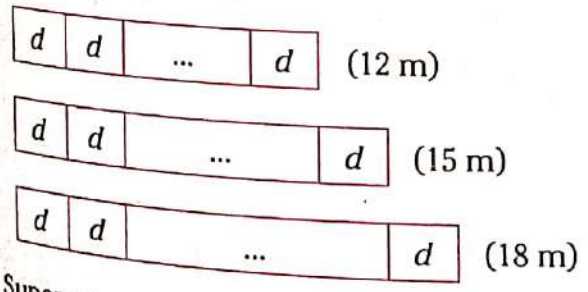
Por lo tanto, hay 4 parejas de números que cumplen tales condiciones.

Aplicación 7

Se desea dividir 3 barras de acero, cuyas longitudes son 12 m; 18 m y 15 m, en trozos de igual longitud, siendo esta la mayor posible. ¿Cuántos trozos se van a obtener?

Resolución

Se tiene lo siguiente:



Supongamos que dividimos en trozos de d m.

Del gráfico se puede observar que d debe ser un divisor común de 12; 15 y 18, y como debe ser el mayor posible, entonces

$$d=\text{MCD}(12;\ 15;\ 18)$$

$$\rightarrow d=3$$

Luego,

$$\left(\begin{array}{c}\text{n.º de trozos}\\ \text{que se obtiene}\end{array}\right)=\frac{12}{3}+\frac{15}{3}+\frac{18}{3}=15$$

Por lo tanto, el número de trozos que se obtendrá será 15.

Aplicación 8

Fabrizio tiene 20 canicas de color verde, 30 de color azul, 40 de color celeste y 60 canicas de color rojo. Si las quiere poner en bolsas, de tal manera que haya igual número de canicas del mismo color en cada bolsa, ¿cuántas bolsas obtendrá si esta cantidad es la menor posible?

Resolución

Graficamos.

Sea n el contenido de cada bolsa.

Se observa que n debe ser un divisor común de 20; 30; 40 y 60; además, como se quiere obtener la menor cantidad de bolsas, n debe ser el mayor posible.

$$n=\text{MCD}(20;\ 30;\ 40;\ 60)$$

$$n=10$$

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{n.º de bolsas}\\ \text{en total}\end{array}\right)=\frac{20}{10}+\frac{30}{10}+\frac{40}{10}+\frac{60}{10}=15$$

Por lo tanto, el número de bolsas que obtendrá es 15.

1.2. IDENTIDAD DE ÉTIENNE BÉZOUT

Sean A y B dos números enteros positivos.

Si MCD(A; B)=d, entonces existen enteros x e y, tal que

$$\boxed{d=xA+yB} \text{ (combinación lineal)}$$

Ejemplos

- MCD(20; 15)=5 $\rightarrow$ $5=20\underbrace{(1)}_{x}+15\underbrace{(-1)}_{y}$
- MCD(18; 27)=9 $\rightarrow$ $9=18\underbrace{(2)}_{x}+27\underbrace{(-1)}_{y}$

Nota

Cuando A y B son PESI se cumple la bicondicional, es decir: MCD(A; B)=1 si y solo si existen enteros x e y, tal que

$$\boxed{1=Ax+By}$$

Ejemplos

- MCD(8; 15)=1 $\rightarrow$ $1=8(2)+15(-1)$
- $8(2)+5(-3)=1$ $\rightarrow$ MCD(8; 5)=1

1.3. ALGORITMO DE EUCLIDES (DIVISIONES SUCESIVAS)

El matemático griego Euclides (365 - 300 a. n. e.), en su libro *Elementos*, describió un método eficiente para calcular el máximo común divisor de dos números.

El algoritmo se basa en el siguiente principio: "En caso de una división inexacta de dos números, el máximo común divisor de esos dos números es igual al máximo común divisor del menor de los números y el residuo por defecto o exceso de la división entre ambos números".

Es decir, sean los números A y B.

$$\begin{array}{r|l} A & B \\ \hline r & k \end{array} \quad \text{(división inexacta)}$$

$0<r<B$

Se cumple que

$$\boxed{\text{MCD}(A;B)=\text{MCD}(B;r_d)=\text{MCD}(B;r_e)=\text{MCD}(r_d;r_e)}$$

donde

- r_d : residuo por defecto
- r_e : residuo por exceso

Ejemplos

- Sean los números 300 y 80. Dividamos ambos números.

Por defecto

$$\begin{array}{r|l} 300 & 80 \\ \hline 60 & 3 \end{array}$$

Por exceso

$$\begin{array}{r|l} 300 & 80 \\ \hline 20 & 4 \end{array}$$

Se observa que

- MCD(300; 80)=20
- MCD(80; 60)=20
- MCD(80; 20)=20
- MCD(60; 20)=20

Luego se tiene que

MCD(300; 80)=MCD(80; 60)=MCD(80; 20)
=MCD(60; 20)

- Veamos cómo se calcula el MCD de 286 y 221 por el método de algoritmo de Euclides.

Realicemos las siguientes divisiones por defecto:

$$\begin{array}{r|l} 286 & 221 \\ \hline 65 & 1 \end{array} \rightarrow \text{MCD}(286;221)=\text{MCD}(221;65)$$

$$\begin{array}{r|l} 221 & 65 \\ \hline 26 & 3 \end{array} \rightarrow \text{MCD}(221;65)=\text{MCD}(65;26)$$

$$\begin{array}{r|l} 65 & 26 \\ \hline 13 & 2 \end{array} \rightarrow \text{MCD}(65;26)=\text{MCD}(26;13)$$

$$\begin{array}{r|l} 26 & 13 \\ \hline 0 & 2 \end{array}$$

Como la división es exacta, termina el procedimiento. MCD(26; 13)=13

$\therefore$ MCD(286; 221)=13

Para sistematizar este procedimiento se usa el siguiente esquema:

cocientes	1	3	2	2	
(número mayor) 286	(número menor) 221	65	26	**13**	← MCD
residuos	65	26	13	0	

Aplicación 9

Calcule el MCD de 12 662 y 6058.

Resolución

El esquema es el siguiente:

cocientes	2	11	10	2	
12 662	6058	546	52	26	← MCD
residuos	546	52	26	0	
	primera división	segunda división	tercera división	cuarta división	

$\therefore$ MCD(12 662; 6058) = 26

> **Nota**
> Este método de las divisiones sucesivas se usa generalmente cuando los números son considerablemente grandes.

Las divisiones sucesivas no solo se pueden hacer por defecto, sino también se pueden hacer por exceso.

Ejemplo

Calculemos el MCD de 1026 y 852, usando las divisiones por defecto y también por exceso.

Procederemos de la siguiente manera:

- 1.ª división (por defecto)

$$\begin{array}{r|l} 1026 & 852 \\ \hline 174 & 1 \end{array}$$

- 2.ª división (por exceso)

$$\begin{array}{r|l} 852 & 174 \\ \hline 18 & 5 \end{array}$$

- 3.ª división (por exceso)

$$\begin{array}{r|l} 174 & 18 \\ \hline 6 & 10 \end{array}$$

- 4.ª división (exacta)

$$\begin{array}{r|l} 18 & 6 \\ \hline 0 & 3 \end{array}$$

En el siguiente esquema se resume el procedimiento anterior:

cocientes	1	5	10	3
1026	852	174	18	6
residuo	174	18	6	0
	división por defecto	división por exceso	división por exceso	división exacta

Aplicación 10

Al calcular el MCD de 2 números mediante el algoritmo de Euclides se obtuvo 3; 1; 2 y 2 como cocientes sucesivos. Si la suma de los residuos es 120, calcule la diferencia de dichos números.

Resolución

Sean los números A y B, tal que MCD(A; B) = d.

El esquema sería el siguiente:

	3	1	2	2	
$26d$ (A)	$7d$ (B)	$5d$	$2d$	d	← MCD
	$5d$	$2d$	d	0	

Entonces

$A = 26d$

$B = 7d$

Por dato tenemos lo siguiente:

(suma de los residuos) = 120

$8d = 120$

$d = 15$

$\rightarrow A - B = 26d - 7d$

$A - B = 19d$

$A - B = 19(15) = 285$

Por lo tanto, la diferencia de dichos números es 285.

Aplicación 11

Dos números suman 208 y al calcular su MCD por el algoritmo de Euclides los cocientes fueron 3; 1; 3; 3. Calcule el MCD de dichos números si la penúltima división se realizó por exceso.

Resolución

Sean los números A y B, tal que $\text{MCD}(A; B)=d$.

El esquema sería el siguiente:

	3	1	3	3	
$41d$ (A)	$11d$ (B)	$8d$	$3d$	d	← MCD
	$8d$	$3d$	d		

penúltima división (por exceso)

Entonces

$A=41d$

$B=11d$

Por dato tenemos

$A+B=208$

$52d=208$

$d=44$

$\therefore\ \text{MCD}(A; B)=44$

Aplicación 12

Al calcular el MCD de $\overline{a(a+1)a}$ y $\overline{(a+1)b1}$ por el algoritmo de Euclides se obtuvo como cocientes 1; 3 y 2. Calcule $a+b$.

Resolución

Sea d el MCD de dichos números.

	1	3	2
$9d$	$7d$	$2d$	d
	$2d$	d	0

Luego, podemos decir que

$\overline{(a+1)b1}=9d \ \wedge\ \overline{a(a+1)a}=7d$

Aplicando el criterio de divisibilidad por 7, tenemos

$$\overline{a(a+1)a}=\overset{\circ}{7}$$

$$\underset{2\quad 3\quad 1}{\underset{+}{\curvearrowleft}}$$

$$2a+3a+3+a=\overset{\circ}{7} \ \rightarrow\ 6a+3=\overset{\circ}{7} \ \rightarrow\ a=3$$

Luego,

$343=7d \ \rightarrow\ d=49$

Reemplazando en

$\overline{(a+1)b1}=9d=9\times 49$

$\overline{(a+1)b1}=441 \ \rightarrow\ b=4$

Por lo tanto, el valor de $a+b$ es 7.

1.4. PROPIEDADES DEL MCD

Propiedad 1

Dado un conjunto de números enteros positivos $A, B, C, D, \ldots$

$A, B, C, D, \ldots$ son primos entre sí (PESI) si y solo si $\text{MCD}(A; B; C; D; \ldots)=1$

Ejemplos

- 8 y 15 son PESI, entonces el único divisor en común es la unidad.

  $\text{MCD}(8; 15)=1$

- 15; 21 y 35 son PESI, entonces el único divisor en común es la unidad.

  $\text{MCD}(15; 21; 35)=1$

- $\text{MCD}(101; 98)=1$, entonces los números 101 y 98 son PESI.

Aplicación 13

Si el $\text{MCD}(N; N+1; 2N)=N^2-399$, calcule la cantidad de divisores de N.

Resolución

Sabemos que N y $N+1$ son números consecutivos, entonces N y $N+1$ son PESI; esto hace que el conjunto N, $N+1$ y $2N$ sea PESI, es decir

$\text{MCD}(N; N+1; 2N)=1$

Luego,

$N^2-399=1 \rightarrow N^2=400$

$N=20$

$N=2^2\times5^1$ D.C.

$\rightarrow$ CD$(N)=(2+1)(1+1)=6$

Por lo tanto, la cantidad de divisores de N es 6.

Aplicación 14

Calcule el máximo común divisor de los números $\overline{ab}$ y $\overline{1a(b+1)}$.

Resolución

Se tiene

$$\overline{ab} \wedge \underbrace{\overline{1a(b+1)}}_{\overline{ab}+101}$$

Podemos iniciar indicando que $\overline{ab}$ y 101 son PESI, entonces $\overline{ab}$ y $\overline{ab}+101$ también son PESI (por propiedad).

Luego,

$\overline{ab}$ y $\overline{1a(b+1)}$ son PESI

$\therefore$ MCD$(\overline{ab}, \overline{1a(b+1)})=1$

Propiedad 2

Dado un conjunto de números enteros positivos $A, B, C, D, \ldots$

Si el menor de ellos es un divisor común del resto de los números, entonces el máximo común divisor de $A, B, C, D, \ldots$ es igual al menor de los números.

Ejemplos

- Sean los números 15 y 45. Como 15 es un divisor de 45, entonces MCD(15; 45)=15.
- Sean los números 12; 48 y 60. Como 12 es un divisor común de 48 y 60, entonces MCD(12; 48; 60)=12.

Aplicación 15

Calcule el máximo común divisor de 7; $\overline{abcabc}$; $\overline{ab0}_7$ y $\overline{b00b}$.

Resolución

Se observa lo siguiente:

- $\overline{abcabc}=\overset{\circ}{7}$
- $\overline{ab0}_7=\overset{\circ}{7}$
- $\overline{b00b}=\overset{\circ}{7}$

Entonces se tiene que 7 es un divisor común de $\overline{abcabc}$; $\overline{ab0}_7$ y $\overline{b00b}$.

$\therefore$ MCD$(7; \overline{abcabc}; \overline{ab0}_7; \overline{b00b})=7$

Aplicación 16

Si el MCD$(N+2; N^3+8)=48-N$, calcule la suma de todos los números menores que N, PESI con N.

Resolución

Se tiene que

$$\text{MCD}(N+2; N^3+8)=48-N$$

Sabemos que $N^3+8=(N+2)(N^2-2N+4)$, entonces podemos decir que $N+2$ es un divisor de N^3+8.

$$\text{MCD}(N+2; N^3+8)=N+2=48-N$$
$$2N=46$$
$$N=23$$

Entonces

$$\left(\begin{array}{c}\text{suma de todos los}\\ \text{números menores que}\\ \text{23 y PESI con 23}\end{array}\right)=\frac{23\times\varphi(23)}{2}$$
$$=\frac{23\times22}{2}$$
$$=253$$

donde $\varphi(23)$ es el indicador de 23

Por lo tanto, la suma de todos los números menores que 23 y PESI con 23 es 253.

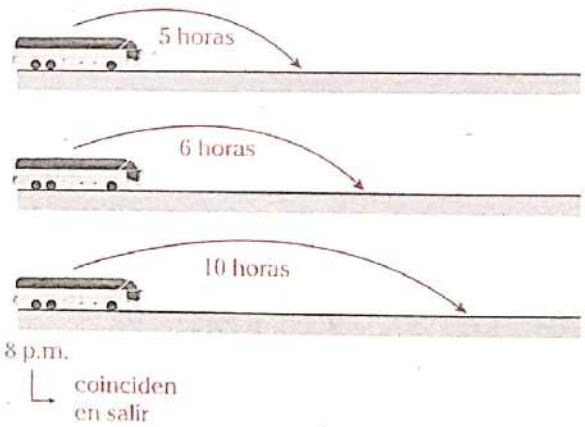
2▸ MÍNIMO COMÚN MÚLTIPLO (MCM)

En el capítulo de divisibilidad se definió lo que significa múltiplo de un número, por ejemplo, 15 es múltiplo de 3 $(15=\overset{\circ}{3})$.

Hay situaciones de la vida cotidiana que involucran a dos o más cantidades, las cuales se pueden resolver sin dificultad alguna, encontrando el menor número que contenga a cada una de dichas cantidades.

Veamos el siguiente ejemplo:
En el terminal de buses interprovinciales salen buses rumbo a Piura cada 5 horas; rumbo a Cajamarca cada 6 horas; y rumbo a Tumbes cada 10 horas. Si a las 8 de la noche de determinado día coinciden en salir los buses hacia las tres ciudades, ¿dentro de cuántas horas volverán a coincidir en la hora de salida otros buses hacia las tres ciudades?

Gráficamente.



Es necesario encontrar el número de horas que debe transcurrir para que vuelvan a coincidir los buses en salir. Esta cantidad debe ser un número múltiplo de 5; 6 y 10 a la vez, entonces buscamos el menor múltiplo común diferente de cero, dado que el cero no tiene valor alguno.

- $\overset{\circ}{5}$: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35,...
- $\overset{\circ}{6}$: 6, 12, 18, 24, 30, 36,...
- $\overset{\circ}{10}$: 10, 20, 30, 40,...

Se observa que el menor múltiplo común es 30.

Esto indica que los horarios de los buses para que coincidan a la hora de salir ocurre después de 30 horas. Además, podemos calcular el número de buses que salieron a cada ciudad en ese tiempo.

A este valor 30 se le denomina MCM de 5, 6 y 10.

Para Piura: $\frac{30}{5}=6$ buses

Para Cajamarca: $\frac{30}{6}=5$ buses

Para Tumbes: $\frac{30}{10}=3$ buses

2.1. DEFINICIÓN

Dado un conjunto de números enteros positivos, el mínimo común múltiplo es un número entero positivo que cumple las siguientes condiciones:

- Debe ser un múltiplo positivo común de dichos números.
- Debe ser el menor de los múltiplos comunes.

Ejemplo
Sean los números 6, 10 y 15.

Los múltiplos $\mathbb{Z}^+$ de 6 son

6, 12, 18, 24, 30, 36, 42, 48, 60, ...

Los múltiplos $\mathbb{Z}^+$ de 10 son

10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, ...

Los múltiplos $\mathbb{Z}^+$ de 15 son

15, 30, 45, 60, 75, 105, ...

Observamos que los múltiplos comunes de 6, 10 y 15 son 30, 60, 90, 120, ...

$\therefore$ MCM(6; 10; 15)=30

Observación

- El mínimo común múltiplo contiene a cada uno de los números; además, cada uno de los números es divisor de su mínimo común múltiplo.

$30=6\times 5$
$30=10\times 3$ PESI
$30=15\times 2$

- Veamos los múltiplos $\mathbb{Z}^+$ de 30.

  30, 60, 90, 120, ...

  Luego se puede afirmar que

$$\begin{pmatrix}\text{múltiplos comunes}\\ \text{de 6, 10 y 15}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{múltiplos}\\ \text{de 30}\end{pmatrix}$$

En general, sean los números A, B, C, D, ... enteros positivos, tal que MCM(A; B; C; D; ...)$=m$. Podemos afirmar las siguientes propiedades:

1. m es el menor número que contiene a A, B, C, D, ..., es decir,

$$\left.\begin{array}{l} m=Ak\\ m=Bp\\ m=Cq\\ m=Dr\\ \vdots \quad \vdots\end{array}\right\}\text{Los factores } k, p, q, r\text{... son PESI.}$$

2. Cada uno de los números son siempre un divisor de su mínimo común múltiplo, es decir, $m=\overset{\circ}{A}$; $m=\overset{\circ}{B}$; $m=\overset{\circ}{C}$; $m=\overset{\circ}{D}$, ...

3. $$\begin{pmatrix}\text{múltiplos comunes}\\ \text{de } A, B, C, D\text{...}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{múltiplos}\\ \text{de MCM}\end{pmatrix}$$

Aplicación 17

Calcule la suma de los múltiplos comunes de 10 y 15 que sean de 3 cifras.

Resolución

El menor número que contiene 10 y 15 es 30, entonces MCM(10; 15)=30.

Podemos decir que cualquier $\overset{\circ}{30}$ será también múltiplo común de 10 y 15.

Como nos piden la suma de los múltiplos comunes de 3 cifras, entonces

$$\begin{pmatrix}\text{suma de los múltiplos}\\ \text{comunes de 3 cifras}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{suma de todos}\\ \text{los } \overset{\circ}{30} \text{ de 3 cifras}\end{pmatrix}$$

Así tenemos que

$$\overset{\circ}{30} <> 30k\text{: } 30\times 4;\ 30\times 5;\ 30\times 6;\ \text{...};\ 30\times 33$$

$$\rightarrow \text{ suma}=30(\underbrace{4+5+6+....+33}_{30\text{ términos}})$$

$$\text{suma}=30\times\left(\frac{33+4}{2}\right)30$$

$$\therefore \text{ suma}=16\,650$$

Aplicación 18

Si el mínimo común múltiplo de los números $\overline{a9}$ y 45 es $\overline{mnm}$, calcule el valor de $m+n+a$.

Resolución

Se tiene que

$$\text{MCM}(\overline{a9};\ 45)=\overline{mnm}$$

Podemos afirmar que

$$\overline{mnm}=\overset{\circ}{45}$$

Se observa que $m=5$.

Además,

$$\overline{5n5}=\overset{\circ}{9}$$

Entonces aplicamos el criterio de divisibilidad por 9.

$$5+n+5=\overset{\circ}{9} \rightarrow n=8$$

Luego,

$$\text{MCM}(\overline{a9};\ 45)=585$$

También, $\overline{a9}$ debe ser divisor de $\underbrace{585}_{13\times 5\times 3^2}$

Se observa que

$$\overline{a9}=39 \rightarrow a=3$$

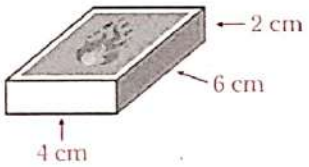
Por lo tanto, $a+m+n=16$.

Aplicación 19

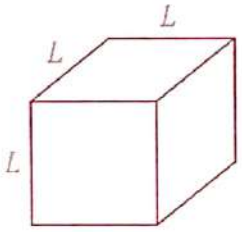
Se desea diseñar cajas cúbicas de menor volumen para empaquetar cajitas de fósforo cuyas dimensiones son 2 cm, 4 cm y 6 cm. Calcule cuántas cajitas de fósforo entran en la caja cúbica diseñada.

Resolución

Graficamos una cajita de fósforo.



La caja que se desea fabricar tiene L cm de arista.



Entonces L debe ser el menor número que contiene a 2, 4 y 6, es decir

$L = \text{MCM}(2; 4; 6)$

$L = 12$

$$\left(\begin{array}{c}\text{n.º de cajitas de}\\ \text{fósforo que entran en}\\ \text{la caja diseñada}\end{array}\right) = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{volumen}\\ \text{de la caja}\end{array}\right)}{\left(\begin{array}{c}\text{volumen de la}\\ \text{caja de fósforo}\end{array}\right)}$$

$$\therefore \left(\begin{array}{c}\text{n.º de cajitas de}\\ \text{fósforo que entran en}\\ \text{la caja diseñada}\end{array}\right) = \frac{12\times12\times12}{2\times4\times6} = 36$$

2.2. PROPIEDADES DEL MCM

Propiedad 1

Dados los números enteros positivos A, B, C, D, ..., si $A, B, C, D, \ldots$ son PESI 2 a 2, entonces

$$\boxed{\text{MCM}(A; B; C; D; \ldots) = A\times B\times C\times D\times \ldots}$$

Ejemplos

- 8 y 11 son PESI, entonces el menor número que contiene a ambos es 88.

  $\therefore\ \text{MCM}(8; 11) = 8\times11$

- 3, 5 y 7 son PESI 2 a 2, entonces el menor número que contiene a estos números es $3\times5\times7 = 105$.

  $\therefore\ \text{MCM}(3; 5; 7) = 3\times5\times7$

- 10, 13 y 9 son PESI 2 a 2, entonces el menor número que contiene a estos números es $10\times13\times9 = 1170$.

  $\therefore\ \text{MCM}(10; 13; 9) = 10\times13\times9$

Aplicación 20

Calcule el mínimo común múltiplo de los números $\overline{a3}$; $\overline{a1}$ y 100 si se sabe que resultó menor que 20 000.

Resolución

Se observa que los números

- $\overline{a3}$ y $\overline{a1}$ son PESI (impares consecutivos)
- $\overline{a3}$ y 100 son PESI $(\overline{a3} \neq \overset{\circ}{2}, \overset{\circ}{5})$
- $\overline{a1}$ y 100 son PESI $(\overline{a1} \neq \overset{\circ}{2}, \overset{\circ}{5})$

$\rightarrow$ $\overline{a3}$, $\overline{a1}$ y 100 son PESI 2 a 2

Luego tenemos

$\text{MCM}(\overline{a3}; \overline{a1}; 100) = \overline{a3}\times\overline{a1}\times100 < 20\,000$

$\overline{a3}\times\overline{a1} < 200$

$\rightarrow\ a = 1$

$\therefore\ \text{MCM}(13; 11; 100) = 14\,300$

Aplicación 21

Sean los números A y B PESI.

Si $\text{MCM}(A; A^2 - B^2) = 69\times A$, calcule el menor valor de $A\times B$.

Resolución

Se tiene que A y B son PESI, entonces por propiedad de números PESI, tenemos que

- A y $A+B$ son PESI
- A y $A-B$ son PESI
- A y $(A+B)(A-B)$ son PESI

Es decir,

A y A^2-B^2 son PESI

Luego,

$$\underbrace{\text{MCM}(A; A^2-B^2)}=A\times(A^2-B^2)$$

$$69A=A\times(A^2-B^2)$$

$$69=A^2-B^2$$

$$69=(A-B)(A+B)$$

$$1 \quad 69 \rightarrow A=35; B=34$$

$$3 \quad 23 \rightarrow A=13; B=10$$

Entonces

A	B	$A\times B$
35	34	1190
13	10	130

Por lo tanto, el menor valor de $A\times B$ es 130.

Propiedad 2

Dado un conjunto de números enteros positivos A, B, C, D, ..., si el mayor de los números contiene a cada uno del resto de los números, entonces el mínimo común múltiplo de A, B, C, D, ..., es igual al mayor de dichos números.

Ejemplos

- Sean los números 10, 15 y 30. Como 30 contiene a 10 y 15, entonces
  MCM(10; 15; 30)=30
- Sean los números 6, 8, 12 y 48. Como 48 contiene a 6, 8 y 12, entonces
  MCM(6; 8; 12; 48)=48

Aplicación 22

Si al calcular el mínimo común múltiplo de los números $N-2$ y N^3-8 resultó 721, indique el valor de N.

Resolución

Se tienen los números

$N-2$ y N^3-8

Sabemos que

$$N^3-8=(N-2)(N^2+2N+4)$$

Es decir, N^3-8 contiene a $N-2$, entonces

$$\text{MCM}(N^3-8; N-2)=N^3-8$$

Por dato tenemos

$$N^3-8=721$$

$$N^3=729$$

$$\therefore \; N=9$$

3▸ MÉTODOS PARA CALCULAR EL MCD Y EL MCM

3.1. POR DESCOMPOSICIÓN CONJUNTA

Veamos el siguiente ejemplo:

Sean los números 240, 760 y 400.

- Para obtener el MCD se van extrayendo a la vez los factores comunes de los números hasta que ya no tengan factores comunes diferentes de uno, luego estos factores extraídos se multiplican.

  El esquema sería el siguiente:

$$\begin{array}{rcrcr|l} 240 & - & 360 & - & 400 & 2 \\ 120 & - & 180 & - & 200 & 2 \\ 60 & - & 90 & - & 100 & 2 \\ 10 & - & 45 & - & 50 & 5 \\ 6 & & 9 & & 10 & \end{array}$$

Son PESI (ya no tienen factor común diferente de uno).

$\rightarrow$ MCD(240; 360; 400)$=2\times2\times2\times5$

$\therefore$ MCD(240; 360; 400)=40

- Para obtener el MCM se extrae el MCD ya calculado. Luego se continúa extrayendo los factores no comunes de los números que van quedando, hasta que al final todos queden reducidos a la unidad; luego estos se multiplican.

  El esquema sería el siguiente:

$$\begin{array}{ccccc|l} 240 & - & 360 & - & 400 & 40 \leftarrow \text{MCD} \\ 6 & - & 9 & - & 10 & 2 \\ 3 & - & 9 & - & 5 & 3 \\ 1 & - & 3 & - & 5 & 3 \\ 1 & - & 1 & - & 5 & 5 \\ 1 & - & 1 & - & 1 & \end{array}$$

$\rightarrow$ MCM(240; 360; 400)$=40\times2\times3\times3\times5$

$\therefore$ MCM(240; 360; 400)$=3600$

Aplicación 23

Se tienen tres toneles de vino que tienen 180; 240 y 288 litros de vino de diferentes calidades y se desea envasarlos en bidones de igual capacidad. Indique la menor cantidad de bidones que se usarán, de modo que no se desperdicie vino; además, el volumen del bidón está expresado en números enteros de litros y los vinos de diferente calidad no se deben mezclar.

Resolución

Graficamos.

Se tienen bidones iguales.

Capacidad: V L

Por condición

V es divisor común de $\begin{cases} 180 \\ 240 \\ 288 \end{cases}$

Para obtener la menor cantidad de bidones, V debe ser máximo.

Entonces

$V=\text{MCD}(180; 240; 288)$

Para calcular el MCD usamos la descomposición conjunta.

Luego,

$$\begin{array}{ccccc|l} 180 & - & 240 & - & 288 & 2 \\ 90 & - & 120 & - & 144 & 2 \\ 45 & - & 60 & - & 72 & 3 \\ \boxed{15} & - & \boxed{20} & - & \boxed{24} & \\ \multicolumn{5}{c}{\text{PESI}} & \end{array}$$

$\rightarrow$ $V=2\times2\times3=12$

Nos piden

$$(\text{n.º de bidones})=\frac{180}{12}+\frac{240}{12}+\frac{288}{12}$$

$\therefore$ (n.º de bidones)$=15+20+24=59$

3.2. POR DESCOMPOSICIÓN CANÓNICA

Para este método, los números que queremos calcular su MCD y su MCM se deben descomponer en sus factores primos (descomposición canónica). Veamos el siguiente ejemplo:

Sean los siguientes números ya expresados en forma canónica:

- $A=2^3\times3^5\times7^2$ D.C.
- $B=2^2\times3^6\times5^2$ D.C.
- $C=2^4\times3^3\times5^1\times11$ D.C.

El MCD resulta de multiplicar a los factores primos comunes elevados a sus menores exponentes.

$$\text{MCD}(A; B; C)=\underbrace{②^2\times③^3}_{\text{Estos factores primos son los comunes.}}=108$$

El MCM resulta de multiplicar a los factores primos comunes y los que no son comunes elevados a sus mayores exponentes.

$$\text{MCM}(A; B; C)=\underbrace{②^4\times③^6}_{\text{Factores primos comunes}}\times\underbrace{⑤^2\times⑦^2\times⑪^1}_{\text{Factores primos no comunes}}$$

Aplicación 24

Sean los números

$A=12^n\times10;\ B=12\times10^n$

Si A y B tienen 20 divisores comunes, indique el valor de n.

Resolución

Descomponemos en forma canónica a los números.

$A=2^{2n+1}\times3^n\times5^1$ D.C.

$B=2^{n+2}\times3^1\times5^n$ D.C.

Entonces

$\text{MCD}(A; B)=2^{n+2}\times3^1\times5^1$

Luego tenemos por dato

$\text{CD}(\text{MCD})=20$

$(n+2+1)(1+1)(1+1)=20$

$(n+3)(2)(2)=20$

$\therefore\ n=2$

4. PROPIEDADES QUE RELACIONAN EL MCM Y EL MCD

4.1. PARA DOS NÚMEROS

Propiedad 1

Sean los números A y B.

Si $\text{MCD}(A; B)=d$, tal que

$$\left.\begin{array}{l}A=d\textcircled{k}\\ B=d\textcircled{p}\end{array}\right\}\ k \text{ y } p \text{ son PESI.}$$

entonces

$$\boxed{\text{MCM}(A; B)=dkp}$$

Ejemplo

Sean los números 18 y 24.

Calculamos el MCD.

$\text{MCD}(18; 24)=6$

Es decir,

$$\left.\begin{array}{l}18=6\times③\\ 24=6\times④\end{array}\right\}\ \text{son PESI}$$

Entonces

$\text{MCM}(18; 24)=6\times3\times4=72$

Aplicación 25

Se tienen 2 números cuya suma es 39. Si el mínimo común múltiplo de dichos números es 120, indique el valor de la diferencia de dichos números.

Resolución

Sean los números A y B. Sabemos que

$A+B=39$ (I)

Además,

$\text{MCM}(A; B)=120$ (II)

Sea $d=\text{MCD}(A; B)$, entonces tenemos

$$\left.\begin{array}{l}A=d\textcircled{k}\\ B=d\textcircled{p}\end{array}\right\}\ \text{son PESI}$$

Reemplazamos en (I).

$d(k+p)=39$

Reemplazamos en (II).

$d\times k\times p=120$

Dividimos estos resultados.

$$\frac{k+p}{kp}=\frac{13}{40}\ \rightarrow\ \begin{array}{l}k=8\\ p=5\end{array}\ \rightarrow\ d=3$$

Luego,

$A=3\times8=24$

$B=3\times5=15$

$\therefore\ A-B=9$

Propiedad 2

Sean los números A y B.

Se cumple que

$$\boxed{A\times B=\text{MCD}(A;\,B)\times\text{MCM}(A;\,B)}$$

Ejemplo

Sean los números 12 y 18.

$\text{MCD}(12;\,18)=6$

$\text{MCM}(12;\,18)=36$

Se puede observar que

$12\times 18=216=6\times 36$

es decir,

$12\times 18=\text{MCD}(12;\,18)\times\text{MCM}(12;\,18)$

Aplicación 26

El producto de dos números de dos cifras cada uno es 1815 y su MCD es 11. Calcule la diferencia de dichos números.

Resolución

Sean los números $\overline{ab}$ y $\overline{mn}$.

Sabemos que

$\text{MCD}(\overline{ab};\,\overline{mn})=11$ (I)

$\overline{ab}\times\overline{mn}=1815$ (II)

De (I)

$$\left.\begin{array}{l}\overline{ab}=11k\\ \overline{mn}=11p\end{array}\right\}\ k \text{ y } p \text{ son PESI.}$$

Reemplazamos en (II).

$11k\times 11p=1815$

$k\times p=15$

1	15	← No cumple
3	5	← Sí cumple

(Cada uno de los números son de dos cifras.)

Luego,

$\overline{ab}=11(3)=33$

$\overline{mn}=11(5)=55$

$\therefore\ \overline{mn}-\overline{ab}=22$

Aplicación 27

El producto de dos números es 11 340. Si el MCM de estos números es 34 veces más que el MCD de los mismos, calcule la menor diferencia de estos números.

Resolución

Sean los números A y B.

Se sabe que

$A\times B=11\,340$ (I)

$\text{MCM}(A;\,B)=35\,\text{MCD}(A;\,B)$ (II)

También sabemos que

$\underbrace{\text{MCM}(A;\,B)}_{\text{(de II)}}\times\text{MCD}(A;\,B)=AB$

$35\times\text{MCD}(A;\,B)\times\text{MCD}(A;\,B)=11\,340$

$\text{MCD}(A;\,B)=18$

$\rightarrow\ A=18k\ \wedge\ B=18p$ (k y p son primos entre sí)

Reemplazamos en (I).

$(18k)(18p)=11\,340$

$k\cdot p=35$

1	35	← No cumple
3	5	← Sí cumple

(Con estos valores obtenemos la menor diferencia.)

Luego,

$A=18(5)=90$

$B=18(7)=126$

$\therefore\ B-A=36$

Propiedad 3

Sean los números A y B.

Si $\text{MCM}(A;\,B)=\text{MCM}(nA;\,mB)$,

entonces se cumple que

$$\boxed{A=\overset{\circ}{m}\ \wedge\ B=\overset{\circ}{n}}$$

Demostración

Sea $\text{MCD}(A;\,B)=d$.

$$\rightarrow\ \left.\begin{array}{l}A=dk\\ B=dp\end{array}\right\}\ k,\,p \text{ son PESI.}$$

Se tiene

$$\text{MCM}(A; B)=dkp \qquad \text{(I)}$$

$$\text{MCM}(nA; mB)=d\,\text{MCM}(nk; mp) \qquad \text{(II)}$$

Como (I) es igual que (II),

$$\cancel{d}kp=\cancel{d}\,\text{MCM}(nk; mp)$$

$$kp=\text{MCM}(nk; mp)$$

Luego,

$$kp=\overset{\circ}{\overline{nk}} \rightarrow p=\overset{\circ}{n} \rightarrow B=\overset{\circ}{n}$$

$$kp=\overset{\circ}{\overline{mp}} \rightarrow k=\overset{\circ}{m} \rightarrow A=\overset{\circ}{m}$$

Ejemplo

Sean los números 60 y 33.

→ MCM(60; 33)=660

Ahora veamos

$$\text{MCM}(60; \mathbf{5}\times 33)=\text{MCM}(60; 165)=660$$

Luego tenemos que

$$\text{MCM}(60; 33)=\text{MCM}(60; \mathbf{5}\times 33)$$

pues $60=\overset{\circ}{5}$.

Aplicación 28

Si $\text{MCM}(\overline{anan}-7; B)=\text{MCM}(\overline{anan}-7; 11B)$, calcule la suma de valores de $a+n$.

Resolución

Por propiedad

$$\overline{anan}-7=\overset{\circ}{\overline{11}}$$

$$101\times\overline{an}=\overset{\circ}{\overline{11}}+7$$

$$(\overset{\circ}{\overline{11}}+2)\times\overline{an}=\overset{\circ}{\overline{11}}+7$$

$$2\times\overline{an}=\overset{\circ}{\overline{11}}+7+\mathbf{11}$$

$$\overline{an}=\overset{\circ}{\overline{11}}+9$$

Evaluamos.

$\overline{an}$: 20; 31; 42; 53; 64; 75; 86; 97

Nos piden la suma de valores de $a+n$.

$\therefore\ 2+4+6+8+10+12+14+16=72$

4.2. PARA MÁS DE DOS NÚMEROS

Propiedad 1

Sean los números $A, B, C, D, \ldots$, tal que si

$$\text{MCD}(A; B; C; D; \ldots)=d$$

$$\begin{aligned} A&=d\,k \\ B&=d\,p \\ C&=d\,q \\ D&=d\,r \\ &\vdots \end{aligned}$$

PESI

Entonces

$$\boxed{\text{MCM}(A; B; C; D; \ldots)=d\,\text{MCM}(k; p; q; r\ldots)}$$

Ejemplo

Sean los números 60; 72 y 96.

Se tiene que

$$\text{MCD}(60; 72; 96)=12$$

Es decir,

$$\begin{aligned} 60&=12\times 5 \\ 72&=12\times 6 \\ 96&=12\times 8 \end{aligned}$$

PESI

$$\rightarrow\ \text{MCM}(60; 72; 96)=12\times\underbrace{\text{MCM}(5; 6; 8)}$$

$$\text{MCM}(60; 72; 96)=12\times 120$$

$$\therefore\ \text{MCM}(60; 72; 96)=1440$$

Nota

De la propiedad anterior podemos afirmar que el MCM de un grupo de números siempre contiene al MCD de dichos números, es decir, el MCM siempre es múltiplo de su MCD.

Aplicación 29

Si se sabe que MCD(A; B)=19; MCD(B; C)=19, MCD(A; C)=19 y MCM(A; B; C)=1995, determine el valor de $A+B+C$. Considere que $A \neq B \neq C \neq 19$.

Resolución

Se tiene lo siguiente:

- $\text{MCD}(A; B)=19 \begin{cases} A=19k \\ B=19p \end{cases}$ PESI
- $\text{MCD}(B; C)=19 \begin{cases} B=19p \\ C=19q \end{cases}$ PESI
- $\text{MCD}(A; C)=19 \begin{cases} A=19k \\ C=19q \end{cases}$ PESI

Podemos observar que MCD(A; B; C)=19.

$A=19k$
$B=19p$ PESI 2 a 2
$C=19q$

Por dato tenemos que

$\text{MCM}(A; B; C)=1995$

$19\,\text{MCM}(k; p; q)=1995$

PESI 2 a 2

$19kpq=1995$

$\rightarrow\ k\times p\times q=105$

Como $A \neq B \neq C \neq 19 \ \rightarrow\ k=3; p=5; p=7$

$A=19\times 3;\ B=19\times 5;\ C=19\times 7$

$\therefore\ A+B+C=19(3+5+7)=19\times 15=285$

Propiedad 2

Sean los números A; B; C; D; ... enteros positivos.

Si MCD(A; B; C; D; ...)=d $\wedge$ MCM(A; B; C; D; ...)=m, entonces $\forall n \in \mathbb{Z}^+$ se cumple lo siguiente:

- $\boxed{\text{MCD}(nA; nB; nC; nD; ...)=nd}$
- $\boxed{\text{MCM}(nA; nB; nC; nD; ...)=nm}$

Ejemplo

Sean los números 45; 20 y 30.

Se tiene que

MCD(45; 20; 30)=5

MCM(45; 20; 30)=180

Si cada número se multiplica por 2, entonces tenemos

MCD(90; 40; 60)=10

MCM(90; 40; 60)=360

Aplicación 30

Si se cumple que

$$\text{MCD}\left(\frac{3n+2}{5};\ \frac{5n+6}{4}\right)=8$$

calcule el menor valor de 3 cifras de n.

Resolución

Se tiene

$$\text{MCD}\left(\frac{3n+2}{5};\frac{5n+6}{4}\right)=8$$

Multiplicamos por 20.

$\text{MCD}(4(3n+2); 5(5n+6))=8\times 20$

Es decir,

- $4(3n+2)=\overline{160}^{\circ}$

  $\rightarrow\ 3n+2=\overline{40}^{\circ}$

  $3n=\overline{40}^{\circ}-2-40$ (podemos restar 40)

  $3n=\overline{40}^{\circ}-42$ (por el principio de Arquímedes)

  $n=\overline{40}^{\circ}-14$ (I)

- $5(5n+6)=\overline{160}^{\circ}$

  $\rightarrow\ 5n+6=\overline{32}^{\circ}$

  $5n=\overline{32}^{\circ}-6-64$ (podemos restar 64)

  $5n=\overline{32}^{\circ}-70$ (por el principio de Arquímedes)

  $n=\overline{32}^{\circ}-14$ (II)

De (I) y (II) tenemos lo siguiente:

$$n \begin{cases} \overset{\circ}{\overline{40}}-14 \\ \overset{\circ}{\overline{32}}-14 \end{cases} \quad \text{MCD}(40;\,32)=160$$

$\rightarrow\ n=\overset{\circ}{\overline{160}}-14$

$\therefore\ n=160-14=146$

- mínimo
- 3 cifras

Propiedad 3

Sean los números A; B; C; D; ... enteros positivos.

Si $\text{MCD}(A;B;C;D;...)=d$

$\text{MCM}(A;B;C;D;...)=m$, entonces se cumple que

- $\boxed{\text{MCD}\left(\frac{A}{n};\frac{B}{n};\frac{C}{n};\frac{D}{n};...\right)=\frac{d}{n}}$

  $\forall\, n$ divisor común de A, B, C, D, ... y d

- $\boxed{\text{MCM}\left(\frac{A}{n};\frac{B}{n};\frac{C}{n};\frac{D}{n};...\right)=\frac{m}{n}}$

  $\forall\, n$ divisor común de A, B, C, D, ...; y m

Ejemplo

Sean los números 60; 80 y 100.

Se tiene que

- $\text{MCD}(60;\,80;\,100)=20$
- $\text{MCM}(60;\,80;\,100)=1200$

Si a cada número se le divide entre 10, se tiene

- $\text{MCD}(6;\,8;\,10)=2$
- $\text{MCM}(6;\,8;\,10)=120$

Aplicación 31

Calcule $A\times B$ si $\text{MCM}(42A;\,6B)=8064$ y $\text{MCD}(77A;\,11B)=88$.

Resolución

Tenemos que

- $\text{MCM}(42A;\,6B)=8064$

  Dividimos entre 6.

  $\text{MCM}(7A;\,B)=1344$

- $\text{MCM}(77A;\,11B)=88$

  Dividimos entre 11.

  $\text{MCD}(7A;\,B)=8$

Por propiedad,

$$\text{MCM}(7A;\,B)\times\text{MCD}(7A;\,B)=1344\times 8$$

$$7\times A\times B=1344\times 8$$

$$\therefore\ A\times B=1536$$

Propiedad 4

Sean los números A; B; C; D; ...

Si

- $\text{MCD}(A;\,B)=p$
- $\text{MCM}(A;\,B)=x$
- $\text{MCD}(C;\,D)=q$
- $\text{MCM}(C;\,D)=y$

entonces se cumple

- $\boxed{\text{MCD}(A;\,B;\,C;\,D)=\text{MCD}(p;\,q)}$
- $\boxed{\text{MCM}(A;\,B;\,C;\,D)=\text{MCM}(x;\,y)}$

Los números A, B, C, D,... se pueden agrupar en cualquier orden.

Ejemplo

Sean los números 60; 80; 45 y 75.

Se tiene que

- $\text{MCD}(60;\,80)=20$
- $\text{MCD}(45;\,75)=15$

Luego,

$$\text{MCD}(60;\,80;\,45;\,75)=\text{MCD}(20;\,15)=5$$

Aplicación 32

Si $\text{MCD}(A;\,2B)=24$

$\text{MCD}(3B;\,5C)=18$

halle el $\text{MCD}(3A;\,6B;\,10C)$.

Resolución

Tenemos que

- $\text{MCD}(A;\,2B)=24 \rightarrow \text{MCD}(3A;\,6B)=72$
- $\text{MCD}(3B;\,5C)=18 \rightarrow \text{MCD}(6B;\,10C)=36$

Por lo tanto,

$$\text{MCD}(\underbrace{3A;\ 6B}_{\text{MCD}};\ \underbrace{6B;\ 10C}_{\text{MCD}})=\text{MCD}(72;\ 36)=36$$

Aplicación 33

Si $\text{MCM}(25A;\ 30B)=900$

$\text{MCM}(28A;\ 35B)=1680$

halle el MCM de $2A$ y $3B$.

Resolución

Tenemos que

- $\text{MCM}(25A;\ 30B)=900$ se divide entre 5.
  $\rightarrow\ \text{MCM}(5A;\ 6B)=180$
- $\text{MCM}(28A;\ 35B)=1680$ se divide entre 7.
  $\rightarrow\ \text{MCM}(4A;\ 5B)=240$

Podemos afirmar que

$$\text{MCM}(\underbrace{5A;\ 6B}_{\text{MCM}};\ \underbrace{4A;\ 5B}_{\text{MCM}})=\text{MCM}(180;\ 240)$$
$$=720 \qquad \text{(I)}$$

$$\text{MCM}(\underbrace{5A;\ 6B}_{\text{MCM}};\ \underbrace{4A;\ 5B}_{\text{MCM}})=\text{MCM}(20A;\ 30B) \qquad \text{(II)}$$

Notamos que (I) es igual a (II).

$\rightarrow\ \text{MCM}(20A;\ 30B)=720$

Dividimos entre 10.

$\therefore\ \text{MCM}(2A;\ 3B)=72$

Propiedad 5

Solo para el MCD, se cumple lo siguiente:

- $A=\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{n}}_{a\text{ cifras}}=n^a-1$
- $B=\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{n}}_{b\text{ cifras}}=n^b-1$
- $C=\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)(n-1)\ldots(n-1)}_{n}}_{c\text{ cifras}}=n^c-1$

Se puede afirmar que

$$\boxed{\text{MCD}(n^a-1;\ n^b-1;\ n^c-1)=n^{\text{MCD}(a;\,b;\,c)}-1}$$

Ejemplo

Sean

- $A=\underbrace{333\ldots3}_{20\text{ cifras}}{}_4=4^{20}-1=2^{40}-1$
- $B=\underbrace{777\ldots7}_{20\text{ cifras}}{}_8=8^{20}-1=2^{60}-1$

$\rightarrow\ \text{MCD}(A;\ B)=2^{\text{MCD}(40;\ 60)}-1$

$\text{MCD}(A;\ B)=2^{20}-1$

$\therefore\ \text{MCD}(A;\ B)=\underbrace{111\ldots1}_{20\text{ cifras}}{}_2$

Aplicación 34

Calcule el MCD de

$A=7^{10}-1;\ B=7^{14}-1;\ C=7^{12}-1$

si $\text{MCD}(A;\ B;\ C)=\overline{ab}$, indique $a+b$.

Resolución

Según las condiciones y recordando la propiedad de numeración, tenemos

- $A=\underbrace{666\ldots6}_{10\text{ cifras}}{}_7=7^{10}-1$
- $B=\underbrace{666\ldots6}_{12\text{ cifras}}{}_7=7^{12}-1$
- $C=\underbrace{666\ldots6}_{14\text{ cifras}}{}_7=7^{14}-1$

$\rightarrow\ \text{MCD}(A;\ B;\ C)=7^{\text{MCD}(10;\ 12;\ 14)}-1=7^2-1$

$\overline{ab}=7^2-1$

$\overline{ab}=48$

$\therefore\ a+b=12$

Observación

Si tenemos dos números de la forma

- $A=n^a-1$
- $B=n^b-1$

podemos calcular su MCM usando la siguiente propiedad:

$$\boxed{A\times B=\text{MCD}(A;B)\times\text{MCM}(A;B)}$$

Aplicación 35

Sean A y B, tal que

$$A=\underbrace{(15)(15)\ldots(15)}_{40\text{ cifras}}{}_{16}$$

$$B=\underbrace{(15)(15)(15)\ldots(15)}_{30\text{ cifras}}{}_{16}$$

Halle la última cifra del MCM$(A;B)$.

Resolución

Se deduce que

- $A=16^{40}-1$
- $B=16^{30}-1$

Luego,

$$\text{MCD}(A;B)=16^{\text{MCD}(40;30)}-1$$

$$\text{MCD}(A;B)=16^{10}-1$$

De la propiedad,

$$\underbrace{\text{MCD}(A;B)}\times\text{MCM}(A;B)=A\times B$$

$$(16^{10}-1)\text{MCM}(A;B)=(16^{40}-1)(16^{30}-1)$$

$$\rightarrow\ (16^{10}-1)\text{MCM}(A;B)$$
$$=(16^{10}-1)(16^{10}+1)(16^{20}+1)(16^{30}-1)$$

Eliminando $16^{10}-1$ en ambos lados se tendrá

$$\text{MCM}(A;B)=(16^{10}+1)(16^{20}+1)(16^{30}-1)$$

Se sabe que $16^n=\ldots6$

$$\rightarrow\ \text{MCM}(A;B)=\underbrace{(\ldots6+1)}_{\ldots7}\underbrace{(\ldots6+1)}_{\ldots7}\underbrace{(\ldots6-1)}_{\ldots5}$$

Luego,

$$\text{MCM}(A;B)=\ldots5$$

Por lo tanto, la última cifra es 5.

Aplicación 36

Sean

$A=7^{60}-1;\ B=7^{90}-1$

Si MCM$(A;B)=\overline{\ldots xy}$, calcule $x+y$.

Resolución

Calculemos el MCD$(A;B)$.

$$\text{MCD}(A;B)=7^{\text{MCD}(60;90)}-1$$

$$\rightarrow\ \text{MCD}(A;B)=7^{30}-1$$

Usamos la propiedad para dos números.

$$A\times B=\text{MCD}(A;B)\times\text{MCM}(A;B)$$

Se tiene lo siguiente:

$$(7^{60}-1)(7^{90}-1)=(7^{30}-1)(\overline{\ldots xy})$$

$$\cancel{(7^{30}-1)}(7^{30}+1)(7^{90}-1)=\cancel{(7^{30}-1)}(\overline{\ldots xy})$$

Observación

Tenga en cuenta que

$$\left.\begin{array}{l}7=\ \ 07\\ 7^2=\ \ 49\\ 7^3=\ldots43\\ 7^4=\ldots01\end{array}\right\}\text{Se repite cada 4 potencias de 7.}$$

$$7^5=\ldots07$$
$$\vdots\qquad\vdots$$

Entonces de la operación anterior tenemos que

$$\underbrace{(7^{30}+1)}\underbrace{(7^{90}-1)}=\overline{\ldots xy}$$

$$(\ldots50)(\ldots48)=\overline{\ldots xy}$$

$$\ldots00=\overline{\ldots xy}$$

$$\rightarrow\ x=0;\ y=0$$

$$\therefore\ x+y=0$$

LECTURA

La obra de Euclides

Euclides fue uno de los sabios que trabajó en la Escuela de Alejandría alrededor del año 300 a.n.e., según opinión de la mayoría de los estudiosos de la época clásica griega.

Su obra más importante, *Elementos*, ha constituido a lo largo de siglos un modelo de rigor, por tratarse de un desarrollo sistemático de proposiciones a partir de definiciones y axiomas admitidos sin demostración.

Si bien *Elementos* es más universalmente conocido por el tratamiento axiomático de la geometría, tiene 4 libros dedicados a los números. Los libros VII, VIII y IX podrían considerarse como el primer intento de un estudio sistemático de lo que hoy conocemos como teoría de números.

Euclides

En el libro VII, además de algunas definiciones sobre el carácter de ciertos números: par, impar, primo, perfecto, etc. y propiedades relativas a los mismos, enuncia explícitamente el algoritmo de la división entera y el que hoy conocemos como algoritmo de Euclides para calcular el máximo común divisor entre dos enteros.

Euclides y sus discípulos

El libro IX contiene la conocida demostración de la existencia de infinitos primos.

La última proposición de este libro se refiere a los números perfectos: si $2^{n+1}-1$ es primo, entonces $2n(2^{n+1}-1)$ es perfecto y ha dado lugar a un problema aún abierto, tal vez el más antiguo del que se tiene noticias.

En el libro X, Euclides estudia segmentos inconmensurables y siempre a partir de una representación geométrica, obtiene proposiciones acerca de los números irracionales cuadráticos, intentando una clasificación de los mismos.

Tomado de BECKER, María Elena; PIETROCOLA, Norma y Carlos SÁNCHEZ. *Aritmética*.

Problemas resueltos

Problema 1

Si el máximo común divisor de 4 numeros enteros positivos es 540, calcule la suma de los divisores comunes de dichos números.

Resolución

Sean los números A, B, C y D, tal que

$$\text{MCD}(A; B; C; D)=540$$

Se sabe que

$$\begin{pmatrix}\text{suma de los divisores}\\ \text{comunes de } A, B, C \text{ y } D\end{pmatrix}=\text{SD}(540)$$

Entonces

$$540=2^2\times3^3\times5^1 \qquad \text{D. C.}$$

$$\text{SD}(540)=\frac{2^3-1}{2-1}\times\frac{3^4-1}{3-1}\times\frac{5^2-1}{5-1}$$

$$\text{SD}(540)=7\times40\times6$$

$$\text{SD}(540)=1680$$

Por lo tanto, la suma de los divisores comunes de A, B, C y D es 1680.

Problema 2

Sean los números N y $\overline{4a6}$. Calcule la suma de los valores menores que 200 que toma N si el MCD de N y $\overline{4a6}$ es 18.

Resolución

Se tiene que

$$\text{MCD}(N; \overline{4a6})=18$$

es decir,

$$\overline{4a6}=\overset{\circ}{18} \rightarrow \overline{4a6}=\overset{\circ}{9}$$

$$\rightarrow 4+a+6=\overset{\circ}{9}$$

$$a=8$$

Luego tendremos lo siguiente:

$$\text{MCD}(N; 486)=18$$

$$\rightarrow \left.\begin{array}{l} N=18k \\ 486=18\times27 \end{array}\right\} \begin{array}{l} k \text{ y } 27 \text{ son PESI,} \\ \text{es decir, } (k\neq\overset{\circ}{3}). \end{array}$$

Como $N<200$

$$18\times k<200$$

$$k<11{,}1$$

Como $k\neq\overset{\circ}{3}$, entonces tenemos

$$k: 1; 2; 4; 5; 7; 8; 10; 11$$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{valores de } N\end{pmatrix}=18(1+2+4+5+7+8+10+11)$$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{valores de } N\end{pmatrix}=18(48)=864$$

Por lo tanto, la suma de los valores que toma $N<200$ es 864.

Problema 3

Si el máximo común divisor de los números $\overline{1a8b}$ y $\overline{bc2b}$ es 126, calcule la suma de cifras del mínimo común múltiplo de los números $\overline{ab}$ y $\overline{bc}$.

Resolución

Se tiene que

$$\text{MCD}(\overline{1a8b}; \overline{bc2b})=126$$

Es decir,

$$\overline{1a8b}=\overset{\circ}{\overline{126}} \wedge \overline{bc2b}=\overset{\circ}{\overline{126}}$$

Veamos.

- $\overline{bc2b}=\overset{\circ}{\overline{126}}$

$$\overline{bc2b}=\overset{\circ}{7}$$

$$\underbrace{1\,2}_{-}\underbrace{3\,1}_{+}$$

$$2c+6=\overset{\circ}{7}$$

$$c=4$$

$$\overline{b42b}=\overset{\circ}{9}$$

$$2b+6=\overset{\circ}{9}$$

$$b=6$$

- $\overline{1a8b}=\overset{\circ}{\overline{126}} \rightarrow \overline{1a86}=\overset{\circ}{9}$

$$1+a+8+6=\overset{\circ}{9}$$
$$a+15=\overset{\circ}{9}$$
$$a=3$$

Luego, $\overline{ab}=36$ y $\overline{bc}=64$.

Calculamos el MCM de 36 y 64.

36 - 64	4
9 - 16	9
1 - 16	16
1 - 1	

$\therefore$ MCM(36, 64)$=4\times9\times16=576$

Problema 4

Si se sabe que
MCM$(63A; 9B)=12\,096$
MCD$(77A; 11B)=88$
calcule el menor valor de $A+B$.

Resolución

Se tiene lo siguiente:

- MCM$(63A; 9B)=12\,096$
  Dividimos entre 9.
  $\rightarrow$ MCM$(7A; B)=1344$ (I)
- MCD$(77A; 11B)=88$
  Dividimos entre 11.
  $\rightarrow$ MCD$(7A; B)=8$ (II)

Aplicamos la propiedad para dos números. De (I) y (II) tenemos que

$$(7A)(B)=1344\times8$$
$$A\times B=1536$$

Para obtener el menor valor de $A+B$, los valores de A y B deben ser los más cercanos posibles entre sí.

$$A\times B=1536$$
$$\underset{3\times2^1}{A}\times\underset{2^5}{B}=2^9\times3$$

$\rightarrow A=48; B=32$

Por lo tanto, el menor valor de $A+B$ es 80.

Problema 5

Si el máximo común divisor de $3A$ y $24C$ es igual a $18N$ y el máximo común divisor de $2C$ y B es $2N$, calcule el valor de N. Considere que el MCD de A, $4B$ y $8C$ es 188.

Resolución

Se tiene lo siguiente:

- MCD$(3A; 24C)=18N$
  Se divide en 3.
  $\rightarrow$ MCD$(A; 8C)=6N$ (I)
- MCD$(2C; B)=2N$
  Se multiplica por 4.
  $\rightarrow$ MCD$(8C; 4B)=8N$ (II)

Por dato tenemos

$$\text{MCD}(A;\ \underset{\substack{\text{De (I)}\\ \text{MCD}\\ 6N}}{4B};\ \underset{\substack{\text{De (II)}\\ \text{MCD}\\ 8N}}{8C})=188$$

$\rightarrow$ MCD$(6N; 8N)=188$

$2N=188$

$\therefore N=94$

Problema 6

Si el mínimo común múltiplo de los números $\overline{abc}$ y $\overline{(a+1)(b+2)(c+3)}$ es 1148, calcule el valor de $a^2+b^2+c^2$.

Resolución

Se tiene que

$$\text{MCM}(\overline{abc}; \overline{(a+1)(b+2)(c+3)})=1148$$

Es decir,

$$\text{MCM}(\overline{abc}; \overline{abc}+123)=1148 \quad \text{(I)}$$

Observamos que

$$a<9;\ b<8;\ c<7$$

Supongamos que

$$\text{MCD}(\overline{abc}; \overline{abc}+123)=d$$

Entonces

$$\left.\begin{array}{l}\bullet\ \overline{abc}=dk\\ \bullet\ \overline{abc}+123=dp\end{array}\right\}\ k \text{ y } p \text{ son PESI.}$$

De estas dos expresiones obtenemos

$$d(p-k)=123 \qquad \text{(II)}$$

De (I) tenemos

$$dkp=1148 \qquad \text{(III)}$$

Si dividimos (II) entre (III) se obtiene

$$\frac{p-k}{kp}=\frac{3}{28}$$

Como k y p son PESI, entonces $k=4$ y $p=7$

Reemplazamos en (II).

$\rightarrow\ d=41$

Luego,

$$\overline{abc}=41\times 4=164$$

$\rightarrow\ a=1;\ b=6;\ c=4$

$\therefore\ a^2+b^2+c^2=53$

Problema 7

Sean los números $32^a\times 15^b$ y $21^b\times 20^a$. Si estos números tienen 63 divisores comunes, ¿cuántos divisores tiene el MCM de dichos números?

Resolución

Sean los números

- $A=32^a\times 15^b$
- $B=21^b\times 20^a$

Descomponemos en forma canónica.

$$A=2^{5a}\times 3^b\times 5^b \qquad \text{D.C.}$$

$$B=3^b\times 7^b\times 2^{2a}\times 5^a \qquad \text{D.C.}$$

Sabemos que

$$\text{CD(MCD)}=\left(\begin{array}{c}\text{cantidad de divisores}\\ \text{comunes de } A \text{ y } B\end{array}\right)$$

es decir,

$$\text{CD(MCD)}=63 \qquad (*)$$

Se tiene que

$$\text{MCD}(A;B)=2^{2a}\times 3^b\times 5^{\bigcirc}$$

puede ser a o b

Reemplazamos en (*).

$$\underbrace{(2a+1)}_{7}\underbrace{(b+1)}_{3}\underbrace{(b+1)}_{3}=63$$

debe ser $b+1$

$=7\times 3\times 3$

$\rightarrow\ a=3;\ b=2$

Luego,

$$A=2^{15}\times 3^2\times 5^2 \qquad \text{D.C.}$$

$$B=3^2\times 7^2\times 2^6\times 5^2 \qquad \text{D.C.}$$

Calculamos el MCM(A; B).

$$\text{MCM}(A;B)=2^{15}\times 3^2\times 5^3\times 7^2$$

$$\text{CD(MCM)}=(15+1)(2+1)(3+1)(2+1)$$

$$\text{CD(MCM)}=16\times 3\times 4\times 3$$

$$\therefore\ \text{CD(MCM)}=576$$

Problema 8

La diferencia de 2 números es 44; la diferencia entre su MCM y su MCD es 1364. ¿Cuál es la suma de dichos números?

Resolución

Sean los números A y B, tal que

- $A-B=44$ (I)
- $\text{MCM}(A;B)-\text{MCD}(A;B)=1364$ (II)

Supongamos que

$$\text{MCD}(A;B)=d$$

$$\left.\begin{array}{l}A=dk\\ B=dp\end{array}\right\}\ k \text{ y } p \text{ son PESI.}$$

Reemplazamos en (I).

$$dk-dp=44$$

$$d(k-p)=44 \qquad \text{(III)}$$

Reemplazamos en (II).

$$dkp-d=1364$$

$$d(kp-1)=1364 \qquad \text{(IV)}$$

Dividimos (III) entre (IV).

$$\frac{k-p}{kp-1}=\frac{2}{62}$$

$\rightarrow\ k=9;\ p=7$

Reemplazamos en (III).

$\rightarrow\ d=22$

Luego,

$A=198;\ B=154$

$\therefore\ A+B=352$

Problema 9

Si se sabe que

$\text{MCM}(\overline{ab0ab}_4;\ \overline{mnmn}_5)=12\,870$

$\text{MCD}(\overline{ab0ab}_4;\ \overline{mnmn}_5)=13$

halle la suma de valores de $(a+b+m+n)$.

Resolución

Se sabe que para dos números se cumple que

$$\underbrace{\overline{ab0ab}_4}_{65\times\overline{ab}_4}\times\underbrace{\overline{mnmn}_5}_{26\times\overline{mn}_5}=13\times 12\,870$$

$$\rightarrow\ \underbrace{\overline{ab}_4}_{\substack{9\\11}}\times\underbrace{\overline{mn}_5}_{\substack{11\\9}}=99$$

De la primera posibilidad tenemos

$$\underbrace{\overline{ab}_4}_{\substack{a=2\\b=1}}=9\ \wedge\ \underbrace{\overline{mn}_5}_{\substack{m=2\\n=1}}=11\ \rightarrow\ a+b+m+n=6$$

De la segunda posibilidad tenemos

$$\underbrace{\overline{ab}_4}_{\substack{a=2\\b=3}}=11\ \wedge\ \underbrace{\overline{mn}_5}_{\substack{m=1\\n=4}}=9\ \rightarrow a+b+m+n=10$$

Por lo tanto, la suma de los valores de $a+b+m+n$ es 16.

Problema 10

Dados los números

$A=333...3_7$ (24 cifras)

$B=333...3_7$ (30 cifras)

¿Cuántas cifras tiene el MCD de A y B en el sistema decimal?

Resolución

Multiplicamos cada número por 2.

- $A=33...33_7$

  $2A=666...66_7$ (24 cifras)

$\rightarrow\ 2A=7^{24}-1$

- $B=33\ ...\ 33_7$

  $2B=66\ ...\ 66_7$ (30 cifras)

$\rightarrow\ 2B=7^{30}-1$

Calculamos.

$\text{MCD}(2A;\ 2B)=7^{\text{MCD}(24;\ 30)}-1$

$\text{MCD}(2A;\ 2B)=7^6-1$

$\text{MCD}(2A;\ 2B)=117\,648$

Dividimos entre 2.

$\text{MCD}(A;\ B)=58\,824$

Por lo tanto, el $\text{MCD}(A;\ B)$ tiene 5 cifras.

Problema 11

Si A, B y C son números naturales donde $B<A<C$; además, $\text{MCD}(A;\ B)=6$, $\text{MCD}(B;\ C)=9$ y $\text{MCM}=(A;\ B;\ C)=360$, calcule $C+A-B$.

Resolución

Se tiene que

- $\text{MCD}(A;B)=6$

  Es decir,

$$\left.\begin{array}{l}A=6k\\B=6p\end{array}\right\}\ k \text{ y } p \text{ son PESI.}$$

- $\text{MCD}(B; C)=9$

  Es decir,

$$\left.\begin{array}{l} B=9q \\ C=9r \end{array}\right\} q \text{ y } r \text{ son PESI.}$$

Se observa que

$$6p=9q$$

$$\frac{p}{q}=\frac{3}{2} \rightarrow \begin{array}{l} p=3n \\ q=2n \end{array}$$

Se puede afirmar que $r \neq \overset{\circ}{2}$

$k \neq \overset{\circ}{3}$

Luego,

$$A=6k;\ B=18n;\ C=9r$$

Como $\text{MCM}(A; B; C)=360$

$\rightarrow \text{MCM}(6k; 18n; 9r)=360$

Al dividir entre 3 se obtiene

$$\text{MCM}(2k; 6n; 3r)=120$$

Por descomposición conjunta tenemos

$$\left.\begin{array}{ccc|c} 2k & 6n & 3r & 2 \\ k & 3n & 3r & 3 \\ \underset{\downarrow}{k} & \underset{\downarrow}{n} & \underset{\downarrow}{r} & 4 \\ 4 & 1 & 5 & 5 \end{array}\right\} 120 \qquad r \neq \overset{\circ}{2} \wedge k \neq \overset{\circ}{3}$$

Luego,

$$A=24;\ B=18;\ C=45$$

$\therefore\ A+C-B=51$

Problema 12

Al calcular el MCD de 2 números enteros positivos por el algoritmo de Euclides se obtuvo como cocientes sucesivos a 2; 1; 3 y 2. Si la diferencia de dichos números posee 8 divisores, ¿cuál es la suma de cifras del mayor de los números?

Resolución

Sean los números A y B.

El esquema sería el siguiente:

	2	1	3	2
$25k$	$9k$	$7k$	$2k$	k
A B	$7k$	$2k$	k	0

Se tiene que

$$A=25k \wedge B=9k$$

$A-B=16k$ (este número tiene 8 divisores)

Descomponemos de forma canónica.

$$16k=2^4\times k$$

La única forma de que este número tenga 8 divisores es que el valor de k sea 8.

Es decir,

$$A-B=16k=16\times 8=2^7$$

Entonces

$$A=200 \wedge B=72$$

Por lo tanto, el mayor es 200 y la suma de cifras es 2.

Problema 13

Al determinar el MCD de los números $\overline{abcd}$ y $\overline{m(m+3)(m+3)}$ por el algoritmo de Euclides, se obtuvo como cocientes a 3; 2; 2; 4 y 2. Calcule $a+b+c+d$.

Resolución

El esquema sería el siguiente:

	3	2	2	4	2
$167k$	$49k$	$20k$	$9k$	$2k$	k
	$20k$	$9k$	$2k$	k	0

Luego se tiene que

$$\overline{abcd}=167k \wedge \overline{m(m+3)(m+3)}=49k$$

De este último número tenemos

$$\overline{m(m+3)(m+3)}=\overset{\circ}{7}$$

2 3 1

+

Aplicando el criterio de divisibilidad por 7 se obtiene

$$2m+3m+9+m+3=\overset{\circ}{7}$$
$$6m+12=\overset{\circ}{7}$$
$$m+2=\overset{\circ}{7}$$
$$m=5$$

Es decir,

$$588=49k \rightarrow k=12$$

Reemplazamos en

$$\overline{abcd}=167k=167\times 12=2004$$
$$\rightarrow a=2;\ b=0;\ c=0;\ d=4$$
$$\therefore\ a+b+c+d=6$$

Problema 14

Al calcular el MCD de 2 números mediante el algoritmo de Euclides se obtienen los cocientes sucesivos a 7; 5; 3 y 2, respectivamente. Si los 2 primeros cocientes se obtuvieron por exceso y la suma de los divisores primos de la suma de los residuos es 10, halle la mínima diferencia de dichos números.

Resolución

Sean A y B los números.

El esquema sería el siguiente:

	7	5	3	2
$224k$	$33k$	$7k$	$2k$	k
	$7k$	$2k$	k	0

A, B

exceso

exceso

$$\rightarrow A=224k \wedge B=33k$$

La suma de residuos es

$$7k+2k+k=10k$$

Por dato tenemos que la suma de los divisores primos de este número es igual a 10.

$$10k=2\times 5\times k$$

k debe ser 3 para que así la diferencia de A y B sea mínima.

Luego,

$$A=224\times 3=672$$
$$B=33\times 3=99 \rightarrow A-B=573$$

Por lo tanto, la menor diferencia es 573.

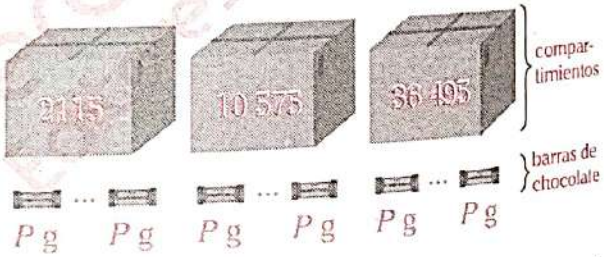
Problema 15

Rosa trabaja en una tienda de dulces; ella quiere almacenar chocolates en barra en 3 compartimientos diferentes que contengan 2115; 10 575 y 36 495 gramos de chocolate. ¿Cuál debe ser el mayor peso de una barra para realizar el almacenamiento con barras del mismo peso?

Resolución

Supongamos que cada barra de chocolate tenga un peso (P g).

Veamos.



Se puede observar que P debe ser el mayor divisor común.

$$P=\text{MCD}(2115;\ 10\,575;\ 36\,495)$$

Luego,

$$\begin{array}{rcrcr|l} 2115 & - & 10\,575 & - & 36\,495 & 3 \\ 705 & - & 3525 & - & 12\,165 & 3 \\ 235 & - & 1175 & - & 4055 & 5 \\ 47 & - & 235 & - & 811 & \end{array}$$

PESI

$$\rightarrow P=3\times 3\times 5$$

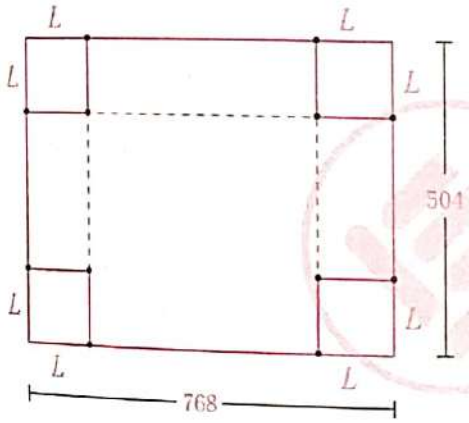
Por lo tanto, el mayor peso de la barra es de 45 gramos.

Problema 16

Don Fortunato quiere dividir su terreno en parcelas cuadradas; su terreno tiene forma rectangular y sus dimensiones son 504 y 768 metros. Si el lado de cada parcela debe ser un número entero en metros y en cada esquina de las parcelas se debe colocar un poste, ¿cuál será la mínima cantidad de postes que se van a emplear?

Resolución

Graficamos.



Se observa que L debe ser un divisor común de 504 y 768; además, como se quiere calcular la menor cantidad de postes que se puedan colocar en las esquinas de cada parcela, entonces L debe ser máximo.

L=MCD(504; 768)

$$\begin{array}{r|l} 504 - 768 & 4 \\ 705 - 192 & 2 \\ 63 - 96 & 3 \\ 21 - 32 & \end{array}$$

PESI

$\rightarrow L=24$

Luego,

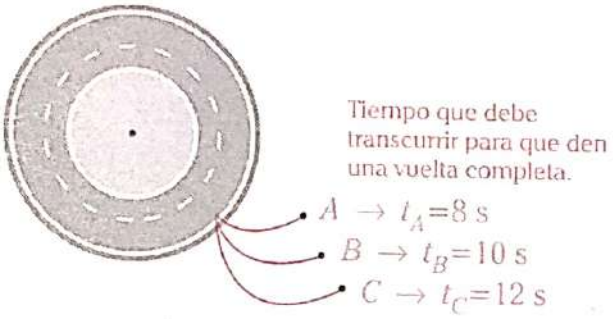
$$\therefore \begin{pmatrix}\text{n.º de postes}\\ \text{empleados}\end{pmatrix}=\left(\frac{504}{24}+1\right)\left(\frac{768}{24}+1\right)=726$$

Problema 17

Tres ciclistas partieron al mismo tiempo y del mismo punto de una pista circular. En cada vuelta, tardaron, respectivamente, 8, 10 y 12 segundos. ¿Cuántas vueltas habrá dado cada uno de los ciclistas cuando hayan pasado nuevamente y al mismo tiempo por el punto de partida?

Resolución

Graficamos.



Para que vuelvan a coincidir en la salida, en el punto de partida, el tiempo que debe transcurrir debe ser mínimo, tal que contenga a 8; 10 y 12, es decir, MCM(8; 10; 12)=120 s.

Entonces

- $A=\dfrac{120}{8}=15$ vueltas
- $B=\dfrac{120}{10}=12$ vueltas
- $C=\dfrac{120}{12}=10$ vueltas

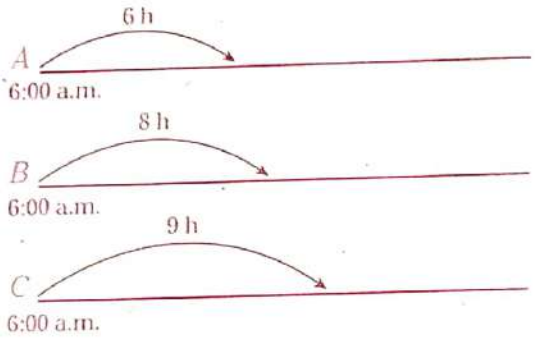
Por lo tanto, cada uno de los ciclistas dan 15, 12 y 10 vueltas hasta que hayan pasado nuevamente por el punto de partida.

Problema 18

Se sabe que en el aeropuerto Jorge Chávez la línea aérea A tiene vuelos cada 6 horas; la línea B cada 8 horas; y la línea C cada 9 horas. Si cierto día, a las 6:00 a.m., partieron los aviones al mismo tiempo, indique cuántas veces coincidirán nuevamente en salir al mismo tiempo las tres líneas aéreas en las 300 horas siguientes.

Resolución

Graficamos.



Se observa que el tiempo que debe transcurrir para que las tres líneas coincidan nuevamente en salir debe ser

$$\text{MCM}(6;\ 8;\ 9)=72 \text{ horas}$$

En las siguientes 300 horas volverán a coincidir

$$\begin{array}{r|l} 300 & 72 \\ \hline 12 & 4 \end{array}$$

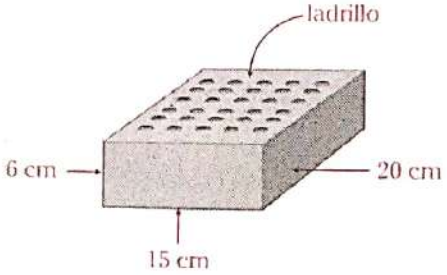
Por lo tanto, volverán a coincidir 4 veces.

Problema 19

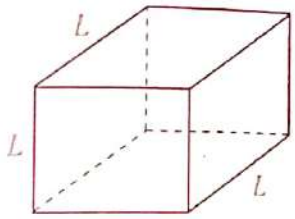
Yandí quiere formar un cubo compacto apilando ladrillos cuyas dimensiones son 20 cm, 15 cm y 6 cm. Indique cuántos ladrillos habrá utilizado Yandí para formar el cubo más pequeño posible.

Resolución

Graficamos.



Sea L la arista del cubo que se requiere formar.



Para formar el menor cubo compacto

$$L=\text{MCM}(6;\ 15;\ 20) \rightarrow L=180$$

Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{total de ladrillos}\\ \text{utilizados}\end{pmatrix}=\frac{180\times180\times180}{6\times15\times20}$$

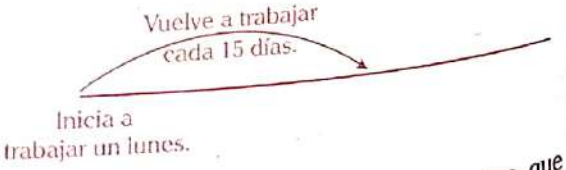
$$\therefore \begin{pmatrix}\text{total de ladrillos}\\ \text{utilizados}\end{pmatrix}=3240$$

Problema 20

Un obrero trabaja 13 días seguidos y descansa 2 días. Si empieza a trabajar un día lunes, ¿cuántos días han de pasar para que le toque descansar sábado y domingo?

Resolución

Graficamos.



Veremos cuántos días debe pasar para que vuelva a trabajar el día lunes, es decir, el día domingo y sábado habrá descansado.

$$T=\text{MCM}(15;\ \underset{\substack{\downarrow\\ \text{de lunes para}\\ \text{otro lunes}}}{7})=105$$

Por lo tanto, deben pasar 105 días.

Test

1. Al dividir 369 y 513 entre n, los residuos respectivos fueron 5 y 9. ¿Cuál es el mayor valor de n?

A) 42 B) 21 C) 14
D) 28 E) 10

2. Sean A y B $(A>B)$ dos números enteros cuyo máximo común divisor es 13 y la diferencia de sus cuadrados es 1521. Calcule el valor que puede tomar A.

A) 52 B) 104 C) 65
D) 91 E) 117

3. Mediante el algoritmo de Euclides, se calculó el MCD de dos números cuya diferencia entre ellos es 4515, se obtuvo como cocientes sucesivos 3; 5; 2; 1 y 3. Calcule la suma de cifras del mayor de dichos números.

A) 20 B) 18 C) 19
D) 15 E) 24

4. Si se cumple que el MCM$(A; 3B)=9600$ y el MCD$(2A; 6B)=12$, calcule la suma de cifras de $A\times B$.

A) 11 B) 10 C) 12
D) 15 E) 13

5. Si se cumple que el MCD$(2A;\ 5B)=120$ y el MCD$(B; 3C)=80$;
además, MCD$(2A; 5B; 15C)=20n$, calcule n.

A) 3 B) 4 C) 2
D) 1 E) 6

6. Si $A=3^{40}-1$ y $B=27^{24}-1$, entonces determine la suma de cifras del MCD$(A; B)$ al expresarlo en el sistema nonario.

A) 16 B) 32 C) 45
D) 56 E) 27

7. El MCD de $\overline{a3b6}$ y $\overline{(b+1)5b}$ es un número capicúa de dos cifras. Calcule el valor de $a+b$.

A) 9 B) 12 C) 5
D) 7 E) 10

8. Si se cumple que MCM$(A^2-1; A)=7980$, calcule la suma de cifras de A^2.

A) 6 B) 4 C) 8
D) 2 E) 5

9. Se tienen tres aros de acero de longitudes 240; 360 y 1080 cm de longitud. ¿Cuál será el menor número de cortes que se tiene que hacer a los tres aros para obtener trazos de igual longitud sin que se desperdicie material?

A) 7 B) 11 C) 9
D) 10 E) 14

10. Tres líneas aéreas dan servicios cada 6; 8, y 10 días, respectivamente. Si las 3 líneas saldrían juntas un lunes, ¿dentro de cuántos días volverán a salir otra vez juntas un día lunes? Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 10 B) 15 C) 8
D) 12 E) 9

Claves

1 D 2 C 3 C 4 C 5 D 6 B 7 A 8 B 9 B 10 D

Problemas propuestos

Nivel básico

1. ¿Cuántos números múltiplos comunes de 15; 21 y 35 se encuentran entre 2018 y 2220?

A) 1 B) 3 C) 2
D) 4 E) 12

2. Si el máximo común divisor de 504 y $2N$ es 84, determine la cantidad de valores menores de 300 que toma N.

A) 5 B) 3 C) 7
D) 11 E) 15

3. Sea el numeral $N=\overline{(a+2)b(a+5)}$.
Si MCM(N; B)=MCM(N; $15B$), calcule la suma de valores de $a+b$.

A) 12 B) 15 C) 20
D) 21 E) 17

4. Al calcular el MCD de $\overline{mnp}$ y $\overline{pnm}$ mediante el algoritmo de Euclides se obtuvo como cocientes sucesivos a 1; 3; 3; 10; 1 y 2. Calcule $m+n+p$ si el menor de los números es par.

A) 18 B) 15 C) 10
D) 19 E) 21

5. Si MCD($3A$; $24C$)=$18N$, MCD($2C$; B)=$2N$ y MCD(A; $4B$; $8C$)=188, calcule el valor de N.

A) 102 B) 94 C) 72
D) 48 E) 88

6. Si $A=33...3_4$ (42 cifras) y $B=33...3_4$ (105 cifras), ¿en qué cifra termina el MCM de A y B en el sistema decimal.

A) 1 B) 5 C) 7
D) 9 E) 3

7. Si MCD($\overline{abc1}$; $\overline{abc3}$; $\overline{abc5}$)=$N-1999$, calcule cuántos divisores impares tiene N.

A) 6 B) 4 C) 2
D) 14 E) 1

8. La suma de dos números es 364. Calcule el mayor de ellos si su MCM es 675 veces su MCD.

A) 198 B) 177 C) 192
D) 143 E) 189

9. Calcule cuántos divisores comunes tienen $12A$, $18B$ y $45C$ si se sabe que
MCD($2A$; $3B$)=72
MCD($2B$; $5C$)=40

A) 10 B) 12 C) 15
D) 18 E) 24

10. Se sabe que
$A=15\times 90^n$ y $B=15^n\times 90$
Halle el valor de n si se sabe que el MCM de A y B es 35 veces más que el MCD de A y B.

A) 8 B) 3 C) 7
D) 2 E) 4

11. Si MCM($\underbrace{85!; 86!; ...}_{10\text{ números}}$)=$A$
MCD($\underbrace{93!; 94!; ...}_{10\text{ números}}$)=$B$
determine el MCM de A y B.

A) 94! B) 93! C) 92!
D) 95! E) 96!

12. En una competencia sobre una pista circular de 288 m participan 3 atletas cuyas velocidades son 6 m/s; 8 m/s y 9 m/s. Determine cuántas veces coincidirán en pasar juntos por el punto de partida en 1 hora si sus velocidades se mantienen constantes.

A) 6 B) 12 C) 8
D) 10 E) 14

Nivel intermedio

13. Si los números
$20^{2n}\times15^{n-1}$ y $12^{n+3}\times18^2$
poseen 39 divisores comunes, indique el valor de n.

A) 4 B) 3 C) 5
D) 7 E) 2

14. Determine el valor de k si se sabe que el mínimo común múltiplo de los números $72^k\times30$ y 4×90^k tienen 2944 divisores.

A) 3 B) 5 C) 1
D) 9 E) 7

15. Se tiene 2 números, uno de 2 cifras y otro de 3 cifras. Si el MCD de sus complementos aritméticos es 26, la suma de dichos números es 840 y el producto de sus complementos aritméticos es 14 196, indique cuál es el menor de ellos.

A) 11 B) 33 C) 42
D) 82 E) 22

16. Si $\text{MCD}(n+4; n+8; n+12)=n$
$\text{MCM}(\overline{(n-2)5}; \overline{b9})=\overline{nxy}$
calcule $n+b+x+y$.

A) 19 B) 13 C) 15
D) 20 E) 17

17. Calcule la suma de cifras del mayor valor de N, tal que al dividir 4653; 2277 y 3069 entre N, las divisiones resultan exactas.

A) 18 B) 99 C) 169
D) 63 E) 33

18. Sean los números $\overline{(a-1)(2a-2)(a+2)}$ y $\overline{(a-1)(a-1)}$ primos entre sí. Si al calcular el MCD de estos números mediante las divisiones sucesivas, los cocientes obtenidos suman 21, calcule el MCM de dichos números y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 16 B) 17 C) 18
D) 20 E) 14

19. ¿Cuántos pares de números cumplen con que su suma es 533 y la diferencia de los cocientes obtenidos de dividirlos entre el MCD de los mismos es 3?

A) 6 B) 1 C) 7
D) 2 E) 3

20. Se sabe que la diferencia entre el MCM y el MCD de 3 números es 923; también se sabe que la diferencia entre el mayor y el menor es 65 y que la diferencia entre el mayor y el otro número es 13. Calcule la suma de los 3 números.

A) 182 B) 135 C) 161
D) 171 E) 273

21. El MCD de 2 números es 248 y el menor de ellos es 2976. Si se sabe que su mínimo común múltiplo está comprendido entre 59 520 y 89 500, ¿cuántos valores puede asumir el mayor de los números?

A) 4 B) 5 C) 2
D) 3 E) 7

22. Al dividir los números A, B y MCD(A; B) entre 13 se obtienen residuos 7; 6 y 4, respectivamente. Calcule el residuo al dividir el MCM de A y B entre 13.

A) 4 B) 1 C) 7
D) 12 E) 2

23. Si A y B son números primos entre sí y

$$\text{MCD}\left(2(A^2-B^2);\ 2A\right)=\frac{34}{B}$$
$$\text{MCM}(A;\ A-B)=12A$$

calcule $A\times B$.

A) 493 B) 439 C) 394
D) 943 E) 721

24. Calcule el valor de $A+C+V$, sabiendo que $\text{MCM}\left(500-\overline{ACV};\ 770-\overline{ACV}\right)=1053$

A) 12 B) 15 C) 10
D) 13 E) 14

25. Si $A=2^{3a}\times 3^{2b}\times 7^{b-2}$

$B=2^{a+3}\times 3^{b+4}\times 5^{a+2}$

además,

$\text{MCD}(A;B)=2^{3a}\times 3^{2b}$

halle la cantidad de divisores del MCM(A; B).

A) 320 B) 360 C) 160
D) 240 E) 180

26. Si el MCM de 4 números consecutivos es 5460. Calcule la suma de dichos números.

A) 51 B) 54 C) 59
D) 53 E) 58

27. Calcule el MCD de A y B si

$A=111...11_2$ (20 cifras)

$B=77...7_8$ (10 cifras)

Dé como respuesta la suma de cifras al expresarlo en base 32.

A) 64 B) 62 C) 72
D) 63 E) 65

28. Si se cumple que

$\text{MCD}\left(\overline{ab};\ \overline{(2c)0}\right)=c^2$

$\text{MCM}\left(ab;\ \overline{(2c)0}\right)=120$

calcule $a+b+c$.

A) 5 B) 2 C) 7
D) 3 E) 6

29. En un patio de forma cuadrada se desea acomodar losetas de 28×35 cm, de tal manera que no sobre ni falte espacio. ¿Cuál es el menor número de losetas que se requiere?

A) 20 B) 19 C) 15
D) 24 E) 18

30. Un puerto recibe 10 barcos peruanos cada 8 días y recibe 8 barcos extranjeros cada 10 días. Determine cuántos barcos peruanos y extranjeros recibió dicho puerto en un mismo día durante un año.

A) 60 B) 168 C) 162
D) 120 E) 172

31. Un tanque vacío puede ser llenado en un número exacto de minutos por cualquiera de los tres grifos que pueden verter 45, 50 y 40 litros por minuto. ¿Cuál es la menor capacidad que debe tener el tanque?

A) 1200 L B) 1500 L C) 1750 L
D) 1800 L E) 1900 L

32. Un camión va a transportar ladrillos de tal manera que en la parte de la carga se forme una fila de 3 cubos de ladrillos de dimensiones 12; 15 y 20 cm. Calcule cuántos ladrillos se podrá transportar como máximo si la arista del cubo no debe exceder los 2 m.

A) 180 B) 1296 C) 540
D) 5040 E) 4860

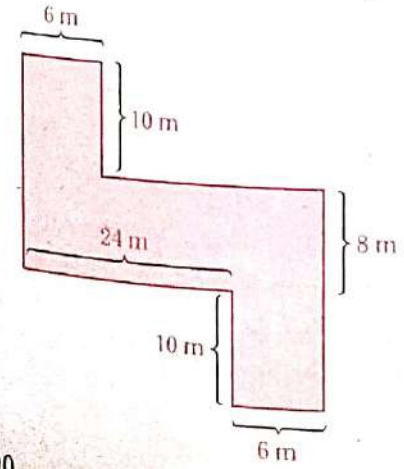
33. Si se cumple que
MCD($8A$; $12B$)$=4n$
MCD($2B$; $6C$)$=6n$
además,
MCD($2A$; $3B$; $9C$)+MCD($4A$; $6B$; $18C$)$=519$
calcule la suma de cifras de n.

A) 11 B) 14 C) 16
D) 15 E) 10

34. Si se sabe que
$A=47^{874}-1$ y $B=47^{646}-1$
calcule en qué cifra termina el MCM de A y B.

A) 5 B) 8 C) 7
D) 9 E) 3

35. ¿Cuántas losetas cuadradas iguales se necesitarán como mínimo para cubrir totalmente un piso como se muestra en el gráfico?



A) 90 B) 32 C) 42
D) 56 E) 57

36. Si $A=1\underbrace{800...0}_{n \text{ ceros}}$ y $B=24\underbrace{00...0}_{2n \text{ ceros}}$
y el MCM(A; B) tiene 120 divisores, calcule el MCD(A; B). Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 5 B) 7 C) 3
D) 6 E) 8

37. En una panadería producen 1224 y 2244 panes francés y de yema, respectivamente. Si se les quiere dividir en sacos con igual cantidad de panes de cada tipo y que no sobre pan alguno, ¿cuántos sacos como mínimo se requiere? Considere que en cada saco no pueda haber más de 40, ni menos de 28 panes.

A) 112 B) 86 C) 102
D) 96 E) 98

Nivel avanzado

38. Si se sabe que
MCD(A; B)$=17$, MCD(C; B)$=17$,
MCD(A; C)$=17$, MCM(A; B; C)$=1785$
$A+B+C=255$; además, $A>B>C$,
calcule el valor de $A+B-C$.

A) 165
B) 153
C) 311
D) 171
E) 241

39. Sean los números
$A=666...6_7$ (300 cifras)
$B=666...6_7$ (240 cifras)
Calcule en qué cifra termina el MCM de A y B al expresarlo en base 10.

A) 1 B) 0 C) 5
D) 7 E) 9

40. En el cálculo del MCD de A y B por el algoritmo de Euclides se hallaron los siguientes cocientes: 1; 1 y 2; mientras que para A y C, los cocientes obtenidos por el mismo método son 1; 2 y 2. Calcule el número de divisores de $A \times B \times C$ si se sabe que $A+B+C=1053$.

A) 24 B) 28 C) 96
D) 32 E) 72

41. Se cumple que

$$\text{MCD}\left(\frac{5n+3}{4};\frac{4n-3}{5}\right)=9$$

Calcule el menor valor que puede tomar n si es de 4 cifras.

A) 1137 B) 1317 C) 1132
D) 1130 E) 1713

42. Para la arborización de un parque zonal de 480 m por 600 m, se van a plantar árboles igualmente distanciados entre sí a una distancia de separación entre 10 y 20 metros. Determine la diferencia entre la máxima y mínima cantidad de árboles que podrían plantearse si en cualquier caso debe haber un árbol en cada esquina.

A) 62 B) 36 C) 71
D) 73 E) 85

43. Sean

$\text{MCM}(18A; 12B)=36A$
$\text{MCM}(4B; 10C)=20B$
$\text{MCM}(9A; 6B; 15C)=10\,800$
$\text{MCD}(3A; 5B)=6$
Calcule $A \times B$ $(A>B)$.

A) 216 B) 864 C) 432
D) 192 E) 720

44. Sean los números

$A=222\ldots2_5$ (120 cifras)
$B=222\ldots2_5$ (136 cifras)

¿Cuántos divisores impares comunes tienen A y B?

A) 8 B) 12 C) 32
D) 9 E) 6

45. Claudia asiste a su clase de inglés cada 6 días, a su clase de canto cada 10 días, y al cine cada 4 días. Si el 20 de julio del 2020 coincide en ir a su clase de inglés, canto y va al cine (en horarios diferentes), ¿en qué fecha del mes de noviembre del 2020 volverá a ocurrir esta coincidencia?

A) 16/11
B) 17/11
C) 15/11
D) 23/11
E) 18/11

46. Al calcular el MCD de A; B $(A>B)$, mediante el método de las divisiones sucesivas, se obtuvo 11 como suma de cocientes; además, el primer y segundo residuos obtenidos son 52 y 44, respectivamente. Halle la suma de cifras de A si se sabe que el MCM de A y B es $\overline{abac}$.

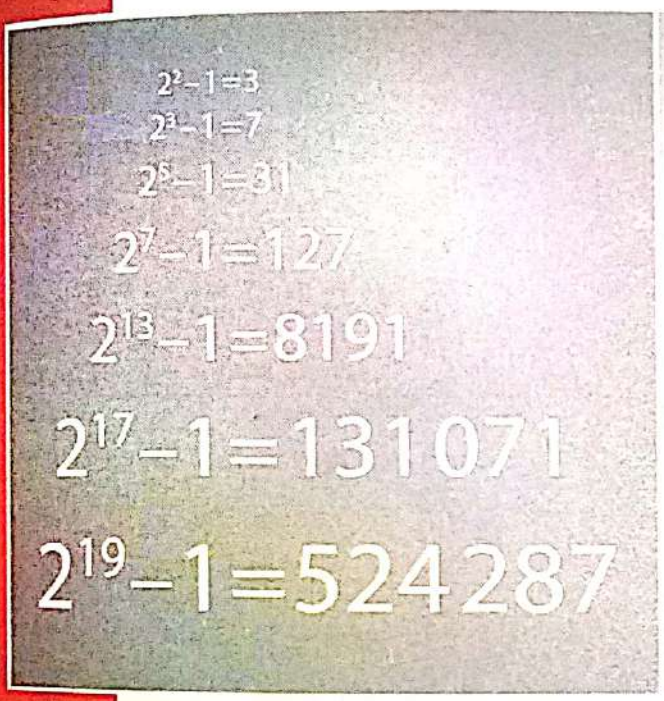
A) 8 B) 7 C) 10
D) 9 E) 12

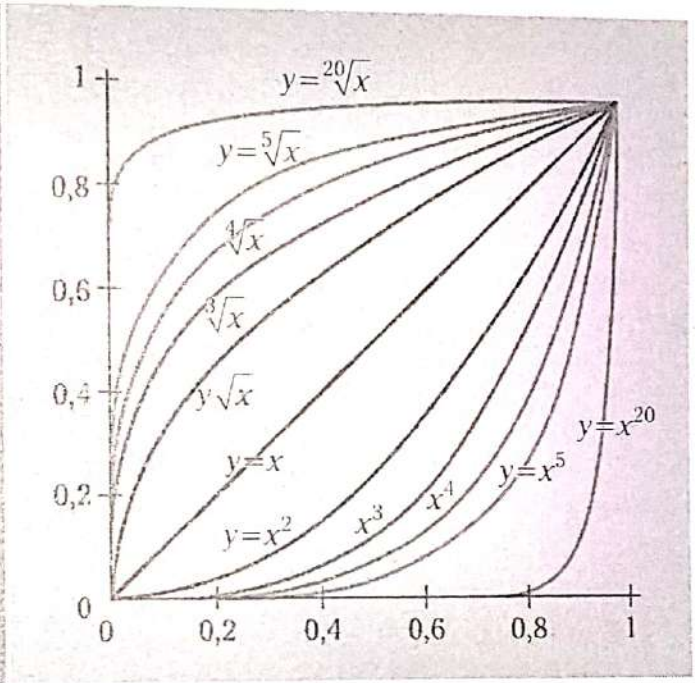
47. Sean los números A y B con 10 y 12 divisores, respectivamente. Si el MCD de dichos números es 54, determine el MCM de los números en mención.

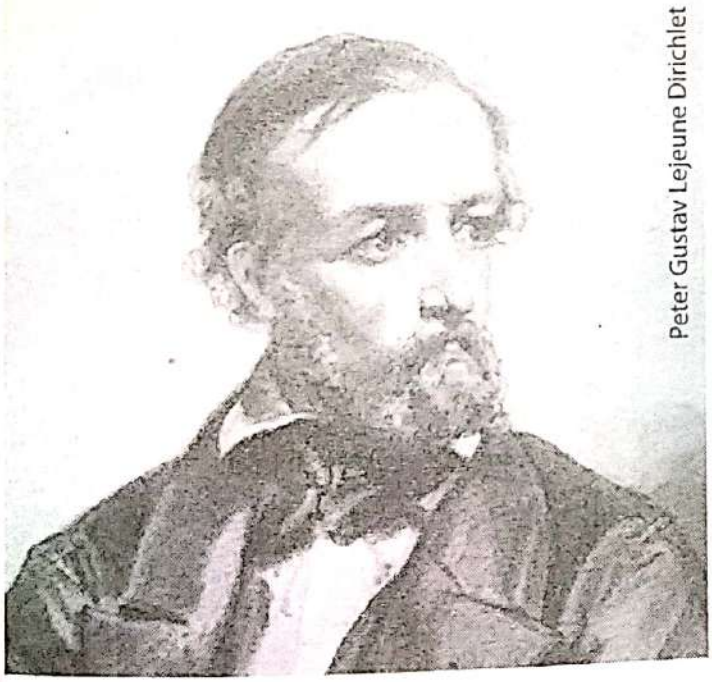
A) 686 B) 432 C) 324
D) 424 E) 328

Capítulo

X







Peter Gustav Lejeune Dirichlet

Potenciación y Radicación en $\mathbb{Z}^+$

Raúl Flores Rivero

CAPÍTULO X

POTENCIACIÓN Y RADICACIÓN EN $\mathbb{Z}^+$

Objetivos

- Analizar a profundidad los números cuadrados y los cubos perfectos.
- Estudiar detalladamente los criterios de inclusión y exclusión para los números cuadrados y cubos perfectos.
- Estudiar minuciosamente la raíz cuadrada y la raíz cúbica de números enteros positivos.

Introducción

En algunas ocasiones, los números que se escriben para denotar ciertos acontecimientos son exageradamente grandes y otros son muy pequeños. Para simplificar la forma de escribir estos números, se hace necesario ampliar la operación de la multiplicación y a partir de esta se genera una operación denominada potenciación; además, a la par, se genera una operación inversa a la potenciación, que se conoce como radicación.

Por ejemplo, en el estudio de la química, el número de átomos de carbono que hay en un gramo es

5 015 000 000 000 000 000 000

Como se observa, este número es muy grande para leerlo, escribirlo, recordarlo y, por ende, para realizar las operaciones convencionales con él.

Por otro lado, la masa expresada en gramos de un solo átomo de carbono es

0,000000000000000000000001999 gramos

Este número es muy pequeño y también hay dificultades para leerlo, escribirlo, recordarlo y hacer las operaciones convencionales con él.

Por todas estas situaciones, es muy importante el estudio de la potenciación, ya que con esta nueva operación se simplifica la forma de exponer estos números.

Por ejemplo, en la notación científica o exponencial de un número se utiliza la potenciación, para ello recordemos que

$$\ldots;\ 10^{-3}=\frac{1}{10^3};\ 10^{-2}=\frac{1}{10^2};\ 10^{-1}=\frac{1}{10};\ \ldots;\ 10^0=1;\ 10^1=100;\ 10^2=100;\ 10^3=1000;\ 10^4=10\,000;\ \ldots$$

Por ejemplo, la notación científica está dada por: $C\times 10^n$

donde

- C: coeficiente entre $1 \le C < 10$
- n: exponente negativo o positivo entero

POTENCIACIÓN EN LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

1 DEFINICIÓN

Es la operación que abrevia una multiplicación donde un mismo factor se repite una cierta cantidad de veces.

Ejemplo

Fabrizio participa en un concurso de conocimientos, en el cual por cada respuesta correcta le triplican los puntos obtenidos anteriormente. Si Fabrizio inicia el juego con un punto y en la séptima pregunta falla, veamos con cuántos puntos se retira del juego.

La puntuación inicial es 1, como falla en la séptima pregunta, entonces Fabrizio se retira con los puntos obtenidos hasta la sexta pregunta.

$$3\times3\times3\times3\times3\times3=729$$

Por lo tanto, Fabrizio se retira con 729 puntos.

Observación

Respecto al ejemplo anterior, se tiene las siguientes observaciones:

1. La forma de escribir

   $3\times3\times3\times3\times3\times3$

   se puede abreviar de la siguiente manera:

   $3^6=729$

   donde

   - 3 es la base de la potencia; es el factor que se repite.
   - 6 es el exponente de la potencia e indica el número de veces que se repite la base como factor.
   - 729 es la potencia perfecta de grado 6; es el resultado de multiplicar la base tantas veces como lo indica el exponente.

2. Además, 3^6 se lee:
   - tres elevado a la sexta
   - tres elevado al exponente seis
   - sexta potencia de tres

En general, se puede señalar que

$$P=\underbrace{b\times b\times b\ldots b}_{n \text{ veces}}$$

se representa como

$$\boxed{P=b^n}\ ;\ n\in\mathbb{Z}^+ \text{ y } b\in\mathbb{Z}^+$$

donde

- b: base de la potencia
- n: exponente de la potencia
- P: potencia perfecta de grado n

Ejemplos

- $49=7\times7=7^2$

  Es decir, 49 es potencia perfecta de grado 2.

- $32=2\times2\times2\times2\times2=2^5$

  Es decir, 32 es potencia perfecta de grado 5.

- $1024=$
  - $32\times32=32^2$
  - $4\times4\times4\times4\times4=4^5$
  - $2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2\times2=2^{10}$

  Se puede afirmar que 1024 es una potencia perfecta de grados 2; 5 y 10.

2 TEOREMA FUNDAMENTAL DE LA POTENCIACIÓN

Si cada uno de los exponentes de las bases, que son números primos de la descomposición canónica de un número entero positivo, son múltiplos de n, entonces dicho número es una potencia perfecta de grado n.

Es decir, dada la descomposición canónica de P

$$P=a^{n\alpha}\cdot b^{n\beta}\cdot c^{n\gamma} \qquad \text{D.C.}$$

observamos que los exponentes de a, b y c son múltiplos de n, entonces podemos escribir

$$P=\left(a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\right)^n$$

$$P=k^n$$

Por lo tanto, P es una potencia perfecta de grado n.

Aplicación 1

Halle el menor número tal que al sumarle sus 5/7 se obtiene un número que es una potencia perfecta de grado 4. Dé como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución

Sea N el número que nos piden hallar (N debe ser mínimo).

Según dato del problema, tenemos

$$N+\frac{5}{7}N=k^4$$

$$\frac{12}{7}N=k^4$$

$$\frac{2^2\times 3^1}{7}N=k^4$$

Debemos completar los exponentes de 2 y 3 para obtener una potencia perfecta de grado 4, tal que sea mínimo.

En el caso del 7, solo basta que N tenga el factor 7, es decir

$$N=2^2\times 3^3\times 7^1\times p^4$$

donde p: 1; 2; 7; 4; 5; ...

Como N debe ser mínimo,

$\rightarrow\ p=1$

Luego,

$$N=2^2\times 3^3\times 7^1\times 1^4$$
$$N=756$$

Por lo tanto, la suma de cifras es

$$7+5+6=18$$

Aplicación 2

Calcule el menor número que se debe multiplicar a 13 500 para que resulte un número que sea una potencia perfecta de grado 5.

Resolución

Sea N el menor número, tal que

$$13\,500\times N=k^5$$
$$2^2\times 3^3\times 5^3\times N=k^5$$

Para generar potencia perfecta de grado 5, debemos completar los exponentes de 2; 3 y 5.

$\rightarrow\ N=2^3\times 3^2\times 5^2\times p^5$

donde p: 1; 2; 3; 4; ...

Como N es mínimo,

$\rightarrow\ p=1$

Luego,

$$N=2^3\times 3^2\times 5^2$$

$\therefore\ N=1800$

Aplicación 3

Calcule el mayor valor de $a+b+c$ si

$P=4^{\overline{aba}}\times 27^{\overline{bca}}$

es una potencia perfecta de grado 45.

Resolución

Se tiene

$$P=4^{\overline{aba}}\times 27^{\overline{bca}}$$

Descomponemos en forma canónica.

$$P=2^{2\times\overline{aba}}\times 3^{3\times\overline{bca}} \qquad \text{D.C.}$$

Por condición, este número es una potencia perfecta de grado 45.

$\rightarrow\ 2\times\overline{aba}=\overset{\circ}{\overline{45}}$ (I)

$3\times\overline{bca}=\overset{\circ}{\overline{45}}$ (II)

Aplicamos Arquímides en (I).

$$2\times\overline{aba}=\overset{\circ}{\overline{45}}$$

$\rightarrow\ \overline{aba}=\overset{\circ}{\overline{45}}$

Aplicamos criterio de divisibilidad por 5 y 9.

$\rightarrow\ a=5$ y $b=8$

En (II), se tiene que

$$3\times\overline{bca}=\overset{\circ}{\overline{45}}$$

$$\overline{bca}=\overset{\circ}{\overline{15}}$$

Reemplazamos los valores de a y b.

$$\overline{8c5}=\overset{\circ}{15}$$

$$\rightarrow\ 8+c+5=\overset{\circ}{3}$$

$$13+c=\overset{\circ}{3}$$

$$\rightarrow\ c: 2;\ 5;\ 8$$

Nos piden el mayor valor de $a+b+c$.

$$\therefore\ (a+b+c)_{\text{máx}}=5+8+8=21$$

Observación

Todo número que es potencia perfecta de grado n es también potencia perfecta de grados que son divisores de n.

Ejemplo

Si N es potencia perfecta de grado 77, entonces N es potencia perfecta de grados 7 y 11.

3 Potencia perfecta de grado 2 (cuadrado perfecto, k^2)

Un número entero positivo será una potencia perfecta de grado 2 o cuadrado perfecto si los exponentes de las bases de su descomposición canónica son múltiplos de 2 (pares).

Sea

$$P=a^{2\alpha}\cdot b^{2\beta}\cdot c^{2\gamma} \qquad \text{D. C.}$$

$$P=\left(a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\right)^2$$

$$P=k^2$$

cuadrado perfecto

Se puede leer de las siguientes maneras:

- el cuadrado de k
- k al cuadrado
- segunda potencia de k
- k elevado al exponente 2

Ejemplos

- $196=2^2\times7^2=(2\times7)^2=14^2$
- $8100=3^4\times2^2\times5^2=\left(3^2\times2\times5\right)^2=90^2$
- $254\,016=3^4\times2^6\times7^2=\left(3^2\times2^3\times7\right)^2=504^2$

Aplicación 4

Sea

$$w=\overline{abc00}_5-\overline{abc}_5$$

Si w es un cuadrado, indique la suma de los valores de $\overline{abc}_5$.

Resolución

Se tiene que

$$w=\overline{abc00}_5-\overline{abc}_5$$

$$w=\overline{abc}_5\times5^2-\overline{abc}_5$$

$$w=24\times\overline{abc}_5$$

Como $w=k^2$

$$\rightarrow\ 24\times\overline{abc}_5=k^2$$

$$2^3\times3^1\times\overline{abc}_5=k^2$$

Debemos completar los exponentes de 2 y 3 para así obtener un número cuadrado perfecto.

$$\rightarrow\ \overline{abc}_5=2^1\times3^1\times p^2$$

Por propiedad de intervalo de un numeral, se cumple que

$$5^2\leq\overline{abc}_5<5^3$$

$$25\leq6p^2<125$$

$$4{,}26...<p^2<20{,}8...$$

$$\rightarrow\ p: 3;\ 4$$

Si $p=3$,

$$\rightarrow\ \overline{abc}_5=54=204_5$$

Si $p=4$,

$$\rightarrow\ \overline{abc}_5=96=341_5$$

Nos piden la suma de los valores de $\overline{abc}_5$.

$$\therefore\ 204_5+341_5=1100_5$$

Aplicación 5

Indique cuántos términos cuadrados perfectos existen en la siguiente sucesión:

$72\times9;\ 72\times10;\ 72\times11;\ 72\times12;\ ...;\ 72\times1800$

Resolución

Se observa que el término general es de la forma

$t_n=72n$

donde

n: 9; 10; 11; ...; 1800 (*)

Como nos piden los términos cuadrados perfectos, estos tendrán la siguiente forma:

$72n=k^2$

$2^3\times3^2\times n=k^2$

Observamos que debemos completar el exponente de 2 para obtener los términos cuadrados perfectos.

$\rightarrow\ n=2p^2$

A partir de (*) se tiene que

$9\leq n\leq1800$

$9\leq2p^2\leq1800$

$4{,}5\leq p^2\leq900$

$\rightarrow\ p$: 3; 4; 5; 6; ...; 30

Podemos observar que p tiene 28 valores, lo cual quiere decir que n también tendrá 28 valores.

Por lo tanto, en la sucesión hay 28 términos cuadrados perfectos.

Observación

Si un número cuadrado perfecto es múltiplo de un número primo, entonces será múltiplo del cuadrado de dicho número primo.

Ejemplo

Sea A un número cuadrado perfecto.

- Si $A=\overset{\circ}{3}$, $\rightarrow\ A=\overset{\circ}{9}$
- Si $A=\overset{\circ}{7}$, $\rightarrow\ A=\overset{\circ}{\overline{49}}$
- Si $A=\overset{\circ}{\overline{11}}$, $\rightarrow\ A=\overset{\circ}{\overline{121}}$

Aplicación 6

¿Cuántos números de 4 cifras, que sean múltiplos de 11 y de 3, son cuadrados perfectos?

Resolución

Sea $\overline{abcd}$ el número cuadrado perfecto, tal que

- $\overline{abcd}=\overset{\circ}{\overline{11}}$

  $\rightarrow\ \overline{abcd}=\overset{\circ}{\overline{121}}$

- $\overline{abcd}=\overset{\circ}{3}$

  $\rightarrow\ \overline{abcd}=\overset{\circ}{9}$

Luego,

$\overline{abcd}=11^2\times3^2\times p^2$

$\overline{abcd}=1089\times p^2$

Sabemos que

$1000\leq\overline{abcd}<10\,000$

$1000\leq1089p^2<10\,000$

$0{,}9\leq p^3<9{,}2$

$\rightarrow\ p$: 1; 2; 3

Esto nos dice que p toma 3 valores. Por lo tanto, existen 3 números de 4 cifras cuadrados perfectos.

3.1. PROPIEDADES

Propiedad 1

Todo número cuadrado perfecto tiene una cantidad impar de divisores.

Ejemplos

- $100=2^2\times5^2$ D.C. $\rightarrow$ CD(100)=9
- $144=2^4\times3^2$ D.C. $\rightarrow$ CD(144)=15

Demostración

Sea N un número cuadrado perfecto, el cual se expresa canónicamente de la siguiente forma:

$N=p^{2a}\times q^{2b}\times r^{2c}\times...$ D.C.

Entonces

$$CD(N)=\underbrace{(2a+1)}_{\text{impar}}\underbrace{(2b+1)}_{\text{impar}}\underbrace{(2c+1)}_{\text{impar}}...$$

Sabemos que el producto de números impares es impar.

Por lo tanto, CD(N) es impar.

Propiedad 2

Si un número tiene una cantidad impar de divisores, entonces dicho número será cuadrado perfecto.

Ejemplos

- Si $CD(N)=5 \rightarrow N=\underbrace{p^4}_{\text{D.C.}}$ (cuadrado perfecto)
- Si $CD(A)=15 \rightarrow A=\underbrace{p^4\times q^2}_{\text{D.C.}}$ (cuadrado perfecto)

Demostración

Sea N un número cuya cantidad de divisores es impar.

$$CD(N)=\text{impar}$$

Es decir, los factores que dan origen a este resultado deben ser impares.

$$CD(N)=(\text{impar})(\text{impar})(\text{impar})...$$

$$CD(N)=(\underbrace{\text{par}}_{2a}+1)(\underbrace{\text{par}}_{2b}+1)(\underbrace{\text{par}}_{2c}+1)...$$

Entonces

$$N=p^{2a}\times q^{2b}\times r^{2c}\times ... \qquad \text{D.C.}$$

$$N=\left(p^a\times q^b\times r^c\times ...\right)^2$$

$$N=k^2$$

Por lo tanto, N es un número cuadrado perfecto.

Aplicación 7

Sea

$$N=\overline{abc}+4\times\overline{abc}+9\times\overline{abc}+...+100\times\overline{abc}$$

Si N es un número cuya cantidad de divisores es impar, calcule $a+b+c$.

Resolución

Como N tiene un número cuya cantidad de divisores es impar,

$$\rightarrow N=k^2$$

$$1\times\overline{abc}+4\times\overline{abc}+9\times\overline{abc}+...+100\times\overline{abc}=k^2$$

$$\overline{abc}(1+4+9+...+100)=k^2$$

$$\overline{abc}\left(1^2+2^2+3^2+...+10^2\right)=k^2$$

$$\overline{abc}\times\frac{10\times 11\times 21}{6}=k^2$$

$$5\times 11\times 7\times\underbrace{\overline{abc}}_{5\times 11\times 7}=k^2$$

$$\rightarrow \overline{abc}=407$$

$$\therefore\ a+b+c=4+0+7=11$$

4▸ POTENCIA PERFECTA DE GRADO 3 (CUBO PERFECTO, k^3)

Un número entero positivo será una potencia perfecta de grado 3 o cubo perfecto si los exponentes de las bases de su descomposición canónica son múltiplos de 3.

Sea

$$P=a^{3\alpha}\times b^{3\beta}\times c^{3\gamma} \qquad \text{D.C.}$$

$$P=\left(a^{\alpha}\cdot b^{\beta}\cdot c^{\gamma}\right)^3$$

$$P=k^3$$

cubo perfecto

Se puede leer de las siguientes formas:

- el cubo de k
- k al cubo
- tercera potencia de k
- k elevado al exponente 3

Ejemplos

- $216=2^3\times3^3=(2\times3)^3=6^3$
- $8000=2^6\times5^3=(2^2\times5^1)^3=20^3$

Aplicación 8

Si $\overline{abcabc}_8$ es un número cubo perfecto, calcule $a+b+c$.

Resolución

Sea

$$\overline{abcabc}_8=k^3$$

$$\overline{abc}_8\times8^3+\overline{abc}_8=k^3$$

$$\overline{abc}_8(8^3+1)=k^3$$

$$513\times\overline{abc}_8=k^3$$

$$\underbrace{513}_{3^3\times19}\times\overline{abc}_8=k^3$$

Completamos los exponentes para generar un número cubo.

$$\overline{abc}_8=19^2\times p^3$$

$$\overline{abc}_8=361\times p^3$$

Por propiedad de intervalos de un numeral, se cumple que

$$8^2\leq\overline{abc}_8<8^3$$

$$64\leq361p^3<512 \rightarrow p=1$$

$\rightarrow \overline{abc}_8=361$

Convertimos a base 8.

$$\begin{array}{r|l} 361 & 8 \\ \hline 1 & 45 \;|\; 8 \\ & 5 \quad 5 \end{array}$$

Se obtiene que

$$\overline{abc}_8=\overline{551}_8$$

$\rightarrow a=5;\ b=5;\ c=1$

$\therefore\ a+b+c=11$

Aplicación 9

Determine el menor número entero positivo por el cual hay que multiplicar a 216 000 para obtener un número que sea cuadrado y cubo perfecto a la vez.

Resolución

Para que un número sea k^2 y k^3 a la vez, los exponentes de sus factores primos tendrán que ser pares y también múltiplos de 3, es decir, tendrán que ser múltiplos de 6.

Primero veamos lo siguiente:

$$216\,000=6^3\times10^3$$

$$216\,000=(2\times3)^3(2\times5)^3$$

$$216\,000=2^6\times3^3\times5^3 \qquad \text{D.C.}$$

Luego, nos piden N mínimo para

$$2^6\times3^3\times5^3\times N=k^6 \quad \left(\begin{array}{c}\text{potencia perfecta}\\ \text{de grado 6}\end{array}\right)$$

Observamos que N debe tener como mínimo los factores 3^3 y 5^3 para formar la potencia perfecta de grado 6.

Luego,

$$2^6\times3^3\times5^3\times\underbrace{(3^3\times5^3\times p^6)}_{N}=k^6 \quad \left(\begin{array}{c}\text{potencia perfecta}\\ \text{de grado 6}\end{array}\right)$$

Entonces

$$N=3^3\times5^3\times p^6$$

Como el valor de p debe ser mínimo, entonces $p=1$.

Finalmente,

$$N=3^3\times5^3=15^3=3375$$

Por lo tanto, se tendrá que multiplicar a 216 000 por 3375.

Observación

Si un número cubo perfecto es múltiplo de un número primo, entonces será múltiplo del cubo de dicho número primo.

Aplicación 10

Halle un número cubo perfecto par de la forma $\overline{abcdef}$, tal que $a+b+c+d+e+f=\overset{\circ}{3}$; además, $a+c+e=b+d+f$

Resolución

Se tiene que $\overline{abcdef}=k^3$

Como $a+b+c+d+e+f=\overset{\circ}{3}$,

$\rightarrow\ \overline{abcdef}=\overset{\circ}{3}$

Además, como $a+c+e=b+d+f$

$\rightarrow\ \overline{abcdef}=\overset{\circ}{11}$

Y también como $\overline{abcdef}$ es par,

$\rightarrow\ \overline{abcdef}=\overset{\circ}{2}$

Luego, tenemos que

$$\overline{abcdef}=3^3\times 11^3\times 2^3\times p^3$$

$$\overline{abcdef}=287496p^3$$

Se observa que p toma solo el valor de 1.

Por lo tanto, el número buscado es

$$\overline{abcdef}=287\,496$$

Observación

Si un número entero positivo es cuadrado perfecto y a la vez cubo perfecto, entonces dicho número es una potencia perfecta de grado 6. La recíproca también se cumple, es decir, si un número es una potencia perfecta de grado 6, entonces dicho número es cuadrado perfecto y cubo perfecto.

Ejemplo

Sea

$$64=\begin{cases}8^2 \text{ (cuadrado)}\\ 4^3 \text{ (cubo)}\end{cases}$$

$\rightarrow\ 64=2^6$ (potencia perfecta de grado 6)

Aplicación 11

¿Cuántos números enteros positivos existen que sean menores que 10 000 y que al disminuir en una unidad resulten números cuadrados perfectos y también cubos perfectos?

Resolución

Sea N un número ($N<10000$), tal que $N-1=k^2$ y $N-1=p^3$.

Entonces

$N-1=x^6$ (potencia perfecta de grado 6)

$N=x^6+1$

Se tiene que

$x^6+1<10\,000$

$x^6<9999$

$x^3<99{,}99$

Se observa que los valores para x son 1; 2; 3 y 4; es decir, x toma 4 valores.

Por lo tanto, existen 4 números que cumplen tal condición.

5 ▸ CRITERIOS DE INCLUSIÓN Y EXCLUSIÓN PARA CUADRADOS Y CUBOS PERFECTOS

Estos criterios, que son válidos en el sistema decimal, son un conjunto de reglas que nos permitirán descartar la posibilidad de que un número no sea un cuadrado o cubo perfecto; otras de estas reglas nos permitirán saber qué condiciones deben cumplir las cifras de un número para que dicho número sea cuadrado o cubo perfecto.

5.1. SEGÚN SU ÚLTIMA CIFRA

Analizando la última cifra de un número, podemos saber si dicho número puede o no ser un cuadrado o cubo perfecto. En la tabla mostrada analizaremos este criterio.

k	...0	...1	...2	...3	...4	...5	...6	...7	...8	...9
k^2	...0	...1	...4	...9	...6	...5	...6	...9	...4	...1
k^3	...0	...1	...8	...7	...4	...5	...6	...3	...2	...9

Conclusiones

1. Si un número termina en las cifras 2; 3; 7 u 8, no tiene posibilidad de ser un número cuadrado perfecto; en los demás casos, el número tendrá la posibilidad de ser un cuadrado perfecto. Es decir,

$$\text{Si } \overline{abcde}=k^2 \rightarrow e\neq 2;\ 3;\ 7;\ 8$$

Ejemplos

Los números $\overline{abc7}$; $\overline{mnp2}$; $\overline{xyz8}$; $\overline{cdef3}$ no tienen la posibilidad de ser un cuadrado perfecto.

2. Un número cubo perfecto puede terminar en cualquier cifra. Es decir,

$$\text{Si } \overline{abcde}=k^3 \rightarrow e\in\{0;\ 1;\ 2;\ 3;\ \ldots;\ 9\}$$

Ejemplos

Los números $\overline{abc1}$; $\overline{mn9}$; $\overline{xyz8}$ tienen la posibilidad de ser cubos perfectos.

5.2. POR TERMINACIÓN EN CIFRAS CEROS

5.2.1. Para cuadrados perfectos

Si $\overline{ab\ldots d\underbrace{00\ldots00}_{m\text{ cifras}}}=k^2$

entonces se cumple que:

$$m=\overset{\circ}{2} \wedge \overline{ab\ldots d}=p^2$$

Ejemplos

- Como 3 610 000 termina en 4 ceros y $361=19^2$, entonces 3 610 000 es un cuadrado perfecto.
- Como 865 000 000 termina en 6 ceros, pero $865\neq k^2$, entonces 865 000 000 no es cuadrado perfecto.

Aplicación 12

Calcule $a+b+c$ si el numeral $\overline{a(a+1)6b0c0}$ es un cuadrado perfecto.

Resolución

Se tiene que $\overline{a(a+1)6b0c0}=k^2$

Entonces la cantidad de ceros debe ser par, es decir, $c=0$ y $b=0$.

Además,

$\overline{a(a+1)6}=p^2$

$196=14^2$ No cumple

$576=24^2$ No cumple

$256=16^2$ No cumple

$676=26^2$ Sí cumple

$\rightarrow\ a=6$

$\therefore\ a+b+c=6+0+0=6$

Aplicación 13

Si $N=\overline{60abc0}$ tiene una cantidad impar de divisores, además, es $\overset{\circ}{3}$ y $\overset{\circ}{\overline{13}}$, determine el valor de $a+b+c$.

Resolución

Como N tiene una cantidad impar de divisores, N será un cuadrado perfecto.

Luego,

$N=\overline{60abc0}=K^2$ (termina en cero)

De ahí que $c=0$

Además, a y b no pueden ser ceros porque N tendría una cantidad impar de ceros.

También se cumple que

$\overline{60ab}=p^2$ (cuadrado perfecto)

Por dato, N es $\overset{\circ}{3}$ y, por ser cuadrado, será también $\overset{\circ}{\overline{3^2}}$

Además, N es $\overset{\circ}{\overline{13}}$ y, por ser cuadrado, también N será $\overset{\circ}{\overline{13^2}}$.

Así tendremos lo siguiente:

$$\overline{60ab00}=3^2\times13^2\times10^2\times q^2 \quad \text{(cuadrado perfecto)}$$

Al eliminar dos ceros del numeral con el 10^2, se tiene que

$$\overline{60ab}=3^2\times13^2\times q^2$$

$$\overline{60ab}=1521\times \underset{\substack{\downarrow \\ 2^2}}{q^2}$$

$$\overline{60ab}=6084$$

$\rightarrow\ a=8;\ b=4;\ c=0$

$\therefore\ a+b+c=12$

5.2.2. Para cubos perfectos

Si $\overline{ab...e\underbrace{000...0}_{m\ \text{ceros}}}=k^3$

entonces se cumple que

$$m=\overset{\circ}{3}\ \wedge\ \overline{ab...e}=p^3$$

Ejemplos

- El número 64 000 000 termina en 6 ceros y $64=4^3$, entonces 64 000 000 es un cubo perfecto.
- El número 729 000 termina en 3 ceros y $729=3^3$, entonces 729 000 es un cubo perfecto.
- El número 451 000 000 termina en 6 ceros, pero $451\neq p^3$, entonces 451 000 000 no es un cubo perfecto.

Aplicación 14

Si $\overline{mnpqr00}$ es un cubo perfecto, además es $\overset{\circ}{3}$ y $\overset{\circ}{7}$, calcule $m+n+p+q+r$.

Resolución

Por condición del problema

$$\overline{mnpqr00}=k^3 \quad \text{(termina en ceros)}$$

Como la cantidad de ceros debe ser $\overset{\circ}{3}$.

$\rightarrow\ r=0$

Así tendremos que

$$\overline{mnpq000}=k^3$$

Por dato, sabemos que este número es $\overset{\circ}{3}$ y, por ser k^3, será también $\overset{\circ}{\overline{3^3}}$.

Además, el número es $\overset{\circ}{7}$ y, por ser k^3, será también $\overset{\circ}{\overline{7^3}}$.

Luego,

$$\overline{mnpq000}=3^3\times7^3\times10^3\times t^3$$

$$\overline{mnpq}=3^3\times7^3\times t^3$$

$$\overline{mnpq}=9261\times \underset{\substack{\downarrow \\ 1^3}}{t^3}$$

$$\overline{mnpq}=9261$$

$\therefore\ m+n+p+q+r=18$

Aplicación 15

Calcule $a+b+c$ si $\overline{abbac00}$ es cubo perfecto.

Resolución

Como $\overline{abbac00}=k^3$, entonces $c=0$ y se cumple que $\overline{abba}=p^3$.

Se observa que $p^3=\overset{\circ}{\overline{11}}$.

$\rightarrow\ p=\overset{\circ}{\overline{11}}$

Luego,

$$\overline{abba}=11^3$$

$$\overline{abba}=1331$$

$\rightarrow\ a=1;\ b=3$

$\therefore\ a+b+c=1+3+0=4$

5.3. POR SU TERMINACIÓN EN LA CIFRA 5

5.3.1. Para cuadrados perfectos

Si $\overline{abcde5}=k^2=\overline{mn5}^2$

entonces se cumple que

$$e=2;\ d=0;\ 2;\ 6$$

Además, $\overline{abcd}=\overline{mn}(\overline{mn}+1)$.

Ejemplos

- $65^2=\underbrace{42}_{6\times7}25$
- $125^2=\underbrace{156}_{12\times13}25$

Aplicación 16

Si se cumple que $\overline{3b5}^2=\overline{13mnnc}$, determine $b+m+n+c$

Resolución

Se tiene por dato

$$\overline{3b5}^2=\overline{13mnnc}$$

Luego, se deduce que $c=5$ y $n=2$.

$\rightarrow\ \overline{3b5}^2=\overline{13m225}$

Además, sabemos que

$$\underbrace{\overline{3b}}\underbrace{(\overline{3b}+1)}=\overline{13m2}$$

31×32 No cumple

33×34 No cumple

$36\times37=1332\ \rightarrow\ b=6\ \wedge\ m=2$

$\therefore\ b+m+n+c=6+2+2+5=15$

Aplicación 17

Si el numeral $\overline{2abc5}$ tiene una cantidad par de divisores propios, determine el mayor valor de $a+b+c$.

Resolución

Como el numeral $N=\overline{2abc5}$ tiene una cantidad par de divisores propios, entonces

$$\mathrm{CD}(N)=\underbrace{\mathrm{CD}_{\text{propios}}}_{\text{par}}+1$$

$$\mathrm{CD}(N)=\text{impar}$$

Si N tiene una cantidad impar de divisores, significará que N es un cuadrado perfecto.

Entonces la cifra de las decenas debe ser 2 ($c=2$), ya que el número es un cuadrado y termina en 5.

$$\overline{2ab25}=k^2$$

También

$$\overline{2ab}=n(n+1)\quad\text{(producto de dos consecutivos)}$$

Ahora veamos los posibles valores de $\overline{2ab}$.

$$\overline{2ab}=\begin{cases}14\times15=210\\15\times16=240\\16\times17=272\end{cases}$$

$\rightarrow\ \overline{2ab}\in\{210;\ 240;\ 272\}$

Finalmente,

$a+b\in\{1;\ 4;\ 9\}$ y como $c=2$

$\rightarrow\ a+b+c\in\{3;\ 6;\ 11\}$

$\therefore\ (a+b+c)_{\text{máx}}=11$

Aplicación 18

Si se cumple que $\overline{a(b+1)5}^2=\overline{(c+1)b0cd}$, calcule $a+b\times c+d$.

Resolución

En el dato

$$\overline{a(b+1)5}^2=\overline{(c+1)b0\underset{2}{c}\underset{5}{d}}$$

Reemplazamos los valores de c y d.

$$\overline{a(b+1)5}^2=\overline{3b025}$$

Luego, como $\overline{a(b+1)}$ por su consecutivo termina en cero,

$\rightarrow\ (b+1)$: 4; 5; 9

Así tendremos que

$$\overline{3b0}=\begin{cases}330 & \text{No es producto de dos consecutivos}\\340 & \text{No es producto de dos consecutivos}\\380=19\times20\end{cases}$$

De ahí

$$\overline{a(b+1)5}^2=38025=(195)^2$$

$\rightarrow\ a=1;\ b=8;\ c=2;\ d=5$

Finalmente, nos piden

$$a+b\times c+d=1+8\times2+5$$

$\therefore\ a+b\times c+d=22$

5.3.2. Para cubos perfectos

Sea $\overline{abcde5}=k^3=(\overline{m5})^3$

Entonces se cumple lo siguiente:

- Si m es par $\rightarrow$ $e=2$
- Si m es impar $\rightarrow$ $e=7$

Aplicación 19

Si $\overline{(m+n)pp(m-2)5}=\overline{mn}^3$, calcule $m+n+2p$.

Resolución

Como

$$\overline{mn}^3=\overline{(m+n)pp(m-2)5}$$

$\rightarrow$ $n=5$

Reemplazamos.

$$\overline{m5}^3=\overline{(m+5)pp(m-2)5} \qquad (*)$$

Se observa que

$$m+5\leq 9 \rightarrow m\leq 4$$

Además, de (*) obtenemos que

$$m-2=2 \quad \vee \quad m-2=7$$
$$m=4 \quad \vee \quad m=9$$

Como

$$m\leq 4 \rightarrow m=4$$

Reemplazamos en (*).

$$45^3=\overline{9pp25}=91\,125 \rightarrow p=1$$

En resumen,

$$m=4;\ n=5;\ p=1$$

$\therefore$ $m+n+2p=11$

5.4. POR CRITERIOS DE DIVISIBLIDAD

5.4.1. Divisibilidad por 4

Recordemos que, al dividir un número entre 4, tendremos como posibilidades que no haya residuo o que el residuo sea 1; 2 o 3 (el residuo es menor que el divisor).

Ahora procedemos a analizar los cuadrados y cubos de un número con respecto al módulo 4.

N	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}+2$	$\overset{\circ}{4}+3$
N^2	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$
N^3	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}+1$	$\overset{\circ}{4}$	$\overset{\circ}{4}-1$

En resumen,

Si $\overline{abcde}=k^2 \rightarrow \overline{de}=\overset{\circ}{4}$ o $\overset{\circ}{4}+1$

Si $\overline{mnpqr}=k^3 \rightarrow \overline{qr}=\overset{\circ}{4}-1$ o $\overset{\circ}{4}$ o $\overset{\circ}{4}+1$

Aplicación 20

Calcule a si $\overline{1aaa}$ es un cuadrado perfecto.

Resolución

Como $\overline{1aaa}=k^2$, entonces la potencia solo puede terminar en 0; 1; 4; 5; 6 o 9.

Ahora, en el caso de que a sea cero, se obtendría 1000, que no es un cuadrado perfecto, ya que termina en cantidad impar de cifras cero.

El resto de casos los analizaremos por criterio de divisibilidad por 4.

$\overline{1aaa}$

$1\ 1=\overset{\circ}{4}+3$	No puede ser k^2
$4\ 4=\overset{\circ}{4}$	Sí puede ser k^2
$5\ 5=\overset{\circ}{4}+3$	No puede ser k^2
$6\ 6=\overset{\circ}{4}+2$	No puede ser k^2
$9\ 9=\overset{\circ}{4}+3$	No puede ser k^2

Observamos que solo puede ser k^2 en el caso de que a sea 4.

Al comprobar obtenemos que

$$1444=(38)^2$$

$\therefore$ $a=4$

5.4.2. Divisibilidad por 9

Recordemos que, al dividir un número entre 9, tendremos la posibilidad de que no haya residuo o, en el caso de que haya residuo, este podría ser 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7 o 8 (el residuo es menor que el divisor).

Procederemos a analizar los cuadrados y los cubos de un número con respecto del módulo 9.

N	N^2	N^3
$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$
$\overset{\circ}{9}+1$	$\overset{\circ}{9}+1$	$\overset{\circ}{9}+1$
$\overset{\circ}{9}+2$	$\overset{\circ}{9}+4$	$\overset{\circ}{9}-1$
$\overset{\circ}{9}+3$	$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$
$\overset{\circ}{9}+4$	$\overset{\circ}{9}+7$	$\overset{\circ}{9}+1$
$\overset{\circ}{9}+5$	$\overset{\circ}{9}+7$	$\overset{\circ}{9}-1$
$\overset{\circ}{9}+6$	$\overset{\circ}{9}$	$\overset{\circ}{9}$
$\overset{\circ}{9}+7$	$\overset{\circ}{9}+4$	$\overset{\circ}{9}+1$
$\overset{\circ}{9}+8$	$\overset{\circ}{9}+1$	$\overset{\circ}{9}-1$

En resumen,

- Un cuadrado perfecto puede ser $\overset{\circ}{9}$; $\overset{\circ}{9}+1$; $\overset{\circ}{9}+4$ o $\overset{\circ}{9}+7$
- Un cubo perfecto puede ser $\overset{\circ}{9}-1$; $\overset{\circ}{9}$ o $\overset{\circ}{9}+1$

Aplicación 21

Si $\overline{abcd}=m^2$ y $\overline{cdba}=n^3$, determine el valor de $a+b+c+d$.

Resolución

Observamos que ambos numerales tienen las mismas cifras; por consiguiente, la suma de sus cifras es la misma. Esto nos hace pensar que nos ayudaría aplicar el criterio por 9 para el caso de un cuadrado y cubo perfecto.

Para $\overline{abcd}=m^2$ aplicamos criterio por 9 para un k^2.

$$\underbrace{a+b+c+d}_{\text{suma de cifras}}\begin{cases}\overset{\circ}{9}\\ \overset{\circ}{9}+1\\ \overset{\circ}{9}+4 & \text{No cumple}\\ \overset{\circ}{9}+7 & \text{No cumple}\end{cases}$$

Para $\overline{cdba}=n^3$ aplicamos criterio por 9 para un k^3.

$$\underbrace{a+b+c+d}_{\text{suma de cifras}}\begin{cases}\overset{\circ}{9}-1 & \text{No cumple}\\ \overset{\circ}{9}\\ \overset{\circ}{9}+1\end{cases}$$

De lo anterior, como la suma de cifras debe ser la misma, observamos que coinciden para $\overset{\circ}{9}$ o $\overset{\circ}{9}+1$. Por ello, eliminamos el resto de casos.

Ahora trabajemos con el cubo perfecto, ya que esto nos permitirá analizar una menor cantidad de posibilidades.

Como

$$n^3=\overline{cdba};\ \boxed{a\neq 0}$$ ← Es primera cifra en el otro número

$\rightarrow\ 1000\leq n^3\leq 9999$

Tengamos en cuenta que

- $20^3=8000$
- $21^3=9261$
- $22^3=10\,648$

Luego,

$$10 \leq n \leq 21$$

Además,

$$n^3=\overset{\circ}{9} \quad \vee \quad n^3=\overset{\circ}{9}+1$$

De la tabla inicial tenemos lo siguiente:

- Si $n^3=\overset{\circ}{9}$

  $\rightarrow$ n: $\overset{\circ}{9}$; $\overset{\circ}{9}+3$; $\overset{\circ}{9}+6$

- Si $n^3=\overset{\circ}{9}+1$

  $\rightarrow$ n: $\overset{\circ}{9}+1$; $\overset{\circ}{9}+4$; $\overset{\circ}{9}+7$

En el intervalo de 10 hasta 21, veamos qué números reúnen las condiciones anteriores.

n	$n^3=\overline{cdba}$	$m^2=\overline{abcd}$
$\overset{\circ}{9}+3=12$	$12^3=1728$	$8217 \rightarrow$ No es m^2
$\overset{\circ}{9}+4=13$	$13^3=2197$	$7921=89^2$
$\overset{\circ}{9}+6=15$	$15^3=3375$	$5733 \rightarrow$ No es m^2
$\overset{\circ}{9}+7=16$	$16^3=4096$	$6940 \rightarrow$ No es m^2
$\overset{\circ}{9}=18$	$18^3=5832$	$2358 \rightarrow$ No es m^2
$\overset{\circ}{9}+1=19$	$19^3=6859$	$9568 \rightarrow$ No es m^2
$\overset{\circ}{9}+3=21$	$21^3=9261$	$1692 \rightarrow$ No es m^2

Observamos que en esta tabla los números cuadrados rápidamente se han descartado por su última cifra.

Luego, se observa que

$$7921=89^2$$

Entonces

$$89^2=7921 \quad \wedge \quad 13^3=2197$$

En resumen,

$$a=7;\ b=9;\ c=2;\ d=1$$

$$\therefore\ a+b+c+d=19$$

Consideraciones finales

1. Si $\overline{abcdef}=k^2$, entonces podemos saber cuántas cifras tiene la base; para ello se separa el número en bloques de dos cifras de derecha a izquierda. La cantidad de bloques que se forman es la cantidad de cifras que tiene k, es decir, $k=\overline{mnp}$. Además, la primera cifra de la base al cuadrado debe siempre aproximarse al primer bloque; es decir, m^2 se aproxima a $\overline{ab}$.

   Ejemplo

   Si $\overline{7ab1}=k^2 \rightarrow k=\overline{mn}$

   donde m^2 se aproxima a $\overline{7a}$.

   $\rightarrow m=9$

   Además

   $$n^2=...1 \rightarrow n=\begin{cases} ...1 \\ ...9 \end{cases}$$

   Finalmente, se tiene dos posibilidades:

   - $81^2=6561$ No es la solución
   - $89^2=7921$ Sí es la solución

2. Si $\overline{abcdef}=k^3$, entonces podemos saber cuántas cifras tiene la base; para ello se separa el número en bloques de tres cifras, de derecha a izquierda. La cantidad de bloques nos indica la cantidad de cifras que tendrá la base (k), es decir, $k=\overline{mn}$. Además, la primera cifra de la base al cubo debe siempre aproximarse al primer bloque; es decir, m^2 se aproxima a $\overline{abc}$.

   Ejemplo

   Si $\overline{18bcd3}=k^3 \rightarrow k=\overline{mn}$

   donde m^3 debe aproximarse a $\overline{18b}$.

   $\rightarrow m=5$

   Además,

   $$n^3=...3 \rightarrow n=7$$

   Finalmente, se tiene que

   $$\overline{18bcd3}=57^3=189\ 193$$

RADICACIÓN EN LOS NÚMEROS ENTEROS POSITIVOS

1 DEFINICIÓN

En la potenciación, el exponente indicaba la cantidad de veces que se debe multiplicar la base para obtener un número llamado potencia. Por otro lado, el objetivo de estudiar la radicación es calcular la base conociendo la potencia y el exponente.

Veamos el siguiente caso:

$x^4=625$

Para calcular x debemos buscar un número que al ser multiplicado 4 veces por sí mismo resulte 625. La respuesta es 5, pero podemos introducir una nueva operación utilizando un nuevo símbolo: el radical $\sqrt[4]{}$.

$\rightarrow x=\sqrt[4]{625}=5$

donde

- 4 es el índice.
- 625 es el radicando.
- 5 es la raíz cuarta.

Por lo tanto, la radicación es la operación inversa de la potenciación.

En general, si se tiene que

$p=b^n$

entonces

$$\boxed{\sqrt[n]{p}=b}\ ;n\in\mathbb{Z}^+\ (n\geq 2);\ b\in\mathbb{Z}^+$$

donde

- n: índice
- p: radicando
- b: raíz enésima

Nota

Cuando el índice es 2, no es necesario escribir dicho índice.

$\sqrt[2]{}=\sqrt{}$

Ejemplos

- $11^2=121 \rightarrow 11=\sqrt{121}$ Se dice que la raíz cuadrada de 121 es 11.
- $8^3=512 \rightarrow 8=\sqrt[3]{512}$ Se dice que la raíz cúbica de 512 es 8.
- $2^6=64 \rightarrow 2=\sqrt[6]{64}$ Se dice que la raíz sexta de 64 es 2.

Observación

Toda potencia perfecta de grado n tiene una raíz enésima exacta.

2 RAÍZ CUADRADA ENTERA ($\sqrt{}$)

En esta parte estudiaremos la raíz cuadrada de un número y veremos las propiedades de los residuos de la raíz cuadrada inexacta.

Esquema

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & K \\ \hline R & \end{array}\ ;\ 0\leq R\leq 2K$$

donde

- N: radicando
- K: raíz cuadrada
- R: residuo

} términos de la raíz cuadrada

Ejemplos

- $\begin{array}{l|l} \sqrt{81} & 9 \\ \hline 0 & \end{array}$
- $\begin{array}{l|l} \sqrt{27} & 5 \\ \hline 2 & \end{array}$

Se puede observar que hay dos clases de raíz cuadrada: exacta e inexacta.

2.1. RAÍZ CUADRADA EXACTA

Un número entero positivo tendrá una raíz cuadrada exacta cuando su residuo es nulo.

Ejemplo

$\begin{array}{l|l} \sqrt{121} & 11 \\ \hline 0 & \end{array} \rightarrow 121=11^2$

En general,

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{N} & K \\ \hline 0 & \end{array} \rightarrow N=K^2$$

> **Nota**
> Todo número cuadrado perfecto tiene raíz cuadrada exacta.

Aplicación 1

Si al calcular la raíz cuadrada del numeral par $\overline{8x0y}$ $(x\neq 0)$, se obtuvo un residuo nulo, calcule la suma de valores de $x+y$.

Resolución

Se tiene que

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{\overline{8x0y}} & K \\ 0 & \end{array} \text{ ; donde } y \text{ debe ser par.}$$

$\rightarrow\ \overline{8x0y}=k^2 \ \rightarrow\ y$: 0; 4; 6

Es decir,

$$\overline{8x0y}=(\overline{mn})^2$$

Se tiene que m^2 debe aproximarse a $\overline{8x}$

$\rightarrow\ m=9$

Como y: 0; 4; 6 $\rightarrow$ n: 0; 2; 4; 6

Entonces tenemos

$90^2=8100 \ \rightarrow\ x=1;\ y=0 \ \rightarrow\ x+y=1$

$92^2=8464 \ \rightarrow\ x=4;\ y=4 \ \rightarrow\ x+y=8$

$94^2=8836 \ \rightarrow\ x=8;\ y=6 \ \rightarrow\ x+y=14$

$96^2=9216$ No es solución

Por lo tanto, la suma de valores de $x+y$ es

$1+8+14=23$

2.2. RAÍZ CUADRADA INEXACTA

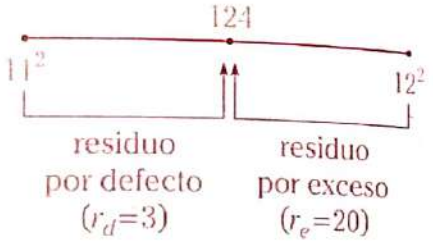
Un número entero positivo tendrá una raíz cuadrada inexacta cuando su residuo sea diferente de cero.

Analicemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{124} & \text{raíz} \\ r\neq 0 & \end{array}$$

Tenga en cuenta que todo número que no tenga una raíz cuadrada exacta siempre estará comprendido entre dos números cuadrados perfectos consecutivos.

Es decir que 124 está comprendido entre dos números cuadrados perfectos consecutivos.



donde

- 11 es la raíz por defecto.
- 12 es la raíz por exceso.

Lo anterior podemos sistematizarlo en el siguiente cuadro:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} \sqrt{124} & 11 \\ 3 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \sqrt{124} & 12 \\ 20 & \end{array}$
Se tiene que $124=11^2+3$	Se tiene que $124=12^2-20$

En general, para $N\in\mathbb{Z}^+$, se cumple lo siguiente:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} \sqrt{N} & k \\ r_d & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \sqrt{N} & k+1 \\ r_e & \end{array}$
donde $\boxed{N=k^2+r_d}$	donde $\boxed{N=(k+1)^2-r_e}$

Observaciones

1. Se tiene que

$$k^2+r_d=(k+1)^2-r_e$$

$$\rightarrow\ \boxed{r_d+r_e=2k+1}$$

2. Para que la raíz cuadrada sea inexacta, el residuo mínimo debe ser 1 y el residuo máximo debe ser $2k$.
3. Cuando extraemos la raíz cuadrada de un número, lo más común es hacerlo por defecto.

Aplicación 2

Al calcular la raíz cuadrada de un número, se tiene que la suma de sus residuos (por defecto y por exceso) es 75, y el residuo por defecto excede en 11 unidades al residuo por exceso. Calcule la suma de cifras de dicho número.

Resolución

Sea N el número.

Se tiene lo siguiente:

Raíz por defecto	Raíz por exceso
$\sqrt{N}$ | k r_d	$\sqrt{N}$ | $k+1$ r_e

Por dato tenemos que

$$\begin{array}{r} r_d+r_e=75 \\ r_d-r_e=11 \\ \hline 2r_d=86 \end{array} \quad (+)$$

$\rightarrow r_d=43 \ \wedge \ r_e=32$

Sabemos que

$r_d+r_e=2k+1$ (k: raíz por defecto)

$75=2k+1$

$37=k$

Luego, tenemos

$N=k^2+r_d$

$N=37^2+43$

$N=1412$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es

$1+4+1+2=8$

Aplicación 3

Al extraer la raíz cuadrada de un número, se obtuvo 52 de residuo. Si se le suma 1000 unidades al radicando, su raíz aumenta en 2 y su residuo se hace máximo. Halle la raíz del número original.

Resolución

Sea N el número original.

Según los datos tenemos

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & K \\ 52 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{N+1000} & K+2 \\ \underbrace{2(K+2)}_{\text{residuo máximo}} & \end{array}$$

De ahí se obtiene que

- $N=K^2+52$
- $N+1000=(K+2)^2+2(K+2)$

Ordenamos y restamos.

$$\begin{array}{r} N+1000=K^2+6K+8 \\ N=K^2+52 \\ \hline 1000=6K-44 \end{array} \quad (-)$$

Operamos.

$1000=6K-44$

$1044=6K$

$\therefore \ K=174$

Aplicación 4

Los residuos por defecto y por exceso, al extraer la raíz cuadrada de un número, son proporcionales a 5 y 2, respectivamente. Si la suma de las raíces por defecto y por exceso es 21, calcule la suma de cifras del número.

Resolución

Del enunciado podemos observar lo siguiente:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & K \\ \underbrace{5n}_{r_d} & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} \sqrt{N} & K+1 \\ \underbrace{2n}_{r_e} & \end{array}$$

Por propiedad sabemos que

$r_d+r_e=2K+1$

Esto coincide con la suma de las raíces por defecto y exceso. ($2K+1=21$)

$\rightarrow \ r_d+r_e=21$

$5n+2n=21$

$7n=21 \ \rightarrow \ n=3$

También

$r_d+r_e=21$

$2K+1=21$

$2K=20$

$\rightarrow K=10$ (raíz por defecto)

Reemplazamos.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & 10 \\ \hline 15 & \end{array}$$

$N=10^2+15=115$

$\therefore$ suma de cifras de $N=1+1+5=7$

Observación

En muchos casos, al extraer la raíz cuadrada de un número, vamos a obtener un residuo máximo ($r_{máx}=2k$); en este caso, si sumamos una unidad al radicando se obtendrá un número cuadrado perfecto.

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & k \\ \hline r_{máx} & \end{array} \rightarrow N+1=(k+1)^2$$

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{99} & 9 \\ \hline 18 & \end{array} \rightarrow 99+1=10^2$$

Aplicación 5

Al extraer la raíz cuadrada de un número, se obtuvo residuo máximo, pero si a ese número se le suma 36, su raíz aumentaría en 2 unidades y su residuo seguiría siendo máximo. Calcule dicho número inicial.

Resolución

Sea N el número inicial.

Se tiene

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & k \\ \hline r_{máx} & \end{array} \rightarrow N+1=(k+1)^2 \qquad \text{(I)}$$

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N+36} & k+2 \\ \hline r_{máx} & \end{array} \rightarrow N+37=(k+3)^2 \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

$(k+1)^2-1+37=(k+3)^2$

$36=(k+3)^2-(k+1)^2$ diferencia de cuadrados

$36=2(2k+4)$

$\rightarrow k=7$

Reemplazamos en (I).

$N+1=(7+1)^2$

$N+1=64$

$N=63$

Por lo tanto, el número original es 63.

Aplicación 6

Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{6abc4}$, se obtuvo residuo máximo. Halle $a+b+c$ si a es una cifra significativa.

Resolución

Como el número deja residuo máximo al extraerle su raíz cuadrada, si le agregamos una unidad se convertirá en un cuadrado perfecto.

Así tendremos

$$\overline{6abc4}+1=\underset{\substack{\downarrow \\ 2}}{\overline{6abc5}}=k^2$$

Por criterio de los cuadrados perfectos que terminan en 5,

$c=2$

Ahora, también se debe cumplir que

$$\overline{6ab}=\underset{\downarrow}{n}\underbrace{(n+1)} \quad \text{(producto de dos consecutivos)}$$

$24\times 25=600$ No cumple $(a\neq 0)$

$25\times 26=650$ Sí cumple

$26\times 27=702$ No cumple $(a\neq 0)$

De ahí que

$a=5$ y $b=0$

$\therefore a+b+c=7$

2.3. REGLA PARA EXTRAER LA RAÍZ CUADRADA DE UN NÚMERO

Para hallar la raíz cuadrada entera de un número mayor que 100, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1

Se divide el número en bloques de dos cifras empezando por la derecha.

Paso 2

Se halla la raíz cuadrada entera del primer bloque, que tendrá una o dos cifras, y esta será la primera cifra de la raíz.

Paso 3

Se resta mentalmente al primer bloque el cuadrado de la primera cifra de la raíz; a la derecha de la diferencia obtenida se baja el siguiente bloque.

Paso 4

El número obtenido en el paso anterior se separa de su última cifra y se divide entre el doble de la primera cifra de la raíz.

Paso 5

El cociente entero obtenido se escribe a la derecha del número que sirvió de divisor, y el número obtenido se multiplica por el referido cociente entero. Luego este resultado se resta del primer resto seguido del segundo bloque.

Paso 6

Si la resta puede efectuarse, la cifra de dicho cociente es buena y será la segunda cifra de la raíz; en cambio, si la resta no puede efectuarse, se rebaja la cifra en una unidad y se somete a análogas comprobaciones hasta obtener la cifra correcta de la raíz.

Paso 7

A la derecha del resto se bajará el bloque siguiente, y así se continúa hasta bajar el último bloque y encontrar la última cifra de la raíz.

Ejemplo

Calculemos la raíz cuadrada del número 55 295 706

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{5\,5\,2\,9\,5\,7\,0\,6} & 7\,4\,3\,6 \\
7^2 = & 4\,9 & \boxed{1\,4}\ \mathbf{4\times 4} \\
 & 6\,2\,9 & 7\times 2 \\
144\times 4 = & 5\,7\,6 & 62\div 14 = 4{,}4 \\
 & 5\,3\,5\,7 & \boxed{1\,4\,8}\ \mathbf{3\times 3} \\
1483\times 3 = & 4\,4\,4\,9 & 74\times 2 \\
 & 9\,0\,8\,0\,6 & 535\div 148 = 3{,}6 \\
14\,866\times 6 = & 8\,9\,1\,9\,6 & \boxed{1\,4\,8\,6}\ \mathbf{6\times 6} \\
 & 1\,6\,1\,0 & 743\times 2 \\
 & & 9080\div 1486 = 6{,}1
\end{array}
$$

Por lo tanto,

$$55\,295\,706 = (7436)^2 + 1610$$

Aplicación 7

En la radicación mostrada, donde cada * representa una cifra cualquiera, determine la suma de cifras del radicando.

$$
\begin{array}{l|l}
\sqrt{1\,*\,*\,*\,*\,*} & *\,*\,* \\
\, & \\
\quad *\,*\,* & \\
\quad 1\,*\,* & \\
\quad\quad *\,*\,*\,* & \\
\quad\quad 5\,*\,*\,9 & \\
\quad\quad\quad 2\,2 &
\end{array}
$$

Resolución

A partir de los pasos anteriores y los principios de la criptoaritmética, obtenemos el siguiente desarrollo:

$$
\begin{array}{rl|l}
 & \sqrt{1\,8\,2\,3\,5\,1} & 4\,2\,7 \\
4^2 = & 1\,6 & 8\,\mathbf{2}\times\mathbf{2} = 164 \\
 & 2\,2\,3 & \\
82\times 2 = & 1\,6\,4 & 8\,4\,\mathbf{7}\times\mathbf{7} = 5929 \\
 & 5\,9\,5\,1 & \\
847\times 7 = & 5\,9\,2\,9 & \\
 & 2\,2 &
\end{array}
$$

Explicación

1. Al elevar la primera cifra de la raíz al cuadrado, esta debe resultar de dos cifras y menor que 20, puesto que la primera cifra del radicando es 1; de ahí que la primera cifra de la raíz es 4.
2. Al duplicar este valor resulta 8, al cual debemos agregar un número a la derecha y multiplicar el número así formado por dicho número que se agregó, siendo el resultado un número de 3 cifras que empieza en 1. Por ello dicho número que se agregó debe ser 2, el cual será la segunda cifra de la raíz.
3. Al duplicar el número, que parcialmente es la raíz, tendremos 84, al cual le agregamos a la derecha 7 y lo multiplicamos por 7, esto nos dará un número de 4 cifras que empieza en 5.
4. A continuación, para hallar los demás valores solo empezaremos a trabajar del residuo final hacia el inicio.
5. Finalmente, se observa que el radicando es 182 351.

Nos piden la suma de cifras del radicando.

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{suma de cifras}\\ \text{del radicando}\end{pmatrix}=1+8+2+3+5+1=20$$

Aplicación 8

Si $\overline{IVAN}^2=\overline{14IVAN64}$, calcule $I+V+A+N$.

Resolución

Por dato, se tiene que

$$\begin{array}{l|l} \sqrt{\overline{14IVAN64}} & \overline{IVAN} \\ \hline 0 & \end{array}$$

de lo cual se deduce que que N puede ser 2 u 8.

Según el esquema, tenemos

$$\begin{array}{rl|l}
 & & \overline{IVAN} \\
 & \sqrt{\overline{14IVAN64}} & 3792 \\ \hline
3^2= & 9 & 67\times 7 \\
 & 5\ 3\ \mathbf{7} & 53\div 6=8{,}8 \\
 & & 68\times 8=544 \text{ No cumple} \\ \hline
67\times 7= & 4\ 6\ 9 & 749\times 9 \\
 & 6\ 8\ \mathbf{9}\ \mathbf{2} & 689\div 74=9{,}1 \\ \hline
749\times 9= & 6\ 7\ 4\ 1 & 7582\times 2 \\
 & 1\ 5\ \mathbf{1}\ 6\ 4 & 7588\times 8=60\,704 \\
7582\times 2= & 1\ 5\ 1\ 6\ 4 & \text{No cumple} \\
 & - - - - - & \\
\end{array}$$

De lo anterior obtenemos que

$I=3;\ V=7;\ A=9;\ N=2$

$\therefore\ I+V+A+N=21$

3 ▸ RAÍZ CÚBICA ENTERA ($\sqrt[3]{\ }$)

En esta parte, estudiaremos la raíz cúbica de un número y veremos las propiedades de los residuos de la raíz cúbica inexacta.

Esquema

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & k \\ \hline R & \end{array}\ ;\ 0\le R\le 3k(k+1)$$

donde

- N: radicando
- k: raíz cúbica
- R: residuo

} términos de la raíz cúbica

Ejemplos

- $\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{64} & 4 \\ \hline 0 & \end{array}$
- $\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{100} & 4 \\ \hline 36 & \end{array}$

Se observa que existen dos clases de raíz cúbica: exacta e inexacta.

3.1. RAÍZ CÚBICA EXACTA

Un número entero positivo tendrá raíz cúbica exacta cuando su residuo sea nulo.

Ejemplo

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{343} & 7 \\ 0 & \end{array} \rightarrow 343=7^3$$

En general,

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & k \\ 0 & \end{array} \rightarrow N=k^3$$

Observación

Todo número cubo perfecto tiene raíz cúbica exacta.

Aplicación 9

Al extraer la raíz cúbica de $\overline{1c8ab}$, se obtuvo $\overline{ab}$ como raíz y también un residuo nulo. Determine el valor de $a\times b\times c$.

Resolución

Se tiene por dato

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{\overline{1c8ab}} & \overline{ab} \\ 0 & \end{array}$$

$\rightarrow \overline{1c8ab}=\overline{ab}^3$

Se observa que

b: 0; 1; 4; 5; 6; 9

Además, a^3 se debe aproximar a $\overline{1c}$.

$\rightarrow a=2$

Luego,

$$\begin{array}{lcl} \overline{1c82b} & = & \overline{2b}^3 \\ \downarrow\downarrow & & \downarrow \\ 20 & & 0 \quad \text{No cumple} \\ 21 & & 1 \quad \text{No cumple} \\ 24 & & 4 \quad \text{Sí cumple} \\ 25 & & 5 \quad \text{No cumple} \\ 26 & & 6 \quad \text{No cumple} \\ 29 & & 9 \quad \text{No cumple} \end{array}$$

$\rightarrow \overline{1c82b}=24^3=13\,824$

Es decir,

$b=4 \ \wedge \ c=3$

Por lo tanto,

$a\times b\times c=2\times 4\times 3=24$

Aplicación 10

Si al extraer la raíz cúbica de $\overline{5abc3}$ se obtuvo n de raíz y un residuo nulo, calcule $a+b+c+n$.

Resolución

Tenemos

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{\overline{5abc3}} & n \\ 0 & \end{array}$$

$\rightarrow \overline{\underbrace{5a}\underbrace{bc3}}=n^3$

(cada bloque determina una cifra en la raíz)

Como el cubo de n termina en 3, significa que n termina en 7 (único caso, que se observó en el criterio de terminación de los cuadrados y cubos).

Luego, tendríamos que

$\overline{\underbrace{5a}\underbrace{bc3}}=(\ldots 7)^3$

Hallar la primera cifra de n será sencillo. Solo debemos considerar un número que elevado al cubo sea menor o igual al primer bloque de la izquierda $(\overline{5a})$, además que esté más cercano a dicho número en ese caso.

$3^3 < \overline{5a} < 4^3$

Deducimos que la primera cifra es 3.

$37^3=\overline{5abc3}$

Operamos.

$37^3=50\,653=\overline{5abc3}$

De ahí que

$a=0;\ b=6;\ c=5;\ n=37$

$\therefore\ a+b+c+n=48$

Aplicación 11

Al extraer la raíz cúbica del numeral $\overline{ababab1}$, se obtuvo un residuo nulo. Calcule $a \times b$.

Resolución

Se tiene que

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{\overline{ababab1}} & k \\ 0 & \end{array}$$

Es decir,

$$\overline{ababab1}=k^3$$

Se observa que

$$k^3=\overline{\overset{\circ}{10}}+1 \rightarrow k=\overline{\overset{\circ}{10}}+1$$

$$k^3=\overset{\circ}{3}+1 \rightarrow k=\overset{\circ}{3}+1$$

$$k^3=\overset{\circ}{7}+1 \rightarrow \underbrace{k=\overset{\circ}{7}+1}_{\substack{k=\overline{\overset{\circ}{210}}+1 \\ k=211}}$$

Luego,

$$\overline{ababab1}=k^3$$

$$\rightarrow 9\,393\,931=211^3$$

Entonces

$$a=9 \wedge b=3$$

$$\therefore \; a \times b=9 \times 3=27$$

3.2. RAÍZ CÚBICA INEXACTA

Un número entero positivo tendrá una raíz cúbica inexacta cuando su residuo sea diferente de cero.

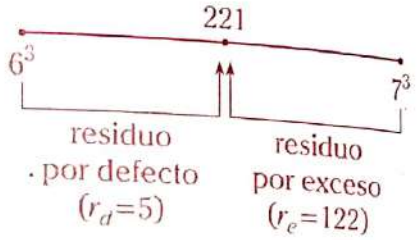
Analicemos el siguiente ejemplo:

$$\begin{array}{r|l} \sqrt[3]{221} & \text{raíz} \\ r \neq 0 & \end{array}$$

Tenga en cuenta que todo número que no tenga una raíz cúbica exacta siempre estará comprendido entre dos números cubos perfectos consecutivos.

Entonces se tiene que el número 221 está comprendido entre dos números cubos perfectos consecutivos.

Es decir



donde

- 6 es la raíz cúbica por defecto.
- 7 es la raíz cúbica por exceso.

Lo anterior lo podemos sistematizar en el siguiente cuadro:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} \sqrt[3]{221} & 6 \\ 5 & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \sqrt[3]{221} & 7 \\ 122 & \end{array}$
Se tiene que $221=6^3+5$	Se tiene que $221=7^3-122$

En general, para $N \in \mathbb{Z}^+$, se cumple lo siguiente:

Por defecto	Por exceso
$\begin{array}{r\|l} \sqrt[3]{N} & k \\ r_d & \end{array}$	$\begin{array}{r\|l} \sqrt[3]{N} & k+1 \\ r_e & \end{array}$
donde $\boxed{N=k^3+r_d}$	donde $\boxed{N=(k+1)^3-r_e}$

Observaciones

1. Se tiene que

$$k^3+r_d=(k+1)^3-r_e$$

$$\rightarrow \boxed{r_d+r_e=3k(k+1)+1}$$

2. Para que la raíz cúbica sea inexacta, el residuo mínimo debe ser 1 y el residuo máximo debe ser $3k(k+1)$.
3. Cuando extraemos la raíz cuadrada de un número, lo más común es hacerlo por defecto.

Aplicación 12

Al extraer la raíz cúbica de un número, se tiene que los residuos por defecto y exceso se encuentran en la relación de 15 a 16; además, suman 217. Halle la suma de cifras del número.

Resolución

Del enunciado del problema tenemos

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & K \\ \underbrace{15n}_{r_d} & \end{array} \qquad \begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & K+1 \\ \underbrace{16n}_{r_e} & \end{array}$$

Además, por dato

$r_d+r_e=217$

$15n+16n=217$

$31n=217$

$n=7$

Luego,

$r_d=15\times(7)=105$

$r_e=16\times(7)=112$

Por propiedad sabemos que

$r_d+r_e=3K(K+1)+1$

$217=3K(K+1)+1$

$216=3K(K+1)$

$72=\underset{\downarrow}{K}\underbrace{(K+1)}_{}$

8×9

$\rightarrow K=8$

Al reconstruir obtenemos

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & 8 \\ \underbrace{105}_{r_d} & \end{array}$$

Luego,

$N=8^3+105$

$N=512+105$

$N=617$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es

$6+1+7=14$

Aplicación 13

Al extraer la raíz cúbica del numeral $\overline{68abc}$, el residuo es $\overline{c4}$. Halle $a+b$.

Resolución

Tengamos presente que

$40^3=64\,000$

$42^3=74\,088$

Del enunciado tenemos

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{\overline{68abc}} & K \\ \overline{c4} & \end{array}$$

$\rightarrow \overline{68abc}=K^3+\overline{c4}$

Por lo anterior, es fácil observar que $K=41$

Luego,

$\overline{68abc}=41^3+\overline{c4}=...1+...4=...5$

$\rightarrow c=5$

Finalmente,

$\overline{68abc}=41^3+54=68\,975$

Además, $a=9$ y $b=7$.

$\therefore\ a+b=16$

Observación

En muchos casos, al extraer la raíz cúbica de un número se obtiene un residuo máximo ($r_{máx}=3k(k+1)$); en este caso, si sumamos una unidad al radicando se obtendrá un número cubo perfecto.

$$\boxed{\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & k \\ r_{máx} & \end{array} \rightarrow N+1=(k+1)^3}$$

Ejemplo

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{124} & 4 \\ 60 & \end{array} \rightarrow 124+1=5^3$$

Aplicación 14

Al extraer la raíz cúbica del numeral $\overline{2abcd4}$, se obtuvo un residuo máximo. Determine el valor de $a+b+c+d$.

Resolución

Se tiene que

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{\overline{2abcd4}} & k \\ \quad r_{\text{máx}} & \end{array}$$

$\rightarrow \overline{2abcd5}=(k+1)^3$

$\overline{2abcd5}=(\overline{m5})^3$

Se observa que m^3 se debe aproximar al bloque $\overline{2ab}$.

$\rightarrow m=6$

Luego,

$\overline{2abcd5}=65^3$

$\overline{2abcd5}=274\,625$

$\rightarrow a=7;\ b=4;\ c=6;\ d=2$

Por lo tanto, el valor de $a+b+c+d$ es

$7+4+6+2=19$

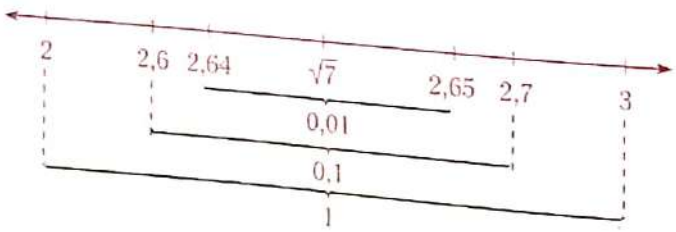
4 ▸ RAÍZ CUADRADA Y CÚBICA CON CIERTA APROXIMACIÓN

4.1. PARA RAÍZ CUADRADA

Extraer la raíz cuadrada es buscar un número que al elevarlo al cuadrado reproduzca el original (radicación exacta), pero a veces esto no se puede, dado que se va obtiene cierto residuo; entonces, se calcula con cierta aproximación.

Ejemplo

$\sqrt{7}=2{,}64575131...$



Del ejemplo, podemos decir lo siguiente:

- Si la diferencia de raíces es 1 y las raíces (por defecto o por exceso) son múltiplos de uno, se dice que "la aproximación es 1 o con un error menor que 1". Es decir, la raíz por defecto es 2 y la raíz por exceso es 3.
- Si la diferencia de raíces es 0,1 y las raíces (por defecto y por exceso) son múltiplos de un décimo, se dice que "la aproximación es 0,1 o con un error menor que 0,1". Es decir, la raíz por defecto es 2,6 y la raíz por exceso es 2,7.

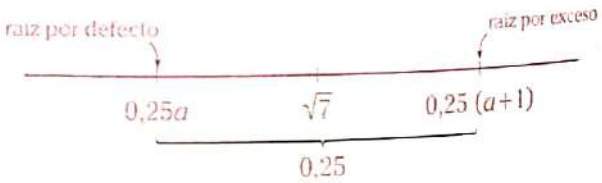
Aplicación 15

Calcule la raíz cuadrada por defecto de 7, con un error menor a 1/4.

Resolución

Un error menor a 1/4 es un error menor a 0,25.

El esquema sería el siguiente:



De la gráfica tenemos

$$0{,}25a \leq \sqrt{7} < 0{,}25(a+1)$$

$$\frac{a}{4} \leq \sqrt{7} < \frac{a+1}{4}$$

Elevamos al cuadrado

$$\frac{a^2}{16} \leq 7 < \frac{(a+1)^2}{16}$$

$$a^2 \leq 112 < (a+1)^2$$

Del intervalo tenemos

$$a^2 \leq 112$$

$$a \leq 10{,}58...$$

También

$$112 < (a+1)^2$$

$$10{,}58 < a+1$$

$$9{,}58 < a$$

Luego,

$$9{,}58 < a \leq 10{,}58$$

Dado que a es entero, entonces $a=10$.

La raíz cuadrada por exceso será

$$r_e=0{,}25\times 11=2{,}75$$

Por lo tanto, la raíz cuadrada por defecto será

$$r_d=0{,}25\times 10=2{,}5$$

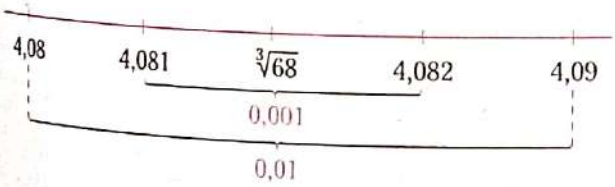
4.2. PARA RAÍZ CÚBICA

De manera similar se puede proceder en el caso de la raíz cúbica.

Ejemplo

$$\sqrt[3]{68}=4{,}0816551...$$

El esquema es el siguiente:



Del ejemplo, podemos decir lo siguiente:

- Si la diferencia de las raíces es 0,01 y las raíces (por defecto y por exceso) son múltiplos de un centésimo, se dice que "la aproximación es 0,01 o con un error menor que 0,01"; es decir, la raíz por defecto es 4,08 y la raíz por exceso es 4,09.
- Si la diferencia de las raíces es 0,001 y las raíces (por defecto y por exceso) son múltiplos de un milésimo, se dice que "la aproximación es 0,001 o con un error menor que 0,001"; es decir, la raíz por defecto es 4,081 y la raíz por exceso es 4,082.

Aplicación 16

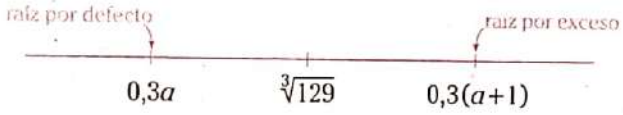
Calcule la raíz cúbica por defecto de 129, con un error menor a 3/10.

Resolución

Interpretamos el dato del problema.

error menor a 3/10 <> error menor a 0,3

El esquema sería el siguiente:



Entonces

$$0{,}3a \leq \sqrt[3]{129} < 0{,}3(a+1)$$

$$\frac{3}{10}a \leq \sqrt[3]{129} < \frac{3}{10}(a+1)$$

Elevamos al cubo.

$$\frac{27}{1000}a^3 \leq 129 < \frac{27}{1000}(a+1)^3$$

Del intervalo extraemos

$$a^3 \leq \frac{129\,000}{27}$$

$$a^3 \leq 4777{,}7$$

$$a \leq 16{,}84...$$

También

$$(a+1)^3 > \frac{129\,000}{27}$$

$$(a+1) > 16{,}84$$

$$a > 15{,}84$$

Como a es entero, entonces $a=16$.

La raíz cúbica por exceso será

$$r_e=0{,}3\times 17=5{,}1$$

Por lo tanto, la raíz cúbica por defecto será

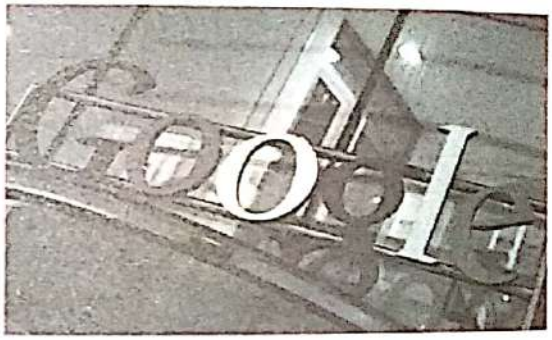
$$r_d=0{,}3\times 16=4{,}8$$

LECTURA

Los números grandes

Los números extremadamente grandes se representan mediante las potencias; por ejemplo

- $9^{9^9} = 9^{(9^9)}$. Este número tiene 369 693 100 cifras
- Se estima que el número de estrellas del universo es del orden de 10^{23}.
- Arquímedes de Siracusa, en su libro *El contador de arena*, reflexiona sobre el número de granos de arena que hay en el universo y esta cantidad es igual a 10^{63}.



El buscador más famoso sacó su nombre de *googol*, que es "gugol" en inglés.

- El número de átomos en el universo observable se estima que está en el orden de 10^{85}.

Por su parte, el gúgol es un número (10^{100}) que escrito en su totalidad sería un 1 seguido de 100 ceros. Es más grande que el número de átomos que hay en el universo, el cual solo asciende a 10^{85}.

El término "gúgol" lo introdujo en 1938 el matemático estadounidense Edward Kasner. Según cuenta él mismo, pidió a su sobrino Milton Sirotta, que tenía nueve años, que inventara un nombre para un número gigantesco, y el pequeño Milton respondió "gúgol".

Edward Kasner fue un paso más allá y definió el gúgolplex como el número 10 elevado a un gúgol, un número inmenso, realmente inconcebible, que consiste en un 1 seguido de un gúgol de ceros. El gúgolplex no se puede escribir en el sistema decimal, ya que aunque se usara cada átomo del universo para contener cada una de las cifras que lo componen, no tendríamos los suficientes.

Por cierto, el parecido de este nombre (*googol* en inglés) con la denominación del buscador Google no es casual. El nombre Google se eligió con toda la intención de abarcar una cantidad descomunal de páginas en internet. De ahí que la sede principal de Google se llame Googleplex.

Adaptado de "¿Qué es un gúgol?". En <https://www.quo.es>.

Problemas resueltos

Problema 1

Indique cuántos cubos perfectos existen en la siguiente secuencia:

$14\times1;\ 14\times2;\ 14\times3;\ 14\times4;\ ...;\ 14\times343\,000$

Resolución

Se observa que el término general es de la forma $14n$, donde

n: 1; 2; 3; 4; 5; ..., 343 000

Por condición tenemos

$$\underbrace{14}_{2\times7}n=k^3$$

Completamos los exponentes de 2 y 7 para generar un cubo perfecto.

$\rightarrow\ n=2^2\times7^2\times P^3$

$n=196P^3$

Observamos que

$1\leq n\leq 343\,000$

$1\leq 196P^3\leq 343\,000$

$0{,}005\leq P^3\leq 1750$

Entonces

$P=1;\ 2;\ 3;\ 4;\ 5;\ 6;\ ...;\ 12$

P toma 12 valores, es decir, que n también tomará 12 valores.

Por lo tanto, hay 12 términos de dicha sucesión que son cubos perfectos.

Problema 2

¿Cuántos números de 5 cifras son cuadrados perfectos y múltiplos de 101 más 20, a la vez?

Resolución

Sea el número $\overline{abcde}$, tal que $\overline{abcde}=k^2$.

Sabemos que

$10\,000\leq\overline{abcde}<100\,000$

$10\,000\leq k^2<100\,000$

$100\leq k<316{,}2$

Además,

$k^2=\overset{\circ}{\overline{101}}+20$

$k^2=\overset{\circ}{\overline{101}}+20+\boxed{101}$ Al sumar 101 solo la forma cambia, pero la igualdad prevalece.

$k^2=\overset{\circ}{\overline{101}}+121$

$k^2=\left(\overset{\circ}{\overline{101}}\pm11\right)^2$

$k=\overset{\circ}{\overline{101}}\pm11$

Si $k=\overset{\circ}{\overline{101}}+11$

$\rightarrow\ k$: $\underbrace{112;\ 213;\ 314}_{3\text{ valores}}$

Si $k=\overset{\circ}{\overline{101}}-11$

$\rightarrow\ k$: $\underbrace{191;\ 292}_{2\text{ valores}}$

Por lo tanto, en total habrán $3+2=5$ números que cumplen tal condición.

Problema 3

Si el numeral $\overline{ab0ab}_8$ es un cuadrado perfecto, calcule $a+b$.

Resolución

Se tiene que $\overline{ab0ab}_8=k^2$.

Aplicamos la descomposición polinómica en bloques.

$\overline{ab}_8\times8^3+\overline{ab}_8=k^3$

$ab^8(8^3+1)=k^2$

$\overline{ab}_8\times\underbrace{513}_{3^3\times19}=k^2$

Completamos los exponentes para generar un cuadrado perfecto.

$\overline{ab}_8=3\times19P^2$

Por la propieda del intervalo tenemos

$8^1\leq\overline{ab}_8<8^2$, entonces $P=1$.

$\rightarrow\ \overline{ab}_8=57$

Luego 57 expresamos a base 8

$$\begin{array}{r|l} 57 & 8 \\ \hline 1 & 7 \end{array}$$

$\overline{ab}_8=71_8 \rightarrow a=7$

$b=1$

$\therefore\ a+b=8$

Problema 4

Un número cuya cantidad de divisores es impar es tal que al dividirlo entre 7 y 13 da el mismo residuo 4. Calcule la suma de cifras de dicho número si es el menor posible.

Resolución

Sea N el número cuya cantidad de divisores es impar, es decir, N es un cuadrado perfecto.

$N=k^2$

Por dato tenemos que

$$\begin{array}{r|l} N & 7 \\ \hline 4 & \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{r|l} N & 13 \\ \hline 4 & \end{array}$$

$\rightarrow N=\overset{\circ}{7}+4 \quad \wedge \quad N=\overset{\circ}{\overline{13}}+4$

Luego, MCM(7; 13)=91

$\rightarrow N=\overset{\circ}{\overline{91}}+4$

Como $N=k^2$

$\rightarrow k^2=\overset{\circ}{\overline{91}}+4$

Existen dos posibilidades

$k=\overset{\circ}{\overline{91}}+2 \ \vee\ k=\overset{\circ}{\overline{91}}-2$

$\rightarrow k \begin{cases} 89;\ 180;\ \ldots \\ 93;\ 184;\ \ldots \end{cases}$

Como nos pide el menor valor posible para N, entonces el valor que k debe tomar es 89.

$N=k^2=89^2$

$N=7921$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es

$7+9+2+1=19$

Problema 5

Al extraer la raíz cuadrada a un número, se obtiene un residuo máximo; y al extraerle la raíz cúbica también se obtiene un residuo máximo. Si la suma de los residuos es 268, calcule la suma de cifras de dicho número.

Resolución

Sea N el número, se tiene que

$$\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & k \\ \hline 2k & \end{array} \quad \wedge \quad \begin{array}{r|l} \sqrt[3]{N} & R \\ \hline 3R(R+1) & \end{array}$$

Ya que se trata de residuos máximos,

$N+1=(k+1)^2 \quad \wedge \quad N+1=(R+1)^3$

$\rightarrow (k+1)^2=(R+1)^3$

Se observa que

- $k+1$ debe ser un cubo perfecto.
- $R+1$ debe ser un cuadrado perfecto.

Por dato tenemos

$2k+\underbrace{3R(R+1)}_{\overset{\circ}{3}}=\underbrace{268}_{3+1}$ (*)

$2k=\overset{\circ}{3}+1$

$2k+2=\overset{\circ}{3}+3$

$2(k+1)=\overset{\circ}{3}$

$\underbrace{k+1}_{\text{debe ser cubo}}=\overset{\circ}{3}$

$k+1=27 \rightarrow k=26$

Reemplazamos en (*).

$2(26)+3R(R+1)=268$

$3R(R+1)=216$

$R(R+1)=72$

$R=8$

Finalmente, reemplazando en $\begin{array}{r|l} \sqrt{N} & k \\ \hline 2k & \end{array}$

$\rightarrow N=k^2+2k$

$N=27^2+2\times 27$

$N=783$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es

$7+8+3=18$

Problema 6

Si el cubo de $\overline{ab}$ es $\overline{1(a+1)(2b)ab}$, calcule $a\times b$.

Resolución

Se tiene

$$\overline{1(a+1)(2b)ab}=\overline{ab}^3$$

Separamos bloques de 3 cifras, de derecha a izquierda, y luego podemos afirmar que a^3 se debe aproximar a $\overline{1(a+1)}$

$\rightarrow a=2$

Reemplazamos el valor de a.

$$\overline{13(2b)2b}=\overline{2b}^3$$

$\rightarrow b: 1; 4$; ya que $2b<10$

Evaluamos los posibles valores de b.

- $21^3=9261$ No cumple
- $24^3=13\,824$ Sí cumple

$\rightarrow a=2 \wedge b=4$

$\therefore a\times b=8$

Problema 7

Al extraer la raíz cuadrada por exceso de un número, se obtiene 23 como raíz; además, la diferencia del residuo por defecto y por exceso es 23. Calcule la suma de cifras de dicho número.

Resolución

Sea N el número.

Por defecto

$$\begin{array}{|l} \sqrt{N} \\ r_d \end{array}\ k$$

Por exceso

$$\begin{array}{|l} \sqrt{N} \\ r_e \end{array}\ k+1$$

Por dato tenemos

$k+1=23$

$k=22$

Sabemos que

- $r_d+r_e=2k+1$

  $r_d+r_e=2(22)+1=43$
- $r_d-r_e=23$ (por dato)

Resolvemos.

$r_d=34$

$r_e=10$

Luego,

$N=22^2+34$

$N=518$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es

$5+1+8=14$

Problema 8

Al extraer la raíz cúbica de un número, se obtuvo un residuo máximo igual a 546. Determine la suma de cifras de dicho número.

Resolución

Sea N el número.

$$\begin{array}{|l} \sqrt[3]{N} \\ R_{\text{máx}} \end{array}\ k \quad \rightarrow R_{\text{máx}}=3k(k+1)$$

Por dato, se sabe que

$3k(k+1)=546$

$k(k+1)=182$

$k(k+1)=13\times 14$

$k=13$

Luego,

$N=k^3+R_{\text{máx}}$

$N=13^3+546=2743$

Por lo tanto, la suma de cifras de N es

$2+7+4+3=16$

Problema 9

¿Cuántos números cuadrados perfectos existen de 4 cifras, tales que terminen en 9 y sean divisibles por 9.

Resolución

Sea $\overline{abc9}$ el número.

$$\overline{abc9} \begin{cases} k^2 \\ \overset{\circ}{9} \end{cases}$$

Se tiene que

$$\overline{abc9}=k^2 \rightarrow \begin{cases} k=\begin{cases} \ldots 7 \\ \ldots 3 \end{cases} \\ k=\overset{\circ}{3} \end{cases}$$

Por intervalos tenemos

$$1009 \leq \overline{abc9} < 9999$$

$$1009 \leq k^2 < 9999$$

$$31,\ldots \leq k < 99,\ldots$$

Luego,

$$k \begin{cases} 33;\ 63;\ 93 & \text{(3 valores)} \\ 57;\ 87 & \text{(2 valores)} \end{cases}$$

Por lo tanto, en total existen 5 números que cumplen tales condiciones.

Problema 10

Calcule cuántos números enteros cuadrados perfectos existen entre los siguientes cuadrados perfectos: $\overline{(a+4)a5}$ y $\overline{(2b-1)(2b-1)bb}$.

Resolución

Se tiene que

- $\overline{(a+4)a5}$ es un cuadrado perfecto.
  $\rightarrow a=2$
- $\overline{(2b-1)(2b-1)bb}$ es un cuadrado perfecto.
  $\rightarrow b=4$

Entonces los números cuadrados son 625 y 7744.

Ahora se tiene que

$$\underbrace{625}_{25^2}\ \underbrace{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}_{\text{Hay } N \text{ números cuadrados perfectos.}}\ \underbrace{7744}_{88^2}$$

$$26^2;\ 27^2;\ 28^2;\ 29^2;\ \ldots;\ 87^2$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} \text{cantidad de} \\ \text{números cuadrados} \end{pmatrix} = N = 87-25 = 62$$

Por lo tanto, hay 62 números cuadrados perfectos entre 625 y 7744.

Problema 11

Si el cuadrado de $\overline{mnp}$ es $\overline{1(2m)(2n)(2n)p4}$, calcule $m+n+p$.

Resolución

Se tiene que

$$\overline{1(2m)(2n)(2n)p4}=\overline{mnp}^2$$

Se observa que p: 2; 8.

Además, m^2 debe aproximarse a $\overline{1(2m)}$.

$\rightarrow m=4$

Reemplazamos.

$$\overline{18(2n)(2n)p4}=\overline{4np}^2$$

Si $p=8 \rightarrow \overline{18(2n)(2n)84}=\overline{4n8}^2$

$$\begin{array}{r} \overline{4\ \ n\ \ 8}\ \times \\ \overline{4\ \ n\ \ 8} \\ \hline \overline{\ldots(8n+6)4} \\ \overline{\ldots(8n)\ \ } \\ \hline \ldots\ \ 8\ \ 4 \end{array}$$

$\rightarrow 6+16n=\ldots 8 \rightarrow n=2$

Pero

$184\,484 \neq 428^2$ No cumple

Si $p=2 \rightarrow \overline{18(2n)(2n)24}=\overline{4n2}^2$

Para calcular n se puede usar una calculadora, pues n: 0; 1; 2; 3, 4. Si no fuera así, podemos calcular de la siguiente forma:

$$\begin{array}{r} \overline{4\ \ n\ \ 2}\ \times \\ \overline{4\ \ n\ \ 2} \\ \hline \overline{\ldots(2n)4} \\ \overline{\ldots(2n)\ \ } \\ \ldots\ \ \ \

Problema 12

Cierto número entero positivo no tiene raíz cúbica exacta. Si a este número se le disminuye en 721, entonces su raíz cúbica disminuye en una unidad; sin embargo, el residuo no se altera. Determine la suma de cifras de la diferencia entre el número y el residuo.

Resolución

Sea N el número.

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N} & k \\ \hline R & \end{array} \rightarrow N=\overset{\circ}{k}+R$$

$$N-R=k^3 \qquad \text{(I)}$$

Por dato tenemos

$$\begin{array}{l|l} \sqrt[3]{N-721} & k-1 \\ \hline R & \end{array}$$

$$\rightarrow N-721=(k-1)^3+R$$

$$N-R=(k-1)^3+721 \qquad \text{(II)}$$

Igualamos (I) y (II).

$$k^3=(k-1)^3+721$$
$$k^3-(k-1)^3=721$$
$$3k^2-3k+1=721$$
$$k(k-1)=240$$
$$k=16$$

Reemplazamos el valor de k en (I).

$$N-R=k^3=16^3=4096$$

Por lo tanto, la suma de cifras de la diferencia entre el número y su residuo es

$$4+0+9+6=19$$

Problema 13

Se tiene un numeral de cuatro cifras diferentes, tales que algunas son cuadrados perfectos y otras son cubos perfectos. Si a dicho número se le adiciona $\overline{cb1}$ se convierte en $\overline{a5}^2$. Calcule el residuo por exceso que se obtiene al extraer la raíz cuadrada del mayor numeral formado por todos los valores diferentes de a.

Resolución

Sea el numeral $\overline{mnpq}$, con m, n, p y q diferentes entre sí.

Se tiene que

$$\overline{mnpq}+\overline{cb1}=\overline{a5}^2$$

Se observa que $q=4$.

Por la condición, los valores de m, n y p pueden ser 1; 8 y 9.

Veamos los siguientes casos:

$1894+\overline{cb1}=\overline{a5}^2 \rightarrow a=4$

$1984+\overline{cb1}=\overline{a5}^2$ No hay solución

$8914+\overline{cb1}=\overline{a5}^2 \rightarrow a=9$

$8194+\overline{cb1}=\overline{a5}^2 \rightarrow a=9$

$9184+\overline{cb1}=\overline{a5}^2$ No hay solución

$9814+\overline{cb1}=\overline{a5}^2$ No hay solución

Por lo tanto, la suma de valores de a es

$$4+9=13$$

Problema 14

En una reunión, a la que asistieron menos de 1500 personas, se observa que el número de varones que bailan es igual a la raíz cuadrada del total de personas. Además, el número de varones que no bailan es igual a la raíz cúbica del número de mujeres que bailan. Calcule el número de mujeres que no bailan si el total de personas que asistieron es impar.

Resolución

Sea N el total de personas que asistieron a la reunión, tal que $N<1500$.

	Bailan	No bailan
Varones	$\sqrt{N}$	$\sqrt[3]{\sqrt{N}}$
Mujeres	$\sqrt{N}$	

Recuerde

$$\begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{varones que}\\ \text{bailan}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{mujeres que}\\ \text{bailan}\end{pmatrix}$$

Se observa que

$$\begin{pmatrix}\text{número de varones}\\ \text{que no bailan}\end{pmatrix} = \sqrt[6]{N}$$

Es decir, N debe ser una potencia perfecta de grado 6.

$N=x^6$

Como N debe ser impar y menor que 1500,

$\rightarrow\ x=3$

Es decir,

$N=3^6\ \rightarrow\ N=729$

Luego

- n.º de varones que bailan=27
- n.º de mujeres que bailan=27
- n.º de varones que no bailan=3

Por lo tanto, el número de mujeres que no bailan es

$729-(27+27+3)=672$

Problema 15

El numeral $\overline{abcde}$ es un cubo perfecto que además satisface las condiciones $a+c+e=15$ y $b+d=4$. Calcule la raíz cuadrada por exceso de dicho numeral e indique la suma de sus cifras.

Resolución

Se tiene que $\overline{abcde}=k^3$.

Como $a+c+e=15$ y $b+d=4$

$\rightarrow\ a-b+c-d+e=11$

Es decir,

$a-b+c-d+e=\overset{\circ}{\overline{11}}$

$\rightarrow\ \overline{abcde}=\overset{\circ}{\overline{11}}^3$

Es decir, tenemos las siguientes posibles soluciones:

$\overline{abcde}=11^3\times2^3=10\,648$ Sí cumple

$(a+c+e=15\ \wedge\ b+d=4)$

$\overline{abcde}=11^3\times3^3=35\,937$ No cumple

$(a+c+e=15\ \wedge\ b+d=4)$

$\overline{abcde}=11^3\times4^3=85\,184$ No cumple

$(a+c+e=15\ \wedge\ b+d=4)$

Entonces

$\overline{abcde}=10\,648$

Extraemos su raíz cuadrada.

$$\begin{array}{r|l}
\sqrt{1\,\overset{\frown}{0}\,6\,\overset{\frown}{4}\,8} & 103 \\ \cline{2-2}
1 & 20\times0 \\ \cline{2-2}
-06 & 203\times3 \\
00 & \\
648 & \\
609 & \\
39 &
\end{array}$$

Entonces la raíz cuadrada por defecto es 103, es decir, por exceso es 104.

Por lo tanto, la suma de cifras de la raíz por exceso es $1+0+4=5$.

Problema 16

¿Cuántos números de cuatro cifras son cuadrados perfectos y son $\overset{\circ}{\overline{11}}+3$?

Resolución

Sea N uno de dichos números.

$N=\overline{abcd}=k^2$

Para que N tenga cuatro cifras,

k: 32; 33; ...; 99

$\rightarrow\ N=k^2=\overset{\circ}{\overline{11}}+3$

$k^2=\overset{\circ}{\overline{11}}+3+22$

Le sumamos 22 (la forma cambia, pero la igualdad prevalece)

Luego,

$$k^2=\overset{\circ}{\overline{11}}+25$$

$$k^2-25=\overset{\circ}{\overline{11}}$$

$$(k+5)(k-5)=\overset{\circ}{\overline{11}}$$

Se tiene dos posibilidades:

- $k+5=\overset{\circ}{\overline{11}}$

  $k=\overset{\circ}{\overline{11}}-5$

  k: 39; 50; 61; 72; 83; 94 (6 valores)

- $k-5=\overset{\circ}{\overline{11}}$

  $k=\overset{\circ}{\overline{11}}+5$

  k: 38; 49; 60; 71; 82; 93 (6 valores)

Por lo tanto, existen en total

$6+6=12$ valores

Problema 17

Calcule $a+b+c$ si se cumple que $\overline{ab}^3=\overline{1c8ab}$.

Resolución

Tenemos que $\overline{ab}^3=\overline{1c8ab}$, entonces b puede ser 0; 1; 4; 5; 6 o 9.

Además,

$$10\,000 \le \overline{1c8ab} < 20\,000$$

$$10\,000 < \overline{ab}^3 < 20\,000$$

$$21,... \le \overline{ab} < 27,...$$

$$22 \le \overline{ab} \le 27$$

$\rightarrow a=2$

De ahí que $\overline{ab}$ puede ser 24; 25; 26.

Dado que

$$\overline{ab}^3=\overline{1c8ab}$$

entonces

$\overline{1c8ab}$ →
- $24^3=13\,824$ Sí cumple
- $25^3=15\,625$ No cumple
- $26^3=17\,576$ No cumple

$\rightarrow c=3;\ a=2;\ b=4$

$\therefore\ a+b+c=9$

Problema 18

¿Cuántos cuadrados perfectos existen que terminen en 9 y que tengan tres cifras al expresarlos en base 7?

Resolución

Sea $N=...9$ un cuadrado perfecto.

Entonces

$$N=k^2$$

$$k^2=...9$$

$\rightarrow k=...3$ o $k=...7$

Por condición,

$$N=\overline{abc}_7$$

$\rightarrow 7^2 \le N < 7^3$

$$49 \le k^2 < 343$$

$$k \in \{7; 8; 9; 10; 11; ...; 18\}$$

Como k debe terminar en 3 o 7,

$\rightarrow k \in \{7; 13; 17\}$

Por lo tanto, existen tres números cuadrados perfectos que cumplen la condición.

Problema 19

¿Cuántos números de seis cifras existen que generen residuo máximo tanto en su raíz cuadrada como en su raíz cúbica?

Resolución

Sea $N=\overline{abcdef}$

$\rightarrow 10^5 \le \overline{abcdef} < 10^6$ (*)

Al extraer la raíz cuadrada y cúbica se obtienen residuos máximos, esto equivale a decir que

$$N=k^2-1 \quad \wedge \quad N=p^3-1$$

$$(N+1)\begin{cases} \to k^2 \\ \to p^3 \end{cases}$$

$$\to \ (N+1)=R^6$$

$$N=R^6-1$$

Reemplazamos en (*).

$$10^5 \le R^6-1 < 10^6$$

$$10^5+1 \le R^6 < 10^6+1$$

$$\to \ 6{,}8... \le R < 10, ...$$

$\hookrightarrow R \in \{7; 8; 9; 10\}$

Por lo tanto, existen cuatro números que cumplen la condición.

Problema 20

Si $\overline{abc}^2=\overline{1(a-1)c(b-1)(b-1)9}$, calcule $a+b+c$. Considere que a, b y c son diferentes entre sí.

Resolución

Si $a \ne b \ne c$

$$\to \ \overline{abc}^2=\overline{1(a-1)c(b-1)(b-1)9}$$

Como a^2 debe aproximarse a $\overline{1(a-1)}$,

$$\to \ a=3$$

Además, por terminación de cifras

$$c^2=...9$$

$$\to \ c=3 \ \vee \ c=7$$

Como $c \ne a$, entonces $c=7$.

Reemplazamos.

$$\overline{3b7}^2=\overline{127(b-1)(b-1)9}$$

Usamos criterio de divisibilidad por 9.

$$(\overset{\circ}{9}+(b+1))^2=\overset{\circ}{9}+2b-1$$

$$(b+1)^2=\overset{\circ}{9}+2b-1$$

$$b^2+2b+1=\overset{\circ}{9}+2b-1$$

$$\to \ b^2+2=\overset{\circ}{9}$$

Notamos que b puede ser 4 o 5.

Sin embargo, por divisibilidad por 4 ocurre que

$$\overline{(b-1)9}=\overset{\circ}{4}+1$$

Si $b=4 \ \to \ 39=\overset{\circ}{4}+3$ No cumple

Si $b=5 \ \to \ 49=\overset{\circ}{4}+1$ Sí cumple

Obtenemos que $b=5$.

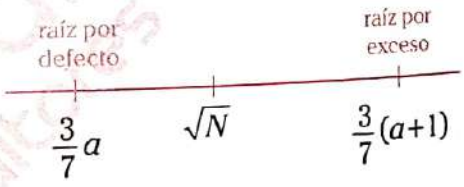
$$\therefore \ a+b+c=15$$

Problema 21

¿Cuántos enteros positivos primos relativos con 40 tienen como raíz cuadrada por defecto a 45/7, con un error menor a 3/7?

Resolución

Se tiene



Por dato,

$$\frac{3}{7}a=\frac{45}{7} \ \to \ a=15$$

Del gráfico tenemos que

$$\frac{3}{7}\times 15 \le \sqrt{N} < \frac{3}{7}\times 16$$

$$41{,}32 \le N < 47{,}02$$

$\hookrightarrow 42; 43; 44; 45; 46; 47$

Sabemos que N es PESI con 40.

$$\to \ N \ne \overset{\circ}{2} \ \text{ y } \ N \ne \overset{\circ}{5}$$

Entonces para los valores de N solo quedan 43 y 47.

Por lo tanto, el número de valores de N es 2.

Test

1. Determine el menor número por el cual se debe multiplicar a 1470 para que resulte un número cuadrado perfecto.

A) 18
B) 36
C) 30
D) 24
E) 40

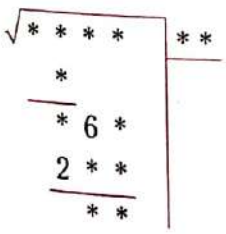
2. Entre dos números cuadrados perfectos consecutivos existen 24 números. Determine el mayor de estos cuadrados.

A) 100 B) 121 C) 144
D) 216 E) 169

3. ¿Cuántos números enteros positivos tienen una raíz cúbica entera igual a 8?

A) 214 B) 217 C) 215
D) 216 E) 218

4. Si cada * representa una cifra; además, el radicando es máximo y par, calcule la suma de cifras del residuo.



A) 3 B) 8 C) 4
D) 7 E) 5

5. Si $\overline{abc}=\overline{cd}^2$ y $\overline{aef}=n^3$; $f\neq n$, calcule $a+b+c+d+e+f+n$.

A) 33 B) 26 C) 28
D) 34 E) 18

6. ¿Cuántos cuadrados perfectos que terminan en la cifra 6 existen entre 3600 y 10 000?

A) 4 B) 10 C) 8
D) 16 E) 12

7. ¿Cuántos términos de la sucesión mostrada tienen raíz cuadrada exacta?
12×7; 12×8; 12×9; ...; 12×600

A) 13 B) 10 C) 12
D) 14 E) 20

8. Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{abacc}$, se obtuvo como raíz $\overline{(a-1)ba}$, siendo el residuo nulo. Calcule $a+b+c$.

A) 10 B) 15 C) 12
D) 13 E) 11

9. Al calcular la raíz cuadrada de $\overline{abcc}$, se obtiene como raíz un cuadrado perfecto y un residuo de dos cifras que también es un cuadrado perfecto; además; el residuo por exceso termina en la cifra 8. Calcule $a+b+c$.

A) 20 B) 8 C) 12
D) 15 E) 19

CLAVES
1 C 2 E 3 B 4 A 5 A 6 C 7 A 8 C 9 C

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Halle el menor número entero positivo que se debe multiplicar con 1 663 200 para obtener un número cuadrado perfecto. Dé como respuesta la suma de cifras de dicho número.

A) 11 B) 12 C) 10
D) 14 E) 9

2. Sea $N=\overline{ababab}$. Calcule el menor número entero positivo que debe dividir a N para que se obtenga un cociente que sea un número cuadrado perfecto.

A) 99 B) 111 C) 37
D) 333 E) 222

3. Se tiene el número $\overline{(a+1)(a+2)(a+3)(a+4)}$. Si permutamos las dos primeras cifras de la izquierda, el número formado resulta un cuadrado perfecto. Calcule la suma de los dígitos de dicho número.

A) 16 B) 24 C) 20
D) 22 E) 18

4. Indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) de las siguientes proposiciones:

I. Todo número cubo perfecto es $\overset{\circ}{4}+1$ o $\overset{\circ}{4}-1$.
II. En el sistema senario, los números cuadrados perfectos terminan solo en la cifras 0; 1; 3 o 4.
III. Si el número $\overline{23ab}$ es un cuadrado perfecto, entonces $a+b=4$.

A) VFV B) FVV C) VVV
D) FVF E) FFF

5. ¿Cuántos cuadrados perfectos $\overset{\circ}{\overline{13}}+4$ hay entre 972 y 9520?

A) 6 B) 10 C) 13
D) 8 E) 9

6. Determine la suma de todos los valores que puede tomar $\overline{ab}$ si $\overline{ab49}$ es un cuadrado perfecto.

A) 32 B) 40 C) 86
D) 136 E) 118

7. Si $k^2=\overline{1a(2a)(3a)}$ y $p^2=\overline{1(3b)b(2b)}$, calcule $k+p$.

A) 72 B) 44 C) 37
D) 85 E) 81

8. Indique cuáles de las siguientes proposiciones son incorrectas.

I. Existen únicamente 12 números de 4 cifras que son cubos perfectos.
II. El residuo de la raíz cuadrada siempre es menor que el doble de la raíz cuadrada.
III. Si entre dos cuadrados perfectos consecutivos existen 80 números consecutivos, entonces el mayor de estos números es 1600.

A) solo I B) solo II C) II y III
D) solo III E) I y III

9. Si se cumple que $\overline{a000(a+1)(b+1)b}=\overline{cab}^3$ y que $\overline{cb}$ tiene una cantidad impar de divisores, calcule $a+b+c$.

A) 8 B) 12 C) 9
D) 10 E) 11

10. Con las cifras 2; 2; 7; 5 y 2 se puede formar un número de 5 cifras cuadrado perfecto. Determine la raíz cuadrada de dicho número y dé como respuesta la suma de sus cifras.

A) 12 B) 13 C) 15
D) 10 E) 14

11. Si a un número entero positivo M se le suma 2791, entonces su raíz cúbica aumenta en una unidad, pero se observa que el residuo (R) se mantiene. Calcule $M-R$.

A) 64000 B) 27000 C) 15000
D) 12500 E) 34300

12. Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{75ab3}$, se obtiene como residuo 8. Calcule $a-b$.

A) 3 B) 2 C) 4
D) 5 E) 1

13. Sean los numerales

$$A=\underbrace{444\ldots44}_{2m \text{ cifras}} \wedge B=\underbrace{44\ldots4}_{m \text{ cifras}}$$

Si $A+B$ da residuo máximo al extraerle la raíz cuadrada, y la raíz cuadrada por exceso de $A+B$ es un número comprendido entre 100 y 1000, calcule $\frac{A}{B}$.

A) 1001 B) 1011 C) 1211
D) 1111 E) 1321

14. Los soldados de un batallón, al alinearse en filas, forman un cuadrado cuando 13 de ellos están de guardia. Otros 68 soldados son incorporados a dicho batallón y todos, al alinearse en fila, también forman un cuadrado. Indique cuántos soldados había inicialmente en el batallón si estos eran menos de 300. Dé como respuesta la suma de cifras.

A) 13 B) 9 C) 17
D) 15 E) 12

Nivel intermedio

15. ¿Cuántos números de 6 cifras que terminan en la cifra 1 son cuadrados y cubos perfectos a la vez?

A) 4 B) 5 C) 1
D) 3 E) 2

16. Si el cuadrado del numeral $\overline{c(a+c)a0}$ resulta el numeral $\overline{7abcadd}$, calcule $a+b+c+d$.

A) 10 B) 13 C) 14
D) 16 E) 15

17. Si $\overline{ab}$ es la cantidad de números cuadrados perfectos que terminan en 9 y están comprendidos entre 500 y 8000; además, el numeral $\overline{ab(b+2)ba}_8$ es una potencia perfecta de grado n, halle el máximo valor de n.

A) 10 B) 8 C) 6
D) 4 E) 9

18. Calcule $a+b+c+d$ si se cumple que $\overline{ababca}=\overline{d0b}^2$; $\overline{ab}=d^2$; $\overline{ca}=b^2$

A) 19 B) 13 C) 18
D) 12 E) 15

19. Halle la suma de las cifras del menor número múltiplo de 18, de tal forma que la suma de su cuarta y su quinta parte sea un cuadrado perfecto.

A) 9 B) 12 C) 15
D) 18 E) 27

20. Determine la cantidad de números de 5 cifras que sean cubos perfectos divisibles por 6, pero no por 5.

A) 3
B) 36
C) 4
D) 29
E) 40

21. Sea N la suma de cifras de un número de 4 cifras que es un cuadrado y cubo perfecto a la vez. Calcule N.

A) 21 B) 19 C) 24
D) 23 E) 25

22. Si la sucesión

12(6); 12(8); 12(10); 12(12); ...

posee solo tres términos que son cubos perfectos, ¿cuántos términos que son cuadrados perfectos, pero no potencias perfectas de grado 4, tendrá como máximo dicha sucesión?

A) 5 B) 9 C) 6
D) 7 E) 8

23. Si $\overline{abc}^2 = \overset{\circ}{9} - 2$ y $\overline{abc}^2 = \overline{n(3n)0abc}$, calcule $a \times b + c + n$.

A) 18 B) 21 C) 20
D) 22 E) 24

24. Si se cumple que

$\overline{abc}^2 = \overline{(b-c)(b-c)c(b-1)2c}$

calcule $a \times b + c$.

A) 27 B) 16 C) 39
D) 33 E) 25

25. ¿Cuántos números de 4 cifras $\overline{abcd}$ existen, tales que $\overline{abcd} = 11(a+b+c+d)^2$?

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

26. Calcule la suma de cifras de la raíz cuadrada de

$$\underbrace{111\ldots1}_{2n \text{ cifras}} - \underbrace{222\ldots2}_{n \text{ cifras}}$$

A) $2n$ B) $5n$ C) $4n-1$
D) $3n+3$ E) $3n$

27. Si a un número capicúa de 3 cifras se le adiciona la mitad de la cantidad de sus divisores simples, se cumple que al extraer su raíz cúbica se obtiene residuo máximo. Halle el producto de las cifras de dicho número.

A) 32 B) 36 C) 72
D) 98 E) 34

28. Fabrizio digita en su calculadora un número de 6 cifras, luego procede a extraerle su raíz cuadrada y se percata que el número que obtiene en su parte entera es el complemento aritmético del número que al inicio digitó. Determine la suma cifras del número que digitó Fabrizio en su calculadora.

A) 26 B) 28 C) 30
D) 14 E) 22

29. A un número se le suma 525, entonces su raíz cuadrada aumenta en 3 unidades y el residuo se hace máximo. Si el residuo original fue n, ¿cuántos números cumplen con tal condición? Considere $n \in \mathbb{Z}^+$.

A) 18 B) 11 C) 20
D) 22 E) 15

30. Al extraer la raíz cuadrada de un número, se tomó por error el residuo como raíz y a este como residuo, por lo que resultó un número que es inferior en 372 unidades al original. Si en la raíz cuadrada del número original, la diferencia de la raíz menos el residuo es 3, calcule el número original.

A) 4324 B) 5624 C) 7254
D) 4157 E) 4096

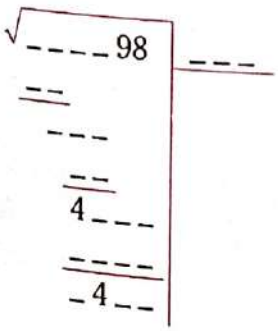
31. ¿Cuántos divisores tiene el número cuya raíz cuadrada por defecto es 52 y cuya raíz cúbica por exceso es 14? Considere que dicho número es múltiplo de 37.

A) 2 B) 12 C) 4
D) 6 E) 15

32. Al extraer la raíz cuadrada de $\overline{ab6c}$, se obtuvo un residuo máximo; y cuando se extrae la raíz por exceso, se obtiene $\overline{ca}$ como raíz. ¿Qué residuo se obtiene al extraer la raíz cúbica de $\overline{abc}$?

A) 27 B) 29 C) 13
D) 18 E) 21

33. Se tiene



Calcule la suma de cifras del radicando más la suma de cifras de la raíz.

A) 29 B) 46 C) 43
D) 35 E) 38

34. El terreno del señor Tito tiene la forma de un cuadrado cuya superficie es de $\overline{3abc}$ m^2. En dicho terreno ha sembrado hortalizas, y decide cercarlo con alambre, dando 4 vueltas por todo el perímetro del terreno. Indique cuánto costará como mínimo todo el cercado si el metro de alambre cuesta S/13 y en otros accesorios gasta S/$\overline{mmnn}$. Considere que este último numeral tiene una cantidad impar de divisores.

A) 19 184
B) 18 914
C) 18 410
D) 18 560
E) 19 480

35. Al extraer la raíz cuadrada de N, se obtuvo residuo máximo, pero si se realiza por exceso, su raíz es 36. Calcule por cuánto, como mínimo, se debe multiplicar a N para que sea un cuadrado perfecto.

A) 4720 B) 4900 C) 1295
D) 5180 E) 5320

36. Calcule la suma de cifras de un número capicúa de 5 cifras que tiene como raíz cuadrada a otro número capicúa de 3 cifras. Considere que la raíz cuarta del número inicial también es capicúa.

A) 12 B) 18 C) 15
D) 16 E) 19

37. Al extraer la raíz cúbica de un número, se obtuvo residuo máximo e igual a $\overline{n(3n)10}$. Calcule la suma de cifras del número.

A) 26 B) 36 C) 27
D) 35 E) 37

38. Sea un número impar positivo que no tiene raíz cúbica exacta. Si a este número se le disminuye en 721, entonces su raíz cúbica disminuye en una unidad, pero el residuo no se altera. Calcule la cantidad de dichos números que cumplen la condición dada.

A) 160 B) 408 C) 815
D) 180 E) 816

Nivel avanzado

39. ¿Cuántos términos cubos perfectos existen en la siguiente sucesión?
45×10; 45×20; 45×30; ...; $45\times1\,000\,000$

A) 6 B) 10 C) 8
D) 11 E) 27

40. Se tiene un número de cuatro cifras diferentes, las cuales no son cuadrados perfectos ni cubos perfectos. Si a dicho número se le suma $\overline{cb2}$, se convierte en $\overline{a5}^2$. Calcule la suma de los valores que puede tomar a.

A) 12 B) 10 C) 19
D) 13 E) 27

41. Al sumar $\overline{ab}_9+\overline{abc}_9+\overline{abcc}_9$, se obtiene un cuadrado perfecto divisible entre 33. Calcule $a+b+c$.

A) 18 B) 15 C) 9
D) 11 E) 12

42. Si se cumple que

- $\overline{ab}^3=\overline{b\left(\frac{b}{2}\right)b0(a-3)b}$
- $\overline{ba}=m^2+n^2$; $\{m;n\}\subset\mathbb{Z}^+$

calcule $a+b+m+n$.

A) 25 B) 24 C) 18
D) 20 E) 22

43. Si se sabe que

$$\underbrace{11\ldots1115}_{n\text{ cifras}}\underbrace{\ldots56}_{n\text{ cifras}}$$

es un cuadrado perfecto, halle la suma de cifras de su raíz.

A) $2n+1$ B) $3n+1$ C) $3n$
D) $2n$ E) $3n-1$

44. Pedro quiere plantar árboles igualmente espaciados en un parque de su comunidad. El parque tiene la forma de un cuadrado de 234 m de lado. Si la separación entre un árbol y otro fuese de 1,2 m, faltarían 3000 árboles. Determine la distancia que debe haber entre los árboles de manera que sobren 2655 árboles.

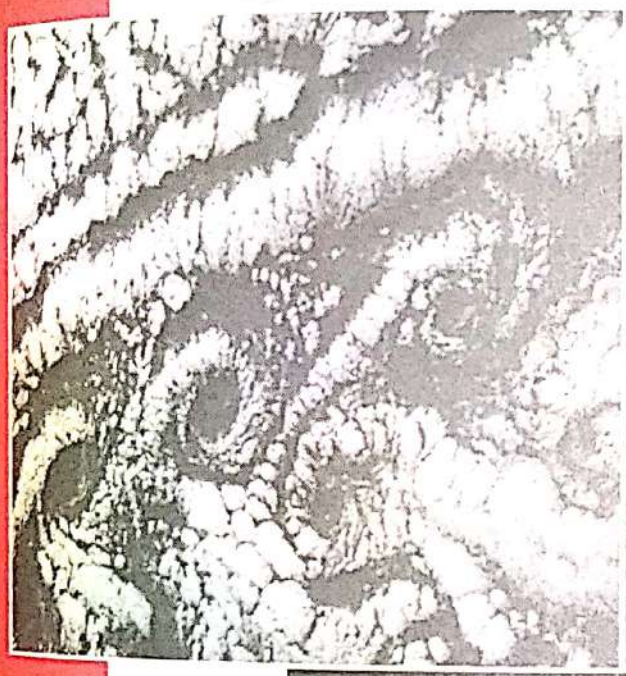
A) 1,5 m
B) 1,45 m
C) 1,4 m
D) 1,3 m
E) 1,25 m

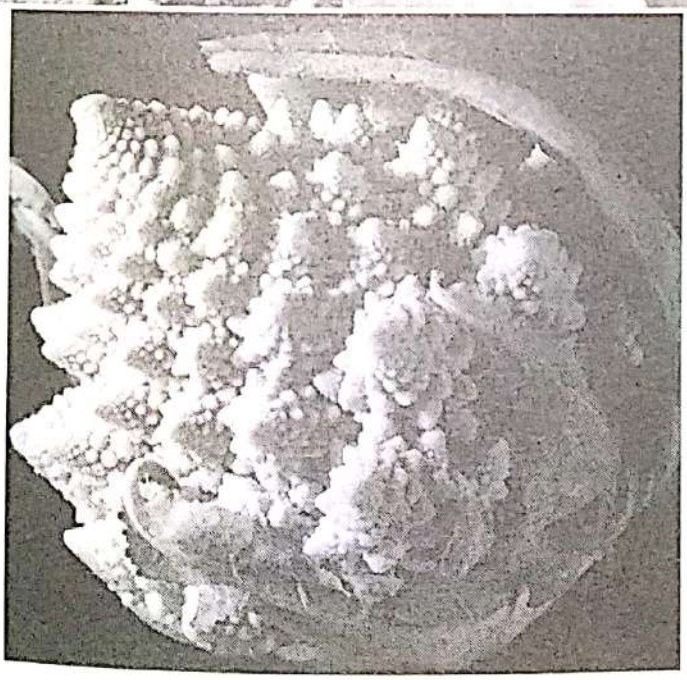
45. Al extraer la raíz cuadrada de un número, se observa que 268 es lo máximo que se puede sumar a dicho número para que su raíz aumente en 2 unidades; además, al resto original le falta 4 unidades para ser máximo. Calcule la suma de cifras de dicho número más la suma de cifras del residuo.

A) 15 B) 18 C) 16
D) 17 E) 13

Capítulo

XI





Números racionales

Ramiro Fortunato Díaz Vásquez

CAPÍTULO XI

NÚMEROS RACIONALES

Objetivos

- Construir el conjunto de los números racionales a partir del conjunto de los números $\mathbb{Z}$.
- Identificar, interpretar y clasificar las fracciones.
- Ampliar el concepto de números decimales a otras bases (números avales) y efectuar cambios de base.

Introducción

La naturaleza nos dio dos unidades naturales de tiempo: el año y el periodo de veinticuatro horas; aunque el año no contiene un número entero de días, origina problemas matemáticos interesantes.

Así tenemos que 1 año=365 días, 5 horas, 49 minutos y 46 segundos=365,242199 días.

En la vida civil es imposible legalizar dicha duración del año. ¿Qué pasaría si aceptamos que el año civil dura 365 días? Por ejemplo, el 1 de enero del 2020 a las 0 horas, la Tierra se encontraría en un punto A y en el transcurso de 365 días no podrá alcanzar el punto A, por lo cual a las 0 horas del 1 de enero del 2021 resultará en otro punto B ($B \neq A$); y el 1 de enero del 2022, en un punto C (diferente a los anteriores), etc. Entonces ocurrirá que si fijamos la posición de la Tierra en la órbita correspondiente a una fecha dada, esta será diferente en todos los años y se atrasará casi en seis horas. Durante cuatro años este atraso constituirá casi un día, y la fecha fijada caerá en diferentes estaciones del año, lo que generaría incomodidad, ya que no se podría relacionar algunas medidas periódicas con fechas bien definidas.

No obstante, existe una salida. Hace falta considerar que algunos años tienen 365 días y otros tienen 366 días, por lo que se alternan los años de tal manera que la duración media del año sea la más próxima posible a la que se da en la realidad.

En primer lugar y en forma sencilla, se hizo el estudio de los números naturales; ampliando este conjunto, se estudió a los enteros. Pero al comparar las cantidades por división, se obtenían resultados que no eran números enteros, entonces se amplió al conjunto de los números racionales, lo cual permitió obtener resultados precisos de estas comparaciones.

En la vida diaria, en cada momento, se comparan cantidades por división. Como necesitamos los valores de estas comparaciones, utilizamos la representación decimal de los números. El avance tecnológico nos trajo las calculadoras y las computadoras, las cuales permiten realizar los cálculos con mayor precisión; en el ejemplo previo, la tecnología permite determinar que la duración del año no es exactamente 365 días; por lo cual cada 4 años se originan años con 366 días (bisiesto).

1▸ INTRODUCCIÓN A LOS NÚMEROS RACIONALES ($\mathbb{Q}$)

A partir de lo tratado en el capítulo V, podemos observar que las operaciones de adición, sustracción y multiplicación están bien definidas en el conjunto de los enteros ($\mathbb{Z}$), tal es así que, por ejemplo, dados los números 5 y 7, se puede observar lo siguiente:

- $5+7=12 \in \mathbb{Z}$
- $5\times7=35 \in \mathbb{Z}$
- $5-7=-2 \in \mathbb{Z}$
- $7-5=2 \in \mathbb{Z}$

El resultado de cada operación resulta otro número entero.

Es decir, cumplen con la ley de clausura. En el caso de la división, por ejemplo, para los números 8 y 4 $\in \mathbb{Z}$.

$$\frac{8}{4}=2 \in \mathbb{Z}, \text{ pero } \frac{4}{8}=0{,}5 \notin \mathbb{Z}$$

De ahí que el cociente de dos enteros no necesariamente es entero (no se cumple la ley de clausura).

Es por ello que tenemos la necesidad de ampliar el conjunto numérico de los enteros, es decir, generar otro conjunto numérico en el que la división esté bien definida.

Definimos entonces el conjunto producto siguiente:

$$\boxed{\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*=\{(a;b)/a \in \mathbb{Z} \wedge b \in \mathbb{Z}^*\}}$$

(conjunto de pares ordenados)

donde

$$\mathbb{Z}=\{...;-4;-3;-2;-1;0;1;2;3;...\}$$
$$\mathbb{Z}^*=\{...;-4;-3;-2;-1;1;2;3;...\}=\mathbb{Z}-\{0\}$$

Además, $(a;b)=\dfrac{a}{b}$ (se expresará así para comodidad en las operaciones en $\mathbb{Q}$).

En el conjunto $\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$ definimos la siguiente relación:

$$\boxed{(a;b)\approx(c;d) \leftrightarrow a\times d=b\times c}$$

Ejemplos

- $(1;2)\approx(2;4)$, ya que $1\times4=2\times2$
- $(3;5)\approx(12;20)$, ya que $3\times20=5\times12$
- $(0;1)\approx(0;-11)$, ya que $0\times(-11)=1\times0$

Podemos afirmar que $\approx$ es una relación de equivalencia, dado que puede ser

- **Reflexiva:** $(a;b)\approx(a;b)\ \forall\ (a;b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$
- **Simétrica:** $(a;b)\approx(c;d)\rightarrow(c;d)\approx(a;b)$
- **Transitiva:** $(a;b)\approx(c;d)\wedge(c;d)\approx(e;f)$
$\rightarrow(a;b)\approx(e;f)$

2▸ CLASE DE EQUIVALENCIA

Se llama así a aquel conjunto cuyos elementos son pares ordenados equivalentes.

En general, si $(a;b)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*$, entonces se tiene el siguiente conjunto:

$$\boxed{[(a;b)]=\left[\frac{a}{b}\right]=\{(x;y)\in\mathbb{Z}\times\mathbb{Z}^*/(x;y)\approx(a;b)\}}$$

llamado clase de equivalencia de $(a;b)$.

Ejemplos

- $[(1;2)]=\left[\dfrac{1}{2}\right]=\{...,(-3;-6),(-2;-4),(-1;-2);(1;2),(2;4),(3;6),...\}$

  En general,

  $$[(1;2)]=\left[\frac{1}{2}\right]=\{(x;2x)/x\in\mathbb{Z}^*\}$$

- $[(-3;4)]=\left[\dfrac{-3}{4}\right]=\{...,(6;-8),(3;-4),(-3;4)(-6;8),...\}$

  En general,

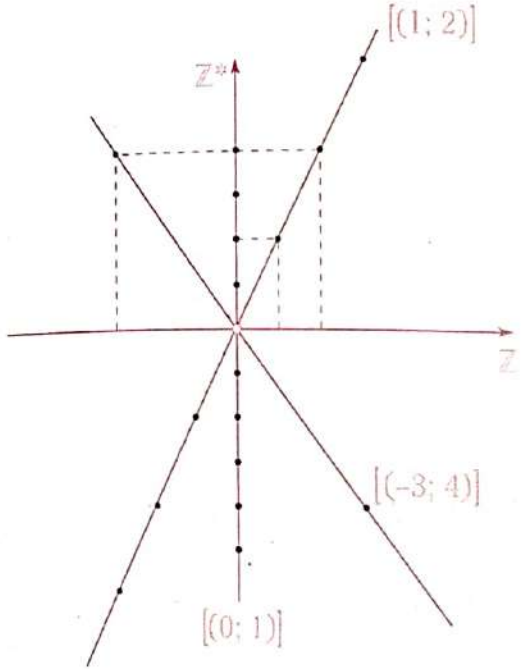
  $$\left[\frac{-3}{4}\right]=\{(-3k;4k)/k\in\mathbb{Z}^*\}$$

- $\left[\dfrac{0}{1}\right]=\{...,(0;-2),(0;-1),(0;1),(0;2),...\}$

  En general,

  $$\left[\frac{0}{1}\right]=\{(0;y)/y\in\mathbb{Z}^*\}$$

Graficamos las clases de equivalencia.



2.1. REPRESENTANTE CANÓNICO DE UNA CLASE DE EQUIVALENCIA

Dada una clase de equivalencia $[(a; b)]$, cualquiera de los elementos de este conjunto puede ser representante de la clase. De los infinitos representantes, existe solo uno llamado representante canónico.

En general, si $[x/y]$ es un representante canónico de $[a/b]$, entonces se cumplirá que $|x|$ e $|y|$ son PESI, siendo $y \in \mathbb{Z}^+$.

Ejemplos

- $[(4; 10)]=\{...; (-6; -15), (-4; -10), (-2; -5), (2; 5), (4; 10), ...\}$

  Su representante canónico es (2; 5).

- $[(2; 1)]=\{..., (-6; -3), (-4; -2), (-2; -1), (2; 1), (4; 2), ...\}$

  Su representante canónico es (2; 1).

- $[(2; -10)]=\{..., (-3; 15), (-2; 10), (-1; 5), (1; -5), (2; -10), ...\}$

  Su representante canónico es (–1; 5).

- $[(0; n)]=\{..., (0; -3), (0; -2), (0; -1), (0; 1), (0; 2), ...\}$

  Su representante canónico es (0; 1).

3 ▸ CONJUNTO DE LOS RACIONALES

El conjunto de los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$, es el conjunto de todas las clases de equivalencias, es decir

$$\boxed{\mathbb{Q}=\{[(a; b)] \,/\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\}}$$

Tengamos en cuenta que para $a \in \mathbb{Z}$ y $b \in \mathbb{Z}$ con $b \neq 0$, consideraremos

$$[(a; b)]=\frac{a}{b}$$

Si $b=1$, entonces $a=\frac{a}{1}$ (de ahí que $\mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$).

▸▸ Observación

- En forma práctica

$$\boxed{\mathbb{Q}=\left\{\frac{a}{b} \,\Big/\, a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}, b \neq 0\right\}}$$

- Como $(a; b) \approx (c; d) \leftrightarrow a \times d = b \times c$ se puede concluir que

  $$\frac{a}{b}=\frac{c}{d} \leftrightarrow a \times d = b \times c$$

- Se cumple que $0=\frac{0}{1}=\frac{0}{y}$; $\forall\, y \in \mathbb{Z}^*$

- Si $b \neq 0$ y $\frac{a}{b}=0$, entonces $a=0$.

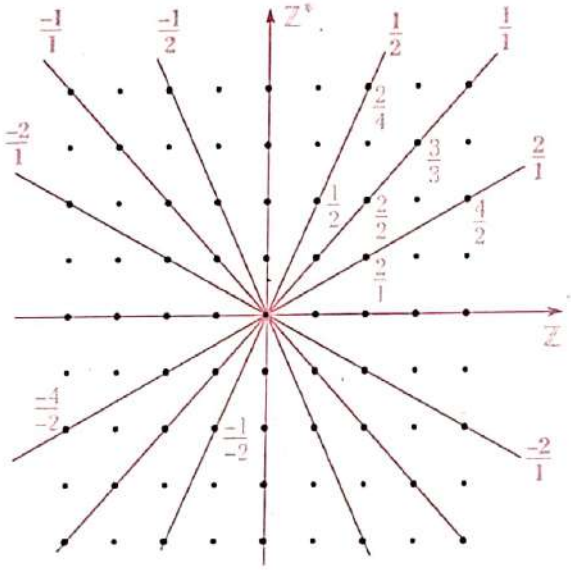
- Si $\frac{a}{b} \neq 0$, entonces $a \neq 0$.

- La unión de las clases de la forma $\left[\frac{n}{1}\right]$, donde $n \in \mathbb{N}$, origina el conjunto $\mathbb{Z}$.

- $\left[\frac{a}{b}\right] \cap \left[\frac{c}{d}\right] \neq \varnothing$ si y solo si $a \times d = b \times c$.

- $\left[\frac{a}{b}\right]+\left[\frac{c}{d}\right]=\left[\frac{ad+bc}{bd}\right]$

Las clases de equivalencia se pueden representar en el plano cartesiano, puesto que sus elementos son pares ordenados, los cuales van a formar puntos sobre una línea recta para cada clase de equivalencia (rectas que pasan por el origen, con excepción del eje de coordenadas).



Los espacios vacíos de la gráfica serán ocupados por los números irracionales ($\mathbb{Q}'$), que son aquellos números que no se pueden expresar como el cociente de dos enteros.

4▸ Densidad de un conjunto

Un conjunto A es denso si dos de sus elementos x, y cumplen que $x < y$, y, además, existe un elemento $c \in A$, tal que $x < c < y$.

Es decir, dados a y $b \in \mathbb{Q}$ y la relación de orden $<$ (menor que), se dice que $\mathbb{Q}$ es denso si existe $c \in \mathbb{Q}$, tal que $a < c < b$.

Ahora demostraremos que $\mathbb{Q}$ es denso en $\mathbb{R}$.

Dados $a \in \mathbb{Q} \wedge b \in \mathbb{Q}$, en los cuales $a < b$, debemos demostrar que existe un $x \in \mathbb{Q}$, tal que $a < x < b$.

Demostración

Como $a < b \rightarrow a+a < b+a$

$$2a < a+b$$

$$a < \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$$

También $a < b$

$$\rightarrow a+b < b+b$$

$$a+b < 2b$$

$$\underbrace{\frac{a+b}{2}}_{\in \mathbb{Q}} < b$$

Luego,

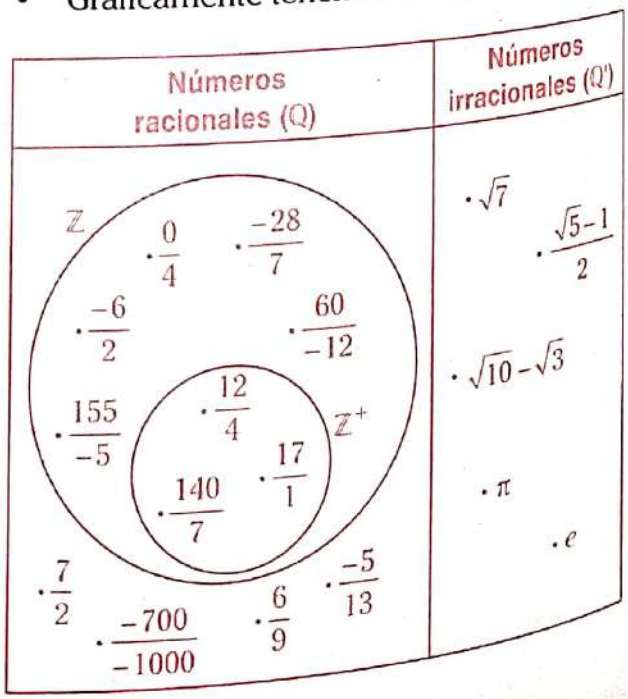
$$x = \frac{a+b}{2} \in \mathbb{Q}$$

$$\therefore \ a < x < b$$

Conclusiones

- El conjunto de los números racionales es un conjunto de conjuntos.
- El conjunto de los números racionales es infinito y denso, pero no es continuo en la recta numérica real dado que entre dos números racionales existen infinitos números racionales; sin embargo, a pesar de ello, hay algunos vacíos que serán ocupados por los números irracionales ($\mathbb{Q}'$).

  $\mathbb{Q} \cup \mathbb{Q}' = \mathbb{R} \ \wedge \ \mathbb{Q} \cap \mathbb{Q}' = \phi$
- Gráficamente tenemos lo siguiente:



Además, sabemos que

$\pi = 3{,}141592654...$

$e = 2{,}718281828...$

Aplicación 1

Demuestre que el número $\sqrt{2}$ es un número irracional.

Resolución

Sabemos que

$$p \to q \equiv \sim q \to \sim p$$

Partimos de un absurdo al señalar que $\sqrt{2}$ no es irracional, es decir

$$\sqrt{2} = \frac{m}{n}$$

donde $\{m, n\} \subset \mathbb{Z}^+$, $n \neq 1$, siendo m y n PESI.

Tendremos

$$2 = \frac{m^2}{n^2},$$

de lo cual $m^2 = 2n^2$; pero si m y n son PESI, también lo son m^2 y n^2, en contradicción con $(m^2 = 2n^2)$, donde m^2 es múltiplo de n^2. La suposición inicial conduce a una contradicción, por lo que resulta falsa. En consecuencia, $\sqrt{2}$ es irracional.

Aplicación 2

Señale el valor de verdad de cada proposición.

I. Si p es un número irracional, entonces $\sqrt[3]{p^2}$ es también irracional.

II. Si $a \in \mathbb{Q}$, entonces, $(a^2)^{1/2} = a$.

III. La suma de dos números irracionales es otro número irracional.

IV. Si los lados de un rectángulo son irracionales, su perímetro y su área también lo son.

V. Si el radio de un círculo es irracional, su área es irracional.

Resolución

I. Falso

Si $p = \sqrt{8} \in \mathbb{Q}'$

$$\sqrt[3]{(\sqrt{8})^2} = \sqrt[3]{8} = 2 \in \mathbb{Q}$$

II. Falso

Si $a = -3$

$$\left[(-3)^2\right]^{1/2} = (9)^{1/2} = 3$$

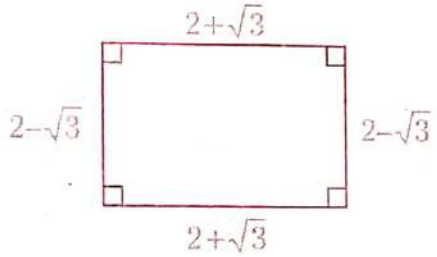
III. Falso

Por ejemplo, si sumamos

$$\sqrt{3} + (-\sqrt{3}) = 0 \in \mathbb{Q}$$

IV. Falso

Consideremos el siguiente rectángulo:



Perímetro: $2(2-\sqrt{3}) + 2(2+\sqrt{3}) = 8$ u

Área: $(2+\sqrt{3})(2-\sqrt{3}) = 1$ u^2

V. Falso

Sabemos que $\mathbb{A}_{\text{círculo}} = \pi R^2$

Si $R = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} \in \mathbb{Q}'$

$$\mathbb{A}_{\text{círculo}} = \pi\left(\frac{1}{\sqrt{\pi}}\right)^2 = 1 \text{ u}^2 \in \mathbb{Q}$$

5 ▸ NÚMEROS FRACCIONARIOS

Son aquellos números racionales que no son enteros.

Ejemplos

Se tienen los números racionales

$$\underbrace{\frac{1}{2}; \frac{15}{-20}; \frac{-4}{38}; \frac{-20}{-7}}_{\text{números fraccionarios}} \qquad \underbrace{\frac{14}{-2}; \frac{8}{4}; \frac{-12}{6}; \frac{-30}{-5}}_{\text{no son números fraccionarios (son enteros)}}$$

6 ▸ FRACCIÓN

Son aquellos números fraccionarios cuyos dos términos son números enteros positivos.

Ejemplo

Se tienen los números fraccionarios

$$\underbrace{\frac{3}{4};\ \frac{15}{20};\ \frac{35}{21};\ \frac{1}{9}}_{\text{son fracciones}} \qquad \underbrace{\frac{-3}{-2};\ \frac{14}{-21};\ \frac{-12}{-26};\ \frac{-7}{-30}}_{\text{no son fracciones}}$$

Su forma general es la siguiente:

$$\boxed{f=\frac{N}{D};\ N\in\mathbb{Z}^+;\ D\in\mathbb{Z}^+\wedge N\neq \overset{\circ}{D}}$$

donde

- N : numerador
- D : denominador

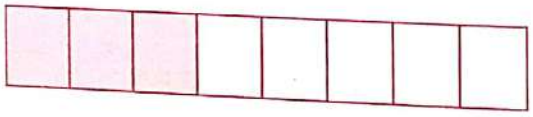
Además, N y D son los términos de la fracción.

6.1. REPRESENTACIÓN GRÁFICA DE UNA FRACCIÓN

¿Que significa la fracción $\frac{3}{8}$?

Gráficamente

$\frac{3}{8}$:



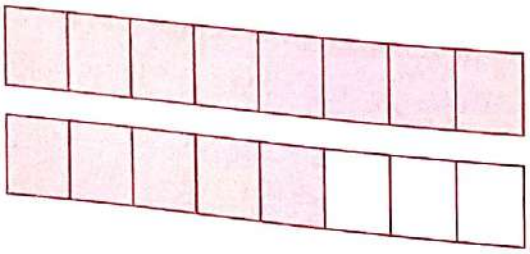
Se observa lo siguiente:

- El denominador indica en cuántas partes se divide el todo (unidad de referencia).
- El numerador representa las partes del todo (unidad de referencia) que se toman o que se consideran.

¿Qué significa la fracción $\frac{13}{8}$?

Gráficamente

$\frac{13}{8}$:



Tenga en cuenta que

$$\frac{13}{8}=\frac{8}{8}+\frac{5}{8}$$

Se observa lo siguiente:

- El denominador indica en cuántas partes se divide el todo (unidad de referencia).
- El numerador representa las partes del todo (unidad de referencia) que se consideran; en este caso se debe considerar dos unidades de referencia.

Aplicación 3

Pedro reparte 3500 soles entre sus tres sobrinos. A uno de ellos le da los 2/5; al otro, los 3/7; y al último, lo restante. ¿Cuál será la diferencia entre la mayor y la menor cantidad repartida?

Resolución

Sabemos que el total es 3500. Veamos lo que le toca a cada uno.

$$\left.\begin{array}{l} \bullet\ \frac{2}{5}(3500)=1400 \\ \bullet\ \frac{3}{7}(3500)=\underset{\text{mayor cantidad}}{1500} \end{array}\right\} 2900$$

- $\text{Resto}=3500-2900=\underset{\text{menor cantidad}}{600}$

Por lo tanto, la diferencia entre la mayor y menor parte es $1500-600=900$.

Aplicación 4

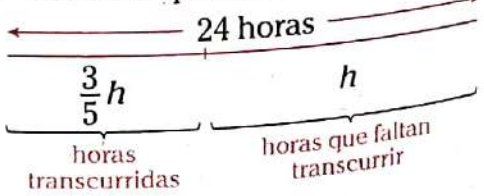
¿Qué hora del día será si han transcurrido las 3/5 partes de lo que falta transcurrir?

Resolución

Supongamos que faltan h horas por transcurrir.

N.° de horas transcurridas: $\frac{3}{5}h$

N.° de horas que faltan transcurrir: h



Entonces

$$h+\frac{3}{5}h=24$$

$$\frac{8}{5}h=24$$

$$h=15 \text{ horas}$$

Faltan transcurrir 15 horas, lo cual significa que son las 9 horas, es decir, las 9:00 a. m.

Aplicación 5

Un caño A puede llenar un tanque en 3 horas y un caño B puede llenar el mismo tanque en 6 horas. ¿En cuántas horas llenarán el estanque si se abren ambos caños simultáneamente?

Resolución

En este tipo de problemas se recomienda ver la fracción del tanque que se llena en la unidad de tiempo.

Caño	Tiempo	En 1 hora
A	3 horas	$\frac{1}{3}$
B	6 horas	$\frac{1}{6}$

En 1 hora, ambos llenarán

$\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=\frac{2+1}{6}=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$ del tanque.

Es decir, juntos llenarían $\frac{1}{2}$ del tanque en 1 hora. Entonces, llenar todo el tanque demorará 2 horas.

Importante

En forma práctica, para hallar el tiempo se invierte la fracción de lo que llena en una hora.

Observación

Tengamos presente que el tiempo resulta ser la inversa de la fracción que representa lo que ambos llenarían juntos en una hora.

Ejemplos

- En 1 hora hacían los $\frac{2}{5}$ de la obra, entonces, toda la obra la harían en $\frac{5}{2}$ horas.
- Si todo el tanque se llena en 4 horas, entonces en 1 hora se llena $\frac{1}{4}$ del tanque.
- Si en 1 hora se llenan los $\frac{4}{5}$ del tanque, entonces, todo el tanque se llena en $\frac{5}{4}$ horas.

Aplicación 6

De un vaso lleno de agua, se bebe la sexta parte y luego la cuarta parte del resto. ¿Qué fracción de lo que queda se debe volver a beber para que aún sobren los 3/8 del total?

Resolución

Consideremos que V es el volumen del vaso lleno de agua.

Luego tenemos lo siguiente:

	se bebe	queda (resto)
1.º	$\frac{1}{6}V$	$\frac{5}{6}V$
2.º	$\frac{1}{4}\underbrace{\left(\frac{5}{6}V\right)}_{\text{resto}}$	$\frac{3}{4}\left(\frac{5}{6}V\right)=\frac{5}{8}V$

Piden

$$\underbrace{f\left(\frac{5}{8}V\right)}_{\text{fracción de lo que queda}}=\frac{3}{8}V$$

$$f=\frac{3}{5}$$

Por lo tanto, se debe beber los $\frac{3}{5}$ de lo que queda.

6.2. SIMPLIFICACIÓN DE UNA FRACCIÓN

Simplificar una fracción significa eliminar algún divisor común de sus dos términos (numerador y denominador). El procedimiento para simplificar una fracción consiste en dividir sus dos términos sucesivamente por los divisores comunes que pueden tener.

Ejemplo

Simplifiquemos la fracción $F=\frac{294}{420}$.

$$F=\frac{294}{420} \text{ entre 2: } \frac{\frac{294}{2}}{\frac{420}{2}}$$

$$F=\frac{147}{210} \text{ entre 3: } \frac{\frac{147}{3}}{\frac{210}{3}}$$

$$F=\frac{49}{70} \text{ entre 7: } \frac{\frac{49}{7}}{\frac{70}{7}}$$

$$\therefore\ F=\frac{7}{10}$$

También se puede hallar el MCD de sus términos por el algoritmo de Euclides.

	1	2	3	
420	294	126	42	← MCD
	126	42	0	

Y luego dividimos cada término entre el MCD.

$$\frac{\frac{294}{42}}{\frac{420}{42}}=\frac{7}{10} \text{ (fracción simplificada)}$$

Nota

Simplificar una fracción a su expresión más simple significa hallar otra equivalente a ella pero de menores términos, es decir, hallar la fracción irreductible.

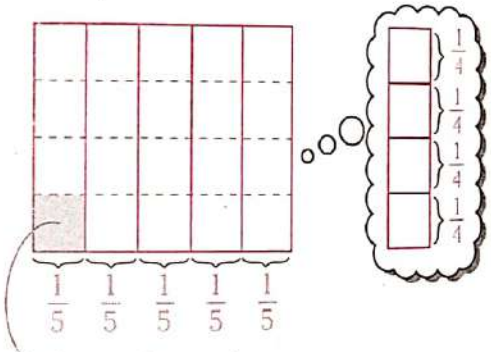
6.3. FRACCIÓN DE FRACCIÓN

Dada una unidad de referencia, si esta se divide en partes iguales y luego cada una de estas partes se vuelve a dividir en partes iguales, se dice que la segunda parte es una fracción de la primera.

Ejemplos

- Hallemos $\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{5}$

Gráficamente tenemos



$\frac{1}{4}$ de $\frac{1}{5}$ es $\frac{1}{20}$

Matemáticamente tenemos

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{1}{5}\right)=\frac{1}{20}$$

Nota

En forma práctica, cuando se tenga una fracción de fracción, las palabras *de*, *del* y *de los* indicarán multiplicación.

- Hallemos los $\frac{3}{4}$ de los $\frac{2}{7}$ de $\frac{77}{15}$.

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{7}\times\frac{77}{15}=\frac{11}{10}$$

- Hallemos los $\frac{2}{9}$ de los $\frac{11}{2}$ de los $\frac{9}{5}$ de 85.

$$\frac{2}{9}\times\frac{11}{2}\times\frac{9}{5}\times 85=187$$

6.4. CLASIFICACIÓN DE LAS FRACCIONES

6.4.1. Por la comparación de su valor con respecto a la unidad

Propia	Impropia
$\frac{N}{D}<1 \leftrightarrow N<D$	$\frac{N}{D}>1 \leftrightarrow N>D$
$\frac{3}{5}; \frac{7}{9}; \frac{13}{20}; \frac{23}{29}$ ...	$\frac{7}{4}; \frac{13}{5}; \frac{35}{13}; \frac{27}{5}$

Observación

- Las fracciones impropias se pueden expresar de la siguiente manera:

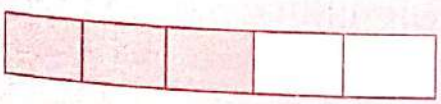
  - $\frac{35}{13}=\underbrace{2\frac{9}{13}}_{\text{número mixto}}=2+\frac{9}{13}$ dado que $\begin{array}{r|l} 35 & 13 \\ \hline 9 & 2 \end{array}$

  - $\frac{22}{5}=\underbrace{4\frac{2}{5}}_{\text{número mixto}}=4+\frac{2}{5}$ dado que $\begin{array}{r|l} 22 & 5 \\ \hline 2 & 4 \end{array}$

  Toda fracción impropia es la suma de un entero más una fracción propia.

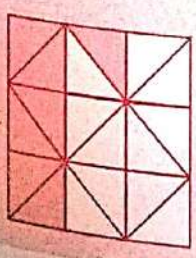
- Todas las fracciones propias se pueden expresar gráficamente.

$\frac{3}{5}$:



$\frac{5}{8}$:

$\frac{7}{18}$:



Aplicación 7

¿Cuántas fracciones propias existen cuyo denominador sea 12?

Resolución

Sea la fracción de la forma $\frac{N}{12}$.

Dado que debe ser propia

$$\rightarrow \frac{N}{12}<1 \rightarrow N<12$$

Como $N \in \mathbb{Z}^+$, luego

$$N \in \{1; 2; 3; 4; ...; 11\}$$

N puede tomar 11 valores y para cada valor se forma una fracción propia.

Por lo tanto, habrán 11 fracciones propias.

Aplicación 8

Los términos de una fracción propia se diferencian en 7 y su producto es 330. Dé la suma de términos de dicha fracción.

Resolución

Como es fracción propia, el denominador debe ser mayor que el numerador y además lo excede en 7 unidades.

$$\rightarrow f=\frac{a}{a+7}$$

Por dato

$$a(a+7)=330=3\times11\times2\times5$$

A la derecha debemos formar dos números que se diferencien en 7 unidades.

$$a(a+7)=15\times22$$

$$a=15$$

Luego,

$$f=\frac{15}{22}$$

Por lo tanto, la suma de términos será

$$15+22=37$$

Aplicación 9

¿Cuántas fracciones impropias existen cuyo numerador sea 13?

Resolución

La fracción será de la forma $\frac{13}{D}$.

Como es impropia, entonces

$$\frac{13}{D} > 1 \rightarrow 13 > D \text{ de ahí } D < 13.$$

Posteriormente,

$$D \in \{2; 3; 4; ...; 12\}$$

Toma 11 valores y para cada valor de D se forma una fracción impropia; por lo tanto, se tendrán 11 fracciones impropias.

Observe que D no puede ser 1, ya que no nos daría una fracción, sino que sería entero.

Aplicación 10

¿Cuántas fracciones impropias de denominador 12 que sean mayores que 23/20 y menores que 3/2 existen?

Resolución

La fracción será de la forma $\frac{N}{12}$.

Por condición, se tiene que

$$\frac{23}{12} < \frac{N}{12} < \frac{3}{2}$$

Multiplicamos por 12.

$$\frac{23 \times 12}{20} < N < \frac{3 \times 12}{2}$$

$$13{,}8 < N < 18$$

$$\rightarrow N \in \{14; 15; 16; 17\}$$

Hay cuatro valores para N; por lo cual se originan cuatro fracciones impropias, las cuales son

$$\frac{14}{12}; \frac{15}{12}; \frac{16}{12}; \frac{17}{12}$$

6.4.2. Por su denominador

Decimal	Ordinaria
$D=10^K$ $(K \in \mathbb{Z}^+)$	$D \neq 10^K$ $(K \in \mathbb{Z}^+)$
$\frac{7}{10}; \frac{24}{10^2}; \frac{32}{10^3}; \frac{48}{10^4}$	$\frac{4}{9}; \frac{24}{18}; \frac{35}{45}; \frac{72}{128}$

Note que las fracciones no necesariamente deben estar en su forma irreductible.

Aplicación 11

¿Cuántas fracciones de la forma $\frac{N}{10^2}$ se encuentran entre $\frac{7}{20}$ y $\frac{11}{25}$?

Resolución

Tenemos

$$\frac{7}{20} < \frac{N}{100} < \frac{11}{25}$$

Multiplicamos por 100 cada una de las fracciones.

$$\frac{7}{20} \times 100 < \frac{N}{100} \times 100 < \frac{11}{25} \times 100$$

$$35 < N < 44$$

$$N \in \underbrace{\{36; 37; 38; ...; 43\}}_{8 \text{ valores}}$$

Para cada valor de N se forma una fracción, y como son 8 valores para N, se formarán 8 fracciones.

6.4.3. Por la cantidad de divisores comunes entre sus términos

Irreductible	Reductible
N y D son PESI, es decir, MCD(N; D)=1.	N y D no son PESI, es decir, MCD(N; D) $\neq$ 1.
$\frac{3}{11}; \frac{13}{5}; \frac{32}{21}; \frac{75}{14}$	$\frac{16}{24}; \frac{28}{44}; \frac{72}{128}; \frac{32}{56}$

Observación

- A partir de una fracción irreductible se puede obtener fracciones equivalentes a ella, para lo cual bastará multiplicar al numerador y al denominador por una misma cantidad entera positiva.
  - $\frac{2}{7}=\frac{4}{14}=\frac{6}{21}=\frac{8}{28}=\frac{10}{35}=\ldots=\frac{2n}{7n};\ n\in\mathbb{Z}^+$
  - $\frac{3}{5}=\frac{6}{10}=\frac{9}{1}=\frac{12}{20}=\ldots=\frac{3K}{5K};\ K\in\mathbb{Z}^+$
- Si $f=\frac{N}{D}$ es una fracción reductible, entonces, podemos decir que

  $\text{MCD}(N; D)=d;\ d\neq 1$

  $N=d\times p\ \wedge\ D=d\times q$

  en donde p y q son PESI.

  Luego reemplazamos

  $f=\frac{N}{D}=\frac{dp}{dq}=\frac{p}{q}$

  $\rightarrow\ \frac{N}{D}$ es equivalente a la fracción irreductible $\frac{p}{q}$.

Aplicación 12

Halle una fracción equivalente a $\frac{2584}{4199}$, de manera que la suma de sus términos sea 252.

Resolución

En principio, debemos expresar la fracción $\frac{2584}{4199}$ en su forma irreductible.

Aplicamos el algoritmo de Euclides para encontrar su máximo común divisor.

	1	1	1	1	2
4199	2584	1615	969	646	323
	1615	969	646	323	0

Entonces

$\text{MCD}(4199; 2584)=323$

Expresamos numerador y denominador teniendo como factor al MCD.

$$f=\frac{2584}{4199}=\frac{8\times 323}{13\times 323}=\frac{8}{13}$$

Una fracción equivalente será de la forma

$$f=\frac{8K}{13K}$$

Por dato, la suma de términos es 252.

$\rightarrow\ 8K+13K=252$

$21K=252$

$K=12$

Finalmente,

$$f=\frac{8\times 12}{13\times 12}=\frac{96}{156}$$

Aplicación 13

De las fracciones que tienen como numerador a 120, determine lo siguiente:

I. El número de fracciones impropias.

II. El número de fracciones impropias e irreductibles.

Resolución

Las fracciones deben ser de la forma $\frac{120}{D}$.

I. Como son impropias

$$\frac{120}{D}>1\ \rightarrow\ D<120$$

Además, D no debe ser divisor de 120, es decir

$120=2^3\times 3\times 5$

$\text{CD}_{(120)}=4\times 2\times 2=16$

Como D es menor que 120, D tomará

$119-15=104$ valores.

Para cada valor formará una fracción impropia; luego, se formarán 104 fracciones impropias.

II. En este caso, $D < 120$; además, no debe tener divisores comunes con 120, es decir, tiene que ser PESI con 120. Recordemos que en el capítulo de estudio de los divisores $\mathbb{Z}^+$, el indicador de un número $\phi(N)$ nos permitía hallar la cantidad de números menores a N y PESI con N.

Entonces, bastará con hallar $\phi(120)$.

Como $120=2^3\times3\times5$

$\rightarrow\ \phi(120)=2^2(2-1)\times3^0(3-1)\times5^0(5-1)$

$\phi(120)=4\times2\times4=32$

No obstante, hay que tener presente que está considerado el 1; por lo tanto, se tendrán 31 fracciones impropias e irreductibles.

Aplicación 14

¿Para cuántos valores de p menores que 28 la fracción $f=\dfrac{p^2+28p}{p+1}$ es reductible?

Resolución

Se sabe que f se puede expresar como

$$\frac{p^2+p+27p}{p+1}=\frac{p(p+1)+27p}{(p+1)}=p+\frac{27p}{p+1}$$

Como p y $p+1$ son PESI, por ser consecutivos, $p+1$ debe tener divisores en común con 27 y no debe ser divisor de 27 ($p\neq2;\ 8;\ 26$).

$$p+1=\overset{\circ}{3}\ \rightarrow\ p=\overset{\circ}{3}-1$$

además, considerando que $p<28$

$$p:\ \underbrace{\cancel{2};\ 5;\ \cancel{8};\ 11;\ 14;\ 17;\ 20;\ 23;\ \cancel{26}}_{9\text{ valores}-3\text{ valores}}$$

Para cada valor de p se formará una fracción reductible; por lo tanto, se tendrán seis fracciones reductibles.

6.4.4. Por grupo de fracciones

Homogéneas	Heterogéneas
Todas las fracciones tienen el mismo denominador.	Al menos una de las fracciones tendrá un denominador diferente de las demás.
$\frac{5}{17};\ \frac{9}{17};\ \frac{4}{17};\ \frac{21}{17}$ Grupo de fracciones homogéneas	$\frac{5}{12};\ \frac{3}{12};\ \frac{27}{12};\ \frac{9}{19}$ Grupo de fracciones heterogéneas

6.5. COMPARACIÓN DE FRACCIONES

6.5.1. Solo para dos fracciones

Bastará realizar el producto en aspa. El mayor producto indicará la mayor fracción.

Ejemplos

- $\underbrace{\frac{3}{5}}_{f_1}\times\underbrace{\frac{7}{9}}_{f_2}$ $\rightarrow\ p_2=5\times7=35$
  $\rightarrow\ p_1=3\times9=27$

  $p_1<p_2\ \rightarrow\ f_1<f_2$

- $\underbrace{\frac{2}{13}}_{f_1}\times\underbrace{\frac{3}{23}}_{f_2}$ $\rightarrow\ p_2=13\times3=39$
  $\rightarrow\ p_1=2\times23=46$

  $p_1>p_2\ \rightarrow\ f_1>f_2$

En general,

Sean las fracciones $\underbrace{\frac{a}{b}}_{f_1}\ \underbrace{\frac{c}{d}}_{f_2}$

- Si $a\times d>b\times c\ \rightarrow\ f_1>f_2$
- Si $a\times d<b\times c\ \rightarrow\ f_1<f_2$

6.5.2. Para fracciones homogéneas

Será mayor aquella fracción que tenga mayor numerador.

Ejemplos

- Ordenemos de mayor a menor las siguientes fracciones:

$$\frac{7}{43}; \frac{15}{43}; \frac{2}{43}; \frac{23}{43}; \frac{17}{43}$$

Se observa que

$$23 > 17 > 15 > 7 > 2$$

Luego, se ordena de manera decreciente.

$$\frac{23}{43} > \frac{17}{43} > \frac{15}{43} > \frac{7}{43} > \frac{2}{43}$$

- Ordenemos de menor a mayor las siguientes fracciones:

$$\frac{17}{23}; \frac{19}{23}; \frac{5}{23}; \frac{13}{23}; \frac{3}{23}$$

Se observa que

$$3 < 5 < 13 < 17 < 19$$

Luego, se ordena de manera creciente.

$$\frac{3}{23} < \frac{5}{23} < \frac{13}{23} < \frac{17}{23} < \frac{19}{23}$$

6.5.3. Para fracciones heterogéneas

a. Homogeneizando el denominador

Dadas las fracciones heterogéneas se transformarán a homogéneas y se procederá a ordenarlas. Para ello se halla el MCM de los denominadores y el nuevo numerador, que se hallará multiplicando el numerador inicial por el cociente de dividir el MCM entre el denominador inicial.

Ejemplo

Ordenemos las fracciones: $\frac{5}{7}; \frac{3}{5}; \frac{7}{10}$.

Hallemos MCM(7; 5; 10)=70

$$\frac{5\times10}{70}; \frac{3\times14}{70}; \frac{7\times7}{70}$$

De ahí se tendrá que

$$\frac{50}{70}; \frac{42}{70}; \frac{49}{70}$$

Ahora se procede como en el caso de las fracciones homogéneas.

Ordenamos de mayor a menor.

$$\frac{50}{70} > \frac{49}{70} > \frac{42}{70} \rightarrow \frac{5}{7} > \frac{7}{10} > \frac{3}{5}$$

Ordenamos de menor a mayor.

$$\frac{42}{70} < \frac{49}{70} < \frac{50}{70} \rightarrow \frac{3}{5} < \frac{7}{10} < \frac{5}{7}$$

b. Homogeneizando el numerador

Se procede de manera similar al caso anterior, es decir, ahora homogeneizamos los numeradores hallando el MCM de los numeradores. De esta manera, el nuevo denominador se hallará multiplicando el denominador inicial por el cociente de dividir el MCM entre el numerador inicial. Será mayor la fracción que tenga el menor denominador.

Ejemplo

Ordenemos las fracciones $\frac{4}{5}; \frac{8}{17}$ y $\frac{5}{13}$

Hallamos MCM(4; 8; 5)=40.

$$\frac{40}{5\times10}; \frac{40}{17\times5}; \frac{40}{13\times8}$$

De ahí tendremos

$$\frac{40}{50}; \frac{40}{85}; \frac{40}{104}$$

Ordenamos de menor a mayor.

$$\frac{40}{104} < \frac{40}{85} < \frac{40}{50} \rightarrow \frac{5}{13} < \frac{8}{17} < \frac{4}{5}$$

Ordenamos de mayor a menor.

$$\frac{40}{50} > \frac{40}{85} > \frac{40}{104} \rightarrow \frac{4}{5} > \frac{8}{17} > \frac{5}{13}$$

6.6. OPERACIONES CON FRACCIONES

6.6.1. Adición y sustracción de fracciones

Caso 1

Si las fracciones son homogéneas, el resultado se obtiene sumando algebraicamente (teniendo en cuenta los signos) los numeradores y manteniendo el mismo denominador.

Ejemplos

- $\frac{13}{20}-\frac{2}{20}+\frac{7}{20}-\frac{11}{20}=\frac{13-2+7-11}{20}=\frac{7}{20}$
- $\frac{13}{30}-\frac{7}{30}+\frac{4}{30}=\frac{13-7+4}{30}=\frac{10}{30}=\frac{1}{3}$

Caso 2

Si las fracciones son heterogéneas, primero se transforman en irreductibles y luego se homogeneizan (denominadores). Finalmente, se procede como lo indica el caso 1.

Ejemplos

- Operemos $\frac{25}{30}+\frac{15}{9}-\frac{14}{24}+\frac{12}{16}$.

  Simplificamos.

  $$\frac{5}{6}+\frac{5}{3}-\frac{7}{12}+\frac{3}{4}$$

  Como MCM(6; 3; 12; 4)=12

  $$\frac{10}{12}+\frac{20}{12}-\frac{7}{12}+\frac{9}{12}=\frac{10+20-7+9}{12}=\frac{32}{12}$$

- Operemos $\frac{15}{60}-\frac{7}{10}+\frac{16}{30}$.

  Simplificamos.

  $$\frac{1}{4}-\frac{7}{10}+\frac{8}{15}$$

  Como MCM(4; 10; 15)=60

  $$\frac{15}{60}-\frac{42}{60}+\frac{32}{60}=\frac{15-42-32}{60}=\frac{5}{60}=\frac{1}{12}$$

Aplicación 15

Una persona ha dado a instituciones benéficas 1/3, 1/4 y 1/5 de su dinero. Si aún le quedan 26 000 soles, ¿cuánto dinero tenía?

Resolución

Supongamos que la persona tenía N soles.

1.º $\frac{1}{3}N$

2.º $\frac{1}{4}N$

3.º $\frac{1}{5}N$

Veamos cuánto ha repartido del total.

$$\frac{1}{3}N+\frac{1}{4}N+\frac{1}{5}N=$$

$$\frac{20N+15N+12N}{60}=\frac{47N}{60}$$

Luego le quedará

$$N-\frac{47}{60}N=\frac{13}{60}N$$

Por dato,

$$\frac{13}{60}N=26\,000$$

$$N=120\,000$$

Por lo tanto, tenía 120 000 soles.

Nota

Si se desea operar fracciones impropias, se sumarán por separado los valores enteros de las fracciones propias y, al final, el resultado será una fracción impropia.

Ejemplo

Operamos

$$E=\left(3\frac{1}{2}\right)+\left(5\frac{1}{3}\right)-\frac{1}{6}$$

$$E=(3+5)+\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)$$

$$E=8+\frac{3+2-1}{6}=8+\frac{4}{6}$$

$$\therefore\ E=8+\frac{2}{3}=\frac{26}{3}$$

Observación

- Sea una cantidad que se le aumenta en una fracción conocida de sí misma.

Ejemplo

- N aumenta en su mitad

$$N+\frac{1}{2}N=\frac{3}{2}N$$

- P aumenta en sus dos quintos

$$P+\frac{2}{5}P=\frac{7}{5}P$$

Si R aumenta en su $\frac{a}{b}$, se tendrá $\frac{a+b}{b}R$.

- Sea una cantidad que se le disminuye en una fracción conocida de sí misma.

Ejemplo

- A disminuye en un tercio

$$A-\frac{1}{3}A=\frac{2}{3}A$$

- B disminuye en tres séptimos

$$B-\frac{3}{7}B=\frac{4}{7}B$$

Si T disminuye en su $\frac{a}{b}$, se tendrá $\frac{b-a}{b}T$.

6.6.2. Multiplicación de fracciones

Caso 1

Cuando todos los multiplicandos son fracciones, se multiplican los numeradores; y los denominadores correspondientes se pueden simplificar previamente.

Ejemplos

- $\frac{4}{7}\times\frac{3}{10}\times\frac{14}{15}=\frac{4\times3\times14}{7\times10\times15}=\frac{4}{25}$
- $\frac{2}{9}\times\frac{5}{4}\times\frac{3}{7}\times\frac{11}{25}=\frac{2\times5\times3\times11}{9\times4\times7\times25}=\frac{11}{210}$

Caso 2

Cuando se multiplica una fracción por un entero, se debe multiplicar el numerador por el entero, manteniéndose el mismo denominador.

Ejemplos

- $15\times\frac{3}{7}=\frac{15\times3}{7}=\frac{45}{7}$
- $24\times\frac{5}{26}=\frac{24\times5}{26}=\frac{60}{13}$

Aplicación 16

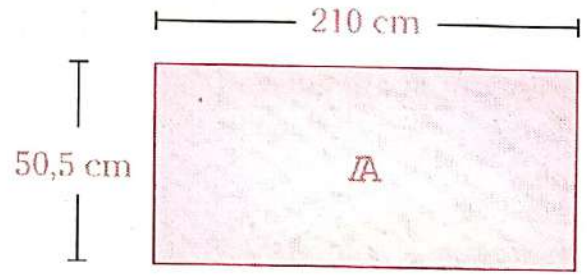
¿Qué área tiene un rectángulo de 2,10 m de largo y 50,5 centímetros de ancho, expresada en cm^2?

Resolución

Primero tengamos en cuenta que

2,10 m <>210 cm.

Luego tendremos lo siguiente:



$$50,5=50+\frac{1}{2}=\frac{101}{2}\text{ cm}$$

Sabemos que Área=largo×ancho.

$$A=\frac{101}{2}\times210$$

$$A=101\times105$$

$$\therefore\ A=10\,605\text{ cm}^2$$

6.6.3. División de fracciones

Caso 1

Para dividir una fracción f_1 entre otra fracción f_2, se debe multiplicar la fracción f_1 por el inverso de la fracción f_2.

Ejemplos

- Dividimos $\frac{3}{7}$ entre $\frac{2}{5}$.

$$\frac{3}{7} \div \frac{2}{5} = \frac{3}{7} \times \frac{5}{2} = \frac{15}{14}$$

- Dividimos $\frac{12}{25}$ entre $\frac{3}{5}$.

$$\frac{12}{25} \div \frac{3}{5} = \frac{12}{25} \times \frac{5}{3} = \frac{4}{5}$$

En general,

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \left[\frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{d}}\right] = \frac{a \times d}{b \times c} = \frac{a}{b} \times \frac{d}{c}$$

Caso 2

Para dividir una fracción entre un entero, se coloca el mismo numerador y se multiplica el denominador por el entero.

Ejemplos

- Dividimos $\frac{5}{7}$ entre 4

$$\frac{5}{7} \div 4 = \frac{5}{7 \times 4} = \frac{5}{28}$$

- Dividimos $\frac{15}{32}$ entre 10

$$\frac{15}{32} \div 10 = \frac{15}{32 \times 10} = \frac{3}{64}$$

En general,

$$\frac{a}{b} \div c = \frac{\frac{a}{b}}{\frac{c}{1}} = \frac{a}{b \times c}; c \in \mathbb{Z}^+$$

Caso 3

Para dividir un entero entre una fracción, el resultado tendrá como numerador al producto del entero por el denominador, y tendrá como denominador al numerador de la fracción.

Ejemplos

- Dividimos 5 entre $\frac{3}{8}$.

$$5 \div \frac{3}{8} = \frac{5 \times 8}{3} = \frac{40}{3}$$

- Dividimos 10 entre $\frac{22}{9}$.

$$10 \div \frac{22}{9} = \frac{10 \times 9}{22} = \frac{45}{11}$$

En general,

$$c \div \frac{a}{b} = \frac{\frac{c}{1}}{\frac{a}{b}} = \frac{c \times b}{a}$$

6.7. PROPIEDADES DE LAS FRACCIONES

Propiedad 1

Caso 1

Si a los términos de una fracción propia se les suma un mismo valor (entero positivo), la nueva fracción formada será mayor que la primera.

$$f_1 = \frac{a}{b} < 1 \text{ y } f_2 = \frac{a+m}{b+m} \rightarrow f_1 < f_2; m \in \mathbb{Z}^+$$

Demostración

Tenemos por condición

$$f_1 = \frac{a}{b} < 1$$

Entonces

$$a < b$$

Multiplicamos por m ($m \in \mathbb{Z}^+$) a ambos miembros de la desigualdad.

$$am < bm$$

Sumamos ab a ambos miembros de la desigualdad.

$$am+ab < bm+ab$$

Factorizamos adecuadamente.

$$a(b+m) < b(a+m)$$

De ahí

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{f_1} < \underbrace{\frac{a+m}{b+m}}_{f_2}$$

$$\therefore\ f_1 < f_2$$

Ejemplo

Sea $f_1=\frac{2}{5}<1$; $f_2=\frac{2+5}{5+5}=\frac{7}{10}$

se observa que $\frac{2}{5}=\frac{4}{10}$ y $\frac{4}{10}<\frac{7}{10}$

$\therefore\ f_1 < f_2$

Caso 2

Si a los términos de una fracción impropia se le suma un mismo valor (entero positivo), la nueva fracción así formada será menor que la primera.

$$f_1=\frac{a}{b}>1 \text{ y } f_2=\frac{a+m}{b+m} \rightarrow f_1 > f_2;\ m \in \mathbb{Z}^+$$

Demostración

Tenemos por condición

$$f_1=\frac{a}{b}>1$$

Entonces

$$a > b$$

Multiplicamos por m ($m \in \mathbb{Z}^+$) a ambos miembros de la desigualdad.

$$am > bm$$

Sumamos ab a ambos miembros de la desigualdad.

$$am+ab > bm+ab$$

Factorizamos adecuadamente.

$$a(b+m) > b(a+m)$$

De ahí que

$$\underbrace{\frac{a}{b}}_{f_1} > \underbrace{\frac{a+m}{b+m}}_{f_2}$$

$$\therefore\ f_1 > f_2$$

Ejemplo

Sea $f_1=\frac{7}{5}>1$; $f_2=\frac{7+5}{5+5}=\frac{12}{10}$

se observa que $\frac{7}{5}=\frac{14}{10}$ y $\frac{14}{10}>\frac{12}{10}$

$\therefore\ f_1 > f_2$

Aplicación 17

Compare las siguientes fracciones y ordénelas de mayor a menor.

$\frac{12}{17}$; $\frac{18}{23}$; $\frac{2}{7}$; $\frac{24}{29}$

Resolución

Se puede observar lo siguiente:

$$\frac{12}{17}=\frac{2+10}{7+10} \rightarrow \frac{12}{17}>\frac{2}{7}$$

$$\frac{18}{23}=\frac{12+6}{17+6} \rightarrow \frac{18}{23}>\frac{12}{17}$$

$$\frac{24}{29}=\frac{18+6}{23+6} \rightarrow \frac{24}{29}>\frac{18}{23}$$

De ahí tendremos que

$$\frac{24}{29}>\frac{18}{23}>\frac{12}{17}>\frac{2}{7}$$

(orden decreciente)

Aplicación 18

Compare las siguientes fracciones:

$\frac{19}{13}; \frac{31}{25}; \frac{37}{31}; \frac{23}{17}$

Ordénelas de menor a mayor.

Resolución

Se puede observar lo siguiente:

$$\frac{23}{17}=\frac{19+4}{13+4} \rightarrow \frac{23}{17}<\frac{19}{13}$$

$$\frac{31}{25}=\frac{23+8}{17+8} \rightarrow \frac{31}{25}<\frac{23}{17}$$

$$\frac{37}{31}=\frac{31+6}{25+6} \rightarrow \frac{37}{31}<\frac{31}{25}$$

De ahí que

$$\frac{37}{31}<\frac{31}{25}<\frac{23}{17}<\frac{19}{13}$$

(orden creciente)

Propiedad 2

Dadas las fracciones irreductibles

$$f_1=\frac{a}{b} \text{ y } f_2=\frac{c}{d}$$

De tal manera que

$$\boxed{\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=K \wedge K\in\mathbb{Z}^+ \rightarrow b=d}$$

Demostración

Sea la hipótesis

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=K;\ K\in\mathbb{Z}^+$$

Multiplicamos por bd a ambos miembros.

$$ad+cb=Kbd \qquad \text{(I)}$$

En (I) puede evaluarse en función de $\overset{\circ}{b}$.

$$\rightarrow ad+\overset{\circ}{b}=\overset{\circ}{b}$$

$$ad=\overset{\circ}{b}$$

Como a y b son PESI, pues $\frac{a}{b}$ es irreductible.

$$\rightarrow d=\overset{\circ}{b} \qquad \text{(II)}$$

Expresamos (I) en función de $\overset{\circ}{d}$.

$$\rightarrow \overset{\circ}{d}+bc=\overset{\circ}{d}$$

$$bc=\overset{\circ}{d}$$

Como c y d son PESI, puesto que $\frac{c}{d}$ es irreductible.

$$\rightarrow b=\overset{\circ}{d} \qquad \text{(III)}$$

Por lo tanto, de (II) y (III) tendremos que

$$b=d$$

Aplicación 19

Calcule $m+n+p+q$, dado que $\frac{17}{\overline{mn}}+\frac{\overline{pq}}{19}=m+q$; donde $\frac{17}{\overline{mn}}$ y $\frac{\overline{pq}}{19}$ son fracciones irreductibles.

Resolución

Por propiedad, ya que $m+q$ es entero, entonces $\overline{mn}=19$.

Reemplazamos.

$$\frac{17}{19}+\frac{\overline{pq}}{19}=1+q$$

$$17+\overline{pq}=19+19q$$

$$\overline{pq}=2+19q$$

$$\overline{p0}+q=2+19q$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\2}}{\overline{p0}}=2+\underset{\substack{\downarrow\\1}}{18q}$$

$$\therefore\ m+n+p+q=1+9+2+1=13$$

Aplicación 20

La suma de dos fracciones impropias irreductibles es 3. Si la suma de los numeradores más la suma de los denominadores es 15, determine el mayor valor de la suma del producto de numeradores y denominadores.

Resolución

Por dato

$$\frac{a}{b}+\frac{c}{d}=3 \rightarrow b=d$$

$$\underbrace{(a+c)}+\underbrace{(b+d)}=15$$

$$3b + 2b = 15$$

$$b=3$$

Luego,

$$a + c=9$$

1	8
2	7
4	5
5	4
7	2
8	1

Nos piden

$$(a\times c+b\times d)_{\text{máx}}$$

$\rightarrow a=4;\ c=5;\ b=d=3$

$\therefore\ (a\times c+b\times d)_{\text{máx}}=29$

Propiedad 3

Sean las fracciones irreductibles

$$\frac{a}{b};\ \frac{c}{d}\ \text{y}\ \frac{e}{f}$$

$$\boxed{\text{MCD}\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right]=\frac{\text{MCD}(a;\,c;\,e)}{\text{MCM}(b;\,d;\,f)}}$$

$$\boxed{\text{MCM}\left[\frac{a}{b};\frac{c}{d};\frac{e}{f}\right]=\frac{\text{MCM}(a;\,c;\,e)}{\text{MCD}(b;\,d;\,f)}}$$

Aplicación 21

Se tiene 3 frascos de 1 litro cada uno, con sustancias diferentes. Se extrae 2/30; 6/20 y 12/75 de cada uno, respectivamente; luego se desea distribuir el contenido restante (sin mezclar las sustancias) en frascos iguales cuya capacidad sea una fracción de litro, sin desperdiciar nada del contenido de las sustancias. Si cada frasco debe estar lleno, ¿cuántos frascos se utilizarán si esta cantidad tiene que ser la menor posible?

Resolución

Se tiene lo siguiente:

Se extrae	Queda
$\frac{2}{30}$	$\frac{28}{30} <> \frac{14}{15}$
$\frac{6}{20}$	$\frac{14}{20} <> \frac{7}{10}$
$\frac{12}{75}$	$\frac{63}{75} <> \frac{21}{25}$

Sea L la capacidad del frasco que debe ser un volumen contenido en las fracciones anteriores, entonces, la capacidad es un divisor común; y dado que se desea utilizar el menor número de frascos posibles, dicha capacidad debe ser máxima.

Luego, como es divisor común y el mayor posible, se tendrá que

$$L=\text{MCD}\left[\frac{14}{15};\ \frac{7}{10};\ \frac{21}{25}\right]$$

$$L=\frac{\text{MCD}(14;\,7;\,21)}{\text{MCM}(15;\,10;\,25)}=\frac{7}{150}$$

$$\rightarrow\ \text{N.º de envases}=\underbrace{\frac{\frac{14}{15}}{\frac{7}{150}}}_{20}+\underbrace{\frac{\frac{7}{10}}{\frac{7}{150}}}_{15}+\underbrace{\frac{\frac{21}{25}}{\frac{7}{150}}}_{18}=53$$

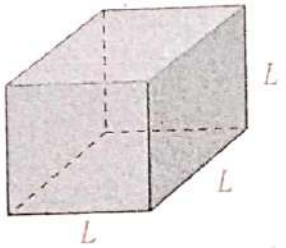
Por lo tanto, se utilizarán 53 frascos.

Aplicación 22

Las dimensiones de un ladrillo en forma de paralelepípedo son 24/25 dm, 8/15 dm y 16/35 dm, respectivamente. ¿Cuántos ladrillos, como mínimo, se podrán trasladar en la tolva de un camión que tiene la forma de un cubo compacto?

Resolución

Sea la forma de la tolva la siguiente:



Como L debe contener exactamente un número de veces a las longitudes del ladrillo, entonces debe ser un múltiplo común de dichas dimensiones. Dado que se pide formar el menor cubo compacto, L debe ser mínimo.

Luego, como debe ser múltiplo común y mínimo tendremos que

$$L=\text{MCM}\left(\frac{24}{25};\frac{8}{15};\frac{16}{35}\right)$$

$$L=\frac{\text{MCM}(24;\,8;\,16)}{\text{MCD}(25;\,15;\,35)}=\frac{48}{5}\,.$$

Luego,

$$\text{N.º de ladrillos}=\frac{\text{volumen del cubo}}{\text{volumen de un ladrillo}}$$

$$\text{N.º de ladrillos}=\frac{\frac{48}{5}\times\frac{48}{5}\times\frac{48}{5}}{\frac{24}{25}\times\frac{8}{15}\times\frac{16}{35}}=3780$$

Por lo tanto, se podrá trasladar 3780 ladrillos.

7 ▸ NÚMEROS DECIMALES

Son aquellos números que resultan de dividir los términos de una fracción en el sistema decimal. Al realizar la división en una base diferente a la base diez, se denominará número aval al resultado.

$\frac{325}{8}=40{,}625$ — Número decimal exacto

$\frac{3}{11}=0{,}2727...$ — Número decimal inexacto periódico puro

$\frac{5}{6}=0{,}833...$ — Número decimal inexacto periódico mixto

$\frac{73}{36}=\frac{201_6}{100_6}=2{,}01_6$ — Número exaval exacto

$\frac{32}{24}=\frac{112_5}{44_5}=1{,}1313...{}_5$ — Número pentaval periódico puro

$\frac{125}{80}=\frac{148_9}{88_9}=1{,}5050...{}_9$ — Número nonaval periódico puro

De lo anterior, se puede observar que todo número aval presenta dos partes.

$\overbrace{7}^{\text{parte entera}}\,,\ \overbrace{42}^{\text{parte decimal}}$ — coma decimal

$\overbrace{235}^{\text{parte entera}}\,,\ \overbrace{32_9}^{\text{parte aval}}$ — coma nonaval

En general,

$$\underbrace{\overline{abc...h}}_{\text{parte entera}}\ ,\ \underbrace{\overline{pq...x}_n}_{\text{parte aval}}$$

En el cual podríamos observar con respecto a sus cifras un orden.

$\overset{\text{orden}}{\leftarrow}$ 2 1 $\quad$ $\overset{\text{orden}}{\rightarrow}$ −1 −2 −3

4 3 , 2 5 1

$\overset{\text{orden}}{\leftarrow}$ 4 3 2 1 $\quad$ $\overset{\text{orden}}{\rightarrow}$ −1 −2 −3 −4

4 1 3 2 , 3 2 0 1_6

7.1. DESCOMPOSICIÓN POLINÓMICA

El caso de la parte entera ya fue estudiado en numeración; en la parte decimal (aval), también se podría realizar una descomposición que en forma práctica le llamaremos polinómica.

- $12{,}43=1\times10+2\times10^0+\frac{4}{10^1}+\frac{3}{10^2}$
- $27{,}3232...=2\times10+7\times10^0+\frac{3}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{3}{10^3}+\frac{2}{10^4}+...$
- $23{,}321_5=2\times5^1+3\times5^0+3\times5^{-1}+2\times5^{-2}+1\times5^{-3}$

  $=2\times5^1+3\times5^0+\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{1}{5^3}$
- $452{,}35_7=4\times7^2+5\times7^1+2\times7^0+3\times7^{-1}+5\times7^{-2}$

  $=4\times7^2+5\times7^1+2\times7^0+\frac{3}{7}+\frac{5}{7^2}$
- $132{,}672_9=1\times9^2+3\times9^1+2\times9^0+6\times9^{-1}$

  $+7\times9^{-2}+2\times9^{-3}$

  $=1\times9^2+3\times9^1+2\times9^0+\frac{6}{9}+\frac{7}{9^2}+\frac{2}{9^3}$

Nota

Como ya se mencionó, la parte entera fue estudiada en el capítulo de numeración, en esta parte estudiaremos números decimales (avales) cuya parte entera es cero, es decir, aquellos que se obtienen al dividir los términos de una fracción propia.

- $0{,}45=\frac{4}{10}+\frac{5}{10^2}$
- $0{,}3232=\frac{3}{10}+\frac{2}{10^2}+\frac{2}{10^3}+\frac{2}{10^4}+...$
- $0{,}241_9=\frac{2}{9}+\frac{4}{9^2}+\frac{1}{9^3}$
- $0{,}121212..._7=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\frac{1}{7^5}+\frac{2}{7^6}+...$
- $0{,}3232323..._5=\frac{3}{5}+\frac{2}{5^2}+\frac{3}{5^3}+\frac{2}{5^4}+\frac{3}{5^5}+\frac{2}{5^6}+...$

7.2. CLASIFICACIÓN DE LOS NÚMEROS DECIMALES (AVALES)

Cuando se realiza el cociente de los términos de una fracción, dicho cociente puede ser exacto o inexacto; de la misma forma, los decimales (avales) podrán ser exactos o inexactos.

Ejemplos

- $\frac{7}{16}=0{,}4375$ división exacta
- $\frac{14}{33}=0{,}424242...$ división inexacta
- $\frac{5}{22}=0{,}2272727...$ división inexacta
- $\frac{7}{16}=0{,}13_4$ división exacta
- $\frac{3}{5}=\frac{3_4}{11_4}=0{,}2121..._4$ división inexacta
- $\frac{7}{10}=\frac{13_4}{22_4}=0{,}23030..._4$ división inexacta

7.2.1. Número decimal (aval) exacto

Se da cuando la división de los términos de la fracción resulta exacta. Esto significa que la cantidad de cifras de la parte decimal (aval) es limitada.

Dados los siguientes números decimales (avales) exactos, procederemos a analizar qué fracciones los han originado, así como las características de estas fracciones.

- $F_1=0{,}36$

  $100F_1=36$

  $\rightarrow F_1=\frac{36}{10^2}=\frac{9}{25}=\frac{9}{5^2}$

- $F_2=0{,}375$

  $1000F_2=375$

  $\rightarrow \quad F_2=\dfrac{375}{10^3}=\dfrac{3}{8}=\dfrac{3}{2^3}$

- $F_3=0{,}236$

  $1000F_3=236$

  $\rightarrow \quad F_3=\dfrac{236}{1000}=\dfrac{59}{2\times5^3}$

- $F_4=0{,}42_6$

  $100_6F_4=42_6$

  $\rightarrow \quad F_4=\dfrac{42_6}{100_6}=\dfrac{26}{36}=\dfrac{13}{2\times3^2}$

- $F_5=0{,}134_6$

  $1000_6F_5=134_6$

  $\rightarrow \quad F_5=\dfrac{134_6}{6^3}=\dfrac{29}{108}=\dfrac{29}{2^2\times3^3}$

Se observa que la fracción irreductible $F=\dfrac{A}{B}$ genera decimal exacto si y solo si B admite como factores primos al 2 o 5 únicamente; la cantidad de cifras de la parte decimal será el mayor exponente de 2 o 5 en el denominador.

En general, la fracción irreductible $F=\dfrac{A}{B}$ genera un número aval exacto si y solo si B admite como divisores primos únicamente a los divisores primos de la base aval o al menos uno de dichos divisores primos; además, la cantidad de cifras de la parte aval estará dada por el exponente de la menor potencia de la base que contiene exactamente al denominador.

Ejemplos

En las fracciones dadas a continuación, hallaremos en qué base se generan avales exactos.

- $\dfrac{30}{125}=\dfrac{6}{25}=\dfrac{6}{5^2}$ — decimal exacto con 2 cifras decimales
- $\dfrac{13}{40}=\dfrac{13}{2^3\times5}$ — decimal exacto con 3 cifras decimales
- $\dfrac{15}{98}=\dfrac{15}{2\times7^2}$ — aval exacto en base (2; 7 o 14) con 2 cifras avales
- $\dfrac{11}{15}=\dfrac{11}{3\times5}$ — aval exacto en base (3; 5 o 15) con 1 cifra aval
- $\dfrac{5}{72}=\dfrac{5}{3^2\times2^3}$ — exaval exacto con 3 cifras en la parte aval
- $\dfrac{7}{81}=\dfrac{7}{3^4}$ — triaval exacto con 4 cifras en la parte aval

Observación

- Si un número es aval exacto en cierta base, no necesariamente será aval exacto en otra.
- La última cifra de la parte decimal (aval) de un número exacto siempre es diferente de cero.

Debemos tener en cuenta la fracción generatriz, fracción que genera al número decimal.

Para un decimal exacto se tiene que

$$F=0,\underbrace{\overline{abc...x}}_{k\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc...x}}{\underbrace{100...00}_{k\text{ ceros}}}$$

En general (aval exacto), se tiene que

$$F=0,\underbrace{\overline{abc...x}_n}_{k\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc...x_n}}{\underbrace{100...00}_{k\text{ ceros}}}$$

7.2.2. Número decimal (aval) inexacto

Se da cuando la división de los términos de la fracción resulta ser inexacta. Esto significa que la cantidad de cifras de la parte decimal (aval) es ilimitada.

Ejemplos

- $\frac{8}{11}=0{,}727272...$

  El bloque de cifras 72 se repite en forma ordenada, a lo cual llamaremos **periodo**.

- $\frac{7}{22}=0{,}3181818...$

  Presenta un periodo formado por 18 (periodo del número decimal); sin embargo, el 3, que ya no se repite y se denominará **parte no periódica**, generará a una subclasificación de los decimales (avales) inexactos.

a. Número decimal (aval) inexacto periódico puro

Procederemos a analizar algunos decimales y avales para observar las características de las fracciones que las generan.

- $F_1=0{,}323232...=0{,}\widehat{32}$

$$\begin{array}{r} 10^2F_1=32{,}3232... \\ F_1=0{,}3232... \end{array} \Big)(-)$$

$$(10^2-1)F_1=32$$

$$F_1=\frac{32}{10^2-1}=\frac{32}{99}=\frac{32}{3^2\times 11}$$

- $F_2=0{,}185185185...=0{,}\widehat{185}$

$$\begin{array}{r} 10^3F_2=185{,}185185... \\ F_2=0{,}185185... \end{array} \Big)(-)$$

$$(10^3-1)F_2=185$$

$$F_2=\frac{185}{999}=\frac{5}{27}=\frac{5}{3^3}$$

- Para un pentaval periódico puro

$$F_3=0{,}2121...{}_5=0{,}\widehat{21}_5$$

$$\begin{array}{r} 5^2F_3=21{,}2121...{}_5 \\ F_3=0{,}2121...{}_5 \end{array} \Big)(-)$$

$$(5^2-1)F_3=21_5$$

$$F_3=\frac{21_5}{5^2-1}=\frac{21_5}{44_5}=\frac{11}{24}=\frac{11}{2^3\times 3}$$

- Para un exaval periódico puro

$$F_4=0{,}213213...{}_6=0{,}\widehat{213}_6$$

$$\begin{array}{r} 6^3F_4=213{,}213213...{}_6 \\ F_4=0{,}213213...{}_6 \end{array} \Big)(-)$$

$$(6^3-1)F_4=213_6$$

$$F_4=\frac{213_6}{6^3-1}=\frac{213_6}{555_6}=\frac{81}{215}=\frac{81}{5\times 43}$$

Se observa que la fracción irreductible $E=\frac{A}{B}$ genera un decimal inexacto periódico puro si B no admite los divisores 2 y 5 (divisores primos de la base 10). Además, la cantidad de cifras del periodo estará dado por el menor número de nueves que contenga al denominador, es decir, a B.

En general, la fracción irreductible $\frac{A}{B}$ genera un número aval inexacto periódico puro si B no admite como divisores primos a ningún divisor primo de la base; además, la cantidad de cifras en el periodo estará dada por la cantidad de cifras del menor numeral de cifras máximas de la base aval que contenga a B.

Aplicación 23

Calcule la suma de los infinitos términos dados.

$$E=\frac{1}{7}+\frac{2}{7^2}+\frac{1}{7^3}+\frac{2}{7^4}+\ldots$$

Resolución

En este caso, se puede observar que la suma tiene la forma de una descomposición de la parte aval en base siete.

$$E=0,\widehat{12}_7$$

$$E=0,\widehat{12}_7=\frac{12_7}{66_7}=\frac{9}{48}=\frac{3}{16}$$

$$\therefore\ E=\frac{3}{16}$$

La representación decimal nos permite poder hallar la fracción generatriz.

$$F=0,\underbrace{\widehat{abc\ldots x}}_{k\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc\ldots x}}{10^k-1}=\frac{\overline{abc\ldots x}}{\underbrace{999\ldots9}_{k\text{ cifras}}}$$

En general (aval periódico puro),

$$F=0,\underbrace{\widehat{abc\ldots x}}_{k\text{ cifras}}{}_n=\frac{\overline{abc\ldots x}_n}{n^k-1}$$

Nota

En el periodo de un número decimal (aval), al menos una de las cifras de la parte decimal (aval) es diferente de las demás.

Cuando se trabaja con números decimales, es necesario observar la descomposición de los numerales formados por cifras máximas (nueves), ya que ello nos va a servir para poder hallar la cantidad de cifras de la parte periódica, la cual coincide con el menor número de nueves que contiene al denominador.

$$9=3^2$$
$$99=3^2\times11$$
$$999=3^3\times37$$
$$9999=3^2\times11\times101$$
$$99999=3^2\times41\times271$$
$$999999=3^3\times7\times11\times13\times37$$
$$9999999=3^2\times239\times4649$$
$$99999999=3^2\times11\times73\times101\times137$$
$$999999999=3^4\times37\times333\,667$$
$$9999999999=3^2\times11\times41\times271\times9091$$

Ejemplos

Hallaremos cuántas cifras generan las siguientes fracciones en la parte decimal:

- $\frac{7}{27}$

  Genera un decimal periódico puro con tres cifras en el periodo, donde 27 está contenido por primera vez en tres nueves.

- $\frac{8}{41}$

  Genera un decimal periódico puro con cinco cifras en el periodo, donde 41 está contenido por primera vez en cinco nueves.

- $\frac{6}{137}$

  Genera ocho cifras en la parte periódica, donde137 está contenido por primera vez en ocho nueves.

- $\frac{7}{81}$

  Genera nueve cifras en la parte periódica, donde 81 está contenido por primera vez en nueve nueves.

- $\dfrac{18}{101\times 13}$

En este caso, analizamos qué numeral formado por cifras máximas se encuentra en cada factor:

- 101 se encuentra en 9999 (cuatro cifras)
- 13 en 999999 (seis cifras)

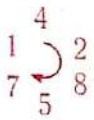
Entonces, el factor 101×13 se encuentra en el MCM(4; 6) como número de nueves.

Por lo tanto, genera 12 cifras en la parte decimal.

Observación

Veamos los siguientes decimales originados con denominador 7.

- $\frac{1}{7}=0,\widehat{142857}$
- $\frac{2}{7}=0,\widehat{285714}$
- $\frac{3}{7}=0,\widehat{428571}$
- $\frac{4}{7}=0,\widehat{571428}$
- $\frac{5}{7}=0,\widehat{714285}$
- $\frac{6}{7}=0,\widehat{857142}$



Observamos que los números forman un ciclo de tal manera que en la parte periódica aparecen las mismas cifras, pero en diferente orden.

Es importante tener en cuenta esta observación, ya que es considerada en los exámenes de admisión.

b. Número decimal (aval) inexacto periódico mixto

Analizaremos algunos decimales (avales) para determinar la forma de las fracciones que generan decimales (avales) de esta forma y sus características.

- $F_1=0,41666...=0,41\widehat{6}$

$$\begin{array}{r} 10^3F_1=416,66... \\ 10^2F_1=41,66... \end{array} \Big)(-)$$

$$10^2(10-1)F_1=416-41$$

$$F_1=\frac{416-41}{900}=\frac{375}{900}=\frac{5}{12}$$

$$F_1=0,41\widehat{6}=\frac{416-41}{900}=\frac{5}{12}$$

- $F_2=0,21126126...=0,21\widehat{126}$

$$\begin{array}{r} 10^5F_2=21126,126126... \\ 10^2F_2=21,126126... \end{array} \Big)(-)$$

$$10^2(10^3-1)F_2=21126-21$$

$$F_2=\frac{21126-21}{99900}=\frac{469}{2220}$$

$$F_2=0,21\widehat{126}=\frac{21126-21}{99900}$$

- Para un pentaval periódico mixto

$$F_3=0,21313...{}_5=0,2\widehat{13}_5$$

$$\begin{array}{r} 5^3F_3=213,1313...{}_5 \\ 5F_3=2,1313...{}_5 \end{array} \Big)(-)$$

$$5(5^2-1)F_3=213_5-2_5$$

$$F_3=\frac{213_5-2_5}{440_5}=\frac{56}{120}=\frac{7}{15}$$

$$F_3=0,2\widehat{13}_5=\frac{213_5-2_5}{440_5}=\frac{7}{15}$$

- Para un heptaval periódico mixto

$$F_4=0,13555...{}_7=0,13\widehat{5}_7$$

$$\begin{array}{r} 7^3F_4=135,55...{}_7 \\ 7^2F_4=13,55...{}_7 \end{array} \Big)(-)$$

$$7^2(7-1)F_4=135_7-13_7$$

$$F_4=\frac{135_7-13_7}{600_7}=\frac{65}{294}$$

$$F_4=13\widehat{5}_7=\frac{135_7-13_7}{600_7}=\frac{65}{294}$$

La fracción irreductible $F=\frac{A}{B}$ genera un decimal inexacto periódico mixto si es que B, aparte de tener factores primos 2 o 5, tiene otros factores primos diferentes de ellos. Para la cantidad de cifras de la parte no periódica y periódica se tendrá en cuenta lo anterior (decimal exacto y decimal inexacto periódico puro).

De la representación decimal (aval) podemos hallar su fracción generatriz.

Número decimal

$$F=0,\underbrace{\overline{abc...h}}_{k\text{ cifras}}\ \underbrace{\overline{pqr...x}}_{m\text{ cifras}}=\frac{\overline{abc...hpqr...x}-\overline{abc...h}}{\underbrace{999...9}_{m\text{ cifras}}\ \underbrace{000...0}_{k\text{ cifras}}}$$

Número aval

$$F=0,\underbrace{\overline{abc...h}}_{k\text{ cifras}}\ \underbrace{\overline{pqr...x}}_{m\text{ cifras}}{}_{n}$$

$$F=\frac{\overline{abc...h\,pqr...x}_{n}-\overline{abc...h}_{n}}{\underbrace{\overline{(n-1)(n-1)-(n-1)}}_{m\text{ cifras}}\ \underbrace{\overline{000...00}}_{k\text{ cifras}}{}_{n}}$$

Aplicación 24

Halle el valor de

$$E=\left(\frac{0,833...-0,4545...}{0,375+0,666...}\right)\times\frac{11}{4}$$

expresado como fracción ordinaria.

Resolución

Primero expresamos cada decimal como fracción; para ello utilizamos la generatriz.

$$0,833...=\frac{83-8}{90}=\frac{75}{90}=\frac{5}{6}$$

$$0,4545...=\frac{45}{99}=\frac{5}{11}$$

$$0,375=\frac{375}{1000}=\frac{3}{8}$$

$$0,66...=\frac{6}{9}=\frac{2}{3}$$

Reemplazamos en E.

$$\frac{\frac{5}{6}-\frac{5}{11}}{\frac{3}{8}+\frac{2}{3}}=\frac{\frac{55-30}{66}}{\frac{9+16}{24}}=\frac{\frac{25}{66}}{\frac{25}{24}}=\frac{4}{11}$$

$$\therefore\ E=\left(\frac{4}{11}\right)\times\left(\frac{11}{4}\right)=1$$

Aplicación 25

Indique la expresión equivalente a

$$7,\overline{13}+3+0,44...+2+1,\overline{2}$$

Resolución

Separamos la parte entera de la parte decimal y tendremos

$$7+0,\overline{13}+3+0,\overline{4}+3+0,\overline{2}$$

Agrupamos las partes enteras y también las partes decimales.

$$(7+3+3)+\left(0,\overline{13}+0,\overline{4}+0,\overline{2}\right)$$

$$13+\left(\frac{13+44+22}{99}\right)$$

$$13+\frac{79}{99}=13+0,\overline{79}$$

$$\therefore\ 13,\overline{79}$$

Aplicación 26

Calcule el valor de

$$E=\left(\frac{0,\overline{1}+0,\overline{2}+0,\overline{3}+...+0,\overline{8}}{0,\overline{13}+0,\overline{24}+0,\overline{35}+...+0,\overline{79}}\right)\frac{49}{12}$$

Resolución

Reemplazamos la generatriz en cada caso.

$$E=\left(\frac{\frac{1}{9}+\frac{2}{9}+\frac{3}{9}+\ldots+\frac{8}{9}}{\frac{12}{90}+\frac{33}{90}+\frac{32}{90}+\ldots+\frac{72}{90}}\right)\times\frac{49}{12}$$

Recordemos que

- $1+2+3+\ldots+8=\frac{8\times 9}{2}=36$
- $\underbrace{12+22+32+\ldots+72}_{7\text{ sumandos}}=\left(\frac{12+72}{2}\right)\times 7=294$

$$E=\left(\frac{\frac{36}{9}}{\frac{294}{90}}\right)\times\frac{49}{2}=\left(\frac{\frac{4}{1}}{\frac{49}{15}}\right)\times\frac{49}{12}$$

Finalmente tendremos

$$E=\left(\frac{60}{49}\right)\times\frac{49}{12}$$

$$E=\frac{60}{12}$$

$\therefore\ E=5$

Aplicación 27

Si

$$\sqrt{7(0{,}00\widehat{a})-2(0{,}00\widehat{a})+2(0{,}0\widehat{a})+6(0{,}\widehat{a})}=0{,}2\widehat{1}_3$$

calcule el valor de a.

Resolución

Tenemos que

$$7(0{,}00\widehat{a})-2(0{,}00\widehat{a})=5(0{,}00\widehat{a})$$

Luego con las generatrices.

$$\sqrt{5\left(\frac{a}{900}\right)+2\left(\frac{a}{90}\right)+6\left(\frac{a}{9}\right)}=\frac{21_3-2_3}{20_3}$$

$$\sqrt{\frac{5a+20a+600a}{900}}=\frac{7-2}{6}$$

$$\sqrt{\frac{625a}{900}}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{25}{30}\sqrt{a}=\frac{5}{6}$$

$$\frac{5}{6}\sqrt{a}=\frac{5}{6}$$

$$\sqrt{a}=1$$

$\therefore\ a=1$

7.3. CAMBIO DE BASE DE NÚMEROS AVALES

En esta parte, un aval (en una cierta base) se representará en otro sistema (en otra base).

Aplicación 28

Dados los números avales

I. $0{,}532_8$

II. $0{,}43_9$

represéntelos como números avales en base 10; 12 y 6.

Resolución

I. $0{,}532_8$

A base 10

$$0{,}532_8=\frac{532_8}{1000_8}=\frac{5\times 8^2+3\times 8+2}{8^3}=\frac{173}{256}$$

Formamos la generatriz en su base 10.

$$\frac{173}{256}=\frac{173}{2^8}=\frac{173\times 5^8}{2^8\times 5^8}=\frac{67\,578\,125}{100\,000\,000}=0{,}67578125$$

A base 12

Formamos la generatriz en base 12.

$$\frac{173}{256}=\frac{173}{2^8}=\frac{173\times 3^4}{2^8\times 3^4}=\frac{173\times 3^4}{12^4}=\frac{8139_{12}}{10000_{12}}$$

$$=0{,}8139_{12}$$

A base 6

Formamos la generatriz en base 6.

$$\frac{173}{256}=\frac{173}{2^8}=\frac{173\times 3^8}{2^8\times 3^8}=\frac{40154513_6}{100000000_6}$$

$$=0{,}40154513_6$$

Luego,

$$\therefore\ 0{,}532_8=0{,}67578125=0{,}8139_{12}$$
$$=0{,}40154513_6$$

En este caso hemos aprovechado que se podían formar las generatrices en las bases pedidas.

II. $0{,}43_9$

A base 10

$$0{,}43_9=\frac{43_9}{100_9}=\frac{4\times 9+3}{9^2}=\frac{13}{27}$$

Formamos la generatriz en base 10.

$$\frac{13}{27}=\frac{13\times 37}{27\times 37}=\frac{481}{999}=0{,}\overline{481}$$

A base 12

Dado que no siempre va a ser tan sencillo formar la generatriz, también se puede dividir $\frac{13}{27}$ en base 12 para hallar su expresión aval.

$$\begin{array}{l|l}
13 & 27 \\ \hline
\underbrace{13\times 12} & 0{,}594_{12} \\
156 & \\
135 & \\
\underbrace{21\times 12} & \\
252 & \\
\underbrace{9\times 12} & \\
108 & \\
108 & \\
--- &
\end{array}$$

$$\frac{13}{27}=0{,}594_{12}$$

A base 6

La división en otra base sería una forma más general para el cambio de base.

$$\frac{13}{27}=\frac{13\times 2^3}{27\times 2^3}=\frac{104}{216}=\frac{252_6}{1000_6}=0{,}252_6$$

Otra forma

Dividimos en base 6.

$$\begin{array}{l|l}
13 & 27 \\ \hline
\underbrace{13\times 6} & 0{,}252_6 \\
78 & \\
54 & \\
\underbrace{24\times 6} & \\
144 & \\
135 & \\
\underbrace{9\times 6} & \\
54 & \\
54 & \\
--- &
\end{array}$$

$$\therefore\ 0{,}43_9=0{,}\overline{481}=0{,}594_{12}=0{,}252_6$$

De los ejemplos anteriores, observamos que en la igualdad de los números avales, cuya parte entera es cero, se cumple que a mayor numeral aparente le corresponde mayor base, y viceversa.

$$\overset{+}{0{,}594_{12}}=\overset{-}{0{,}252_6}$$
$$\overset{+}{}\qquad\qquad\overset{-}{}$$

En general,

> Dado que
> $$0{,}\overline{abcd}_n=0{,}\overline{pqrs}_m \text{ y } \overline{abcd}>\overline{pqrs}$$
> entonces, se cumple que
> $$n>m$$

Aplicación 29

Si $0,\widehat{ab}_5=0,\widehat{cb}_7$, calcule la suma de valores de $(a+b+c)$.

Resolución

Hallamos la generatriz.

$$0,\widehat{ab}_5=\frac{\overline{ab}_5}{44_5}=\frac{5a+b}{24}$$

$$0,\widehat{cb}_7=\frac{\overline{cb}_7}{66_7}=\frac{7c+b}{48}$$

$$\frac{5a+b}{24}=\frac{7c+b}{48}$$

$$10a+2b=7c+b$$

$$10a+b=7c$$

$$\begin{array}{ccccl} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \\ 1 & 4 & 2 & \rightarrow & a+b+c=7 \\ 2 & 1 & 3 & \rightarrow & a+b+c=6 \\ 4 & 2 & 6 & \rightarrow & a+b+c=12 \end{array}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{Suma de valores}\\ \text{de } a+b+c\end{pmatrix}=7+6+12=25$$

Aplicación 30

Si $0,\widehat{23}_5=0,\overline{abc}\,\widehat{x}$, calcule $a+b+c+x$.

Resolución

Usando la generatriz.

$$0,\widehat{23}_5=\frac{23_5}{44_5}=\frac{13}{24}$$

Dividimos.

$$\begin{array}{r|l} 130 & 24 \\ \cline{2-2} 100 & 0,54166... \\ 40 & \\ 160 & \\ 144 & \\ \hline 160 & \end{array}$$

$$\rightarrow 0,\widehat{23}_5=0,54\widehat{16}$$

De donde $a=5;\ b=4;\ c=1;\ x=6$

$\therefore\ a+b+c+x=16$

▸▸ Nota

Los números con muchas cifras se representan con ayuda de los decimales y de las potencias de base diez. Esta expresión se conoce como notación científica; con ella, las operaciones se realizan de manera más fácil. Escribir en notación científica es expresar el número como el producto de una potencia de base 10 por un número mayor o igual que 1 y menor que 10.

Algunos ejemplos son los siguientes:

- $0,00007=7\times10^{-5}$
- $35\,000=3,5\times10^{4}$
- $234\,609=2,34609\times10^{5}$

Ejemplo

Los átomos poseen un núcleo con electrones que giran a su alrededor. En el núcleo de los átomos hay protones y neutrones.

Los protones y los neutrones tienen cerca de 0,000000000000001 m de diámetro y una masa de 0,000000000000000000000000017 kg. Estas dos medidas se pueden escribir en notación científica. Así, $0,000000000000001\ \text{m}=10^{-15}\ \text{m}$; $0,000000000000000000000000017=1,7\times10^{-27}\ \text{kg}$.

7.3.1. Forma práctica general para cambiar de base un número aval

En la aplicación siguiente trabajaremos con otro método para realizar el cambio de base; primero, trabajaremos con la generatriz del aval a cambiar de base.

Aplicación 31

Represente los siguientes números avales en las bases 12 y 6:

I. $0,532_8$ II. $0,43_9$.

Resolución

I. $0,532_8=\dfrac{532_8}{1000_8}=\dfrac{346}{512}=\underbrace{\dfrac{173}{256}}_{\text{irreductible}}$

A base 12

parte entera

$$\frac{173}{256}\times 12=\frac{519}{64}=8+\frac{7}{64}$$

parte entera

$$\frac{7}{64}\times 12=\frac{21}{16}=1+\frac{5}{16}$$

parte entera

$$\frac{5}{16}\times 12=\frac{15}{4}=3+\frac{3}{4}$$

$$\frac{3}{4}\times 12=9$$

$\therefore \quad 0{,}532_8=0{,}8139_{12}$

A base 6

parte entera

$$\frac{173}{256}\times 6=\frac{519}{128}=4+\frac{7}{128}$$

parte entera

$$\frac{7}{128}\times 6=\frac{21}{64}=0+\frac{21}{64}$$

parte entera

$$\frac{21}{64}\times 6=\frac{63}{32}=1+\frac{31}{32}$$

parte entera

$$\frac{31}{32}\times 6=\frac{93}{16}=5+\frac{13}{16}$$

parte entera

$$\frac{13}{16}\times 6=\frac{39}{8}=4+\frac{7}{8}$$

parte entera

$$\frac{7}{8}\times 6=\frac{21}{4}=5+\frac{1}{4}$$

parte entera

$$\frac{1}{4}\times 6=\frac{3}{2}=1+\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{2}\times 6=3$$

$\therefore \quad 0{,}532_8=0{,}40154513_6$

II. $0{,}43_9=\dfrac{43_9}{100_9}=\dfrac{39}{81}=\underbrace{\dfrac{13}{27}}_{\text{irreductible}}$

A base 12

parte entera

$$\frac{13}{27}\times 12=\frac{52}{9}=5+\frac{7}{9}$$

parte entera

$$\frac{7}{9}\times 12=\frac{28}{3}=9+\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\times 12=4$$

$\therefore \quad 0{,}43_9=0{,}594_{12}$

A base 6

parte entera

$$\frac{13}{27}\times 6=\frac{26}{9}=2+\frac{8}{9}$$

parte entera

$$\frac{8}{9}\times 6=\frac{16}{3}=5+\frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{3}\times 6=2$$

$\therefore \quad 0{,}43_9=0{,}252_6$

Aplicación 32

Halle la representación pentaval correspondiente a 34,72 y dé como respuesta la suma de cifras de la parte aval.

Resolución

La parte entera genera la parte entera en base 5; de igual manera, la parte decimal genera la parte pentaval.

- 34 a base 5:

$$\begin{array}{r|l} 34 & 5 \\ \hline 4 & 6 \;|\; 5 \\ & 1 \quad 1 \end{array}$$

$34=114_5$

- 0,72 a base 5

$$0{,}72=\frac{72}{100}=\frac{18}{25}$$

parte entera

$$\frac{18}{25}\times 5=\frac{90}{25}=3+\frac{15}{25}$$

$$\frac{15}{25}\times 5=\frac{75}{25}=3$$

$$0{,}72=0{,}33_5$$

$$34{,}72=114{,}33_5$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{cifras avales}\end{pmatrix}=3+3=6$$

8 FRACCIONES CONTINUAS

Son aquellas expresiones que tienen la forma

$$f=a_1+\cfrac{b_1}{a_2+\cfrac{b_2}{a_3+\ddots+\cfrac{b_{n-2}}{a_{n-1}+\cfrac{b_{n-1}}{a_n}}}}$$

donde $a_i\in\mathbb{R}\ \wedge\ b_i\in\mathbb{R},\ \forall\, i\in\mathbb{Z}^+$.

A continuación, estudiaremos los casos en los que se cumplen las condiciones siguientes:

$b_i=1;\ a_1\in\mathbb{Z}\ \wedge\ (a_i\in\mathbb{Z}^+;\ \forall\, i>1)$

Además, una fracción de este tipo es conocida como fracción continua simple (FCS).

En general, una fracción continua simple será de la forma siguiente:

$$f=a_0+\cfrac{1}{a_1+\cfrac{1}{a_2+\ddots\cfrac{1}{a_n}}}=[a_0;\ a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_n]$$

En la cual

$a_0\in\mathbb{Z}\wedge(a_i\in\mathbb{Z}^+;\ \forall\, i\geq 1)$

La fracción continua simple también es llamada fracción continua ordinaria, la cual se representa como

$$f=a_0+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\frac{1}{a_4}+\ldots+\frac{1}{a_n}$$

donde las fracciones $\frac{1}{a_1};\ \frac{1}{a_2};\ \frac{1}{a_3};\ldots;\ \frac{1}{a_n}$ se llaman fracciones integrantes y los números a_0; a_1; a_2;...; a_n son llamados cocientes incompletos.

Si el número de cocientes de una fracción continua simple es limitado o finito, entonces se dice que la fracción continua simple es **finita**.

Si el número de cocientes de una fracción continua simple es ilimitado o infinito, entonces se dice que la fracción continua simple es **infinita**, la cual puede ser periódica o no periódica.

Ejemplos

- $F_1=2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{4}}$

  $F_1=[2;\ 5;\ 4]$ (notación)

  La cual es una fracción continua simple finita.

- $F_2=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{5}}}$

  $F_2=[1;\ 2;\ 3;\ 5]$

  La cual es una fracción continua simple finita.

- $F_3=3+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{5+\ddots}}}$

  $F_3=[3;\ 5;\ 5;\ 5;\ldots]$

  $F_3=[3;\ \overline{5}]$

  La cual es una fracción continua simple infinita.

- $F_4=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{5+\ddots}}}}$

  $F_4=[3;\ 2;\ 5;\ 2;\ 5;...]$

  $F_4=[3;\ \overline{2;\ 5}]$

  La cual es una fracción continua simple infinita.

8.1. FRACCIÓN CONTINUA SIMPLE FINITA (FCSF)

Teorema

Todo número racional puede expresarse como una fracción continua simple finita y toda fracción continua simple puede expresarse como un único número racional.

Ejemplo

Expresemos $\frac{184}{81}$ como fracción continua simple.

$$\frac{184}{81}=2+\frac{22}{\boxed{81}}=2+\frac{1}{\frac{\boxed{81}}{\boxed{22}}}=2+\frac{1}{3+\frac{15}{22}}$$

divisor — dividendo — divisor

$$=2+\frac{1}{3+\frac{1}{\frac{\boxed{22}}{\boxed{15}}}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{7}{15}}}$$

dividendo — divisor

$$=2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{\frac{\boxed{15}}{\boxed{7}}}}}=2+\frac{1}{3+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{7}}}}$$

divisor — dividendo

$\therefore\ \frac{184}{81}=[2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 7]$ FCSF

En el proceso de expresar $\frac{184}{81}$ como FCS se puede observar que el divisor, en un primer momento, pasa a ser dividendo en el siguiente paso; por lo cual, el proceso aplicado sería un caso particular del algoritmo de Euclides para determinar el MCD de dos enteros.

	2	**3**	**1**	**2**	**7**
184	81	22	15	7	1
	22	15	7	1	0

← términos de la fracción continua

Observación

Hemos trabajado con números racionales en su forma irreductible, pero también se podría trabajar con cualquier equivalente y la fracción continua sería la misma.

Ejemplo

Hallemos la fracción continua para $\frac{552}{243}$ equivalente a $\frac{184}{81}$.

	2	3	1	2	7
552	243	66	45	21	3
	66	45	21	3	0

De ahí que

$\frac{552}{243}=[2;\ 3;\ 1;\ 2;\ 7]$

Aplicación 33

Exprese como una FCSF los siguientes números racionales.

I. $\frac{72}{13}$ II. $\frac{58}{63}$ III. $-\frac{71}{57}$

Resolución

I. $\frac{72}{13}$

	5	**1**	**1**	**6**
72	13	7	6	1
	7	6	1	0

$\therefore\ \frac{72}{13}=[5;\ 1;\ 1;\ 6]$

II. $\frac{58}{63}$

	0	1	11	1	1	2
58	63	58	5	3	2	1
	58	5	3	2	1	0

$\therefore \frac{58}{63} = [0; 1; 11; 1; 1; 2]$

III. $-\frac{71}{57}$

	−2	1	3	14
−71	57	43	14	1
	43	14	1	0

$\therefore -\frac{71}{57} = [-2; 1; 3; 14]$

Nota

Podemos afirmar que todo número racional se puede expresar como una fracción continua simple finita.

Aplicación 34

¿A qué número racional representa la FCSF [3; 1; 5; 2]?

Resolución

Utilizaremos el algoritmo de Euclides.

	3	1	5	2
50	13	11	2	1
	11	2	1	0

$\therefore [3; 1; 5; 2] = \frac{50}{13}$

Observación

En el proceso anterior, consideramos en forma conveniente como último divisor a la unidad. A partir de ello, reconstruimos la tabla del algoritmo de Euclides, por lo que la fracción resultante será irreductible.

Aplicación 35

Determine el número racional que representan las siguientes FCSF.

I. [4; 7; 2; 3]; II. [0; 1; 3; 2; 5];

III. [−3; 2; 1; 4; 3]

Resolución

I. [4; 7; 2; 3]

	4	7	2	3
215	52	7	3	1
	7	3	1	0

$\therefore [4; 7; 2; 3] = \frac{215}{52}$

II. [0; 1; 3; 2; 5]

	0	1	3	2	5
38	49	38	11	5	1
	38	11	5	1	0

$\therefore [0; 1; 3; 2; 5] = \frac{38}{49}$

III. [−3; 2; 1; 4; 3]

	−3	2	1	4	3
−119	45	16	13	3	1
	16	13	3	1	0

$\therefore [-3; 2; 1; 4; 3] = -\frac{119}{45}$

Nota

Podemos afirmar que toda FCSF representa a un número racional y todo racional se puede expresar como FCSF.

8.2. FRACCIÓN CONTINUA SIMPLE INFINITA (FCSI)

Teorema 1

Todo número irracional puede expresarse como una fracción continua simple infinita y toda fracción continua simple infinita puede expresarse como un único número irracional.

Para expresar, por ejemplo, $\sqrt{2}$ como fracción continua simple, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1

Extraemos la parte entera (máximo entero) del número irracional.

Paso 2

La parte no entera se racionaliza, generando la forma de una fracción en la que el numerador debe ser la unidad y el denominador resultará un número irracional.

Paso 3

Extraemos ahora la parte entera de este último denominador y la parte no entera se vuelve a racionalizar, buscando siempre la unidad en el numerador.

Paso 4

Procedemos en forma similar hasta encontrar que los términos de la fracción continua simple se repitan en forma periódica.

Entonces, tenemos

$$\sqrt{2} = \underset{\text{parte entera}}{1} + \underbrace{(\sqrt{2}-1)}_{\text{parte no entera}}; [\![\sqrt{2}]\!] = 1$$

Racionalizamos.

$$\sqrt{2} = 1 + (\sqrt{2}-1)\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{\sqrt{2}+1}\ ; \quad [\![\sqrt{2}+1]\!] = 2$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}$$

Nuevamente racionalizamos.

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}\frac{(\sqrt{2}+1)}{(\sqrt{2}+1)}$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{\sqrt{2}-1}}\ ; [\![\sqrt{2}+1]\!] = 2$$

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+(\sqrt{2}-1)}}$$

Se concluye que

$$\sqrt{2} = 1 + \frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\frac{1}{2+\cdot_{\cdot_{\cdot}}}}}} = [1; 2; 2; 2; ...]$$

Finalmente se denotará lo siguiente:

$$\sqrt{2} = [1, \overline{2}]$$

Expresemos ahora $\sqrt{3}$ como fracción continua simple.

$$\sqrt{3} = 1 + (\sqrt{3}-1); \qquad [\![\sqrt{3}]\!] = 1$$

$$= 1 + \frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{3}+1)}{\sqrt{3}+1}$$

$$= 1 + \frac{2}{\sqrt{3}+1}$$

Hallamos la parte entera del denominador.

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}; \qquad \left[\!\left[\frac{\sqrt{3}+1}{2}\right]\!\right]=1$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{\mathbf{3}+\mathbf{1}})}{2(\sqrt{\mathbf{3}+\mathbf{1}})}}$$

$$=1+\frac{1}{1+\frac{2}{2(\sqrt{3}+1)}}$$

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{\mathbf{3}+\mathbf{1}})}{\sqrt{\mathbf{3}+\mathbf{1}}}}}; \quad [\![\sqrt{3}+1]\!]=2$$

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{2}{\sqrt{3}+1}}}$$

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{\frac{\sqrt{3}+1}{2}}}}$$

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{(\sqrt{3}-1)(\sqrt{\mathbf{3}+\mathbf{1}})}{2(\sqrt{\mathbf{3}+\mathbf{1}})}}}}$$

$$\sqrt{3}=1+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\frac{1}{1+\frac{1}{2+\ddots}}}}=[1;\overline{1;2}]$$

Nota

De lo anterior, se puede afirmar que todo número irracional se puede expresar como una FCSI.

Teorema 2

Si $p \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\boxed{\sqrt{p^2+1}=[p;\overline{(2p)}]}$$

Demostración

$$\sqrt{p^2+1}=p+\left(\sqrt{p^2+1}-p\right); \quad [\![\sqrt{p^2+1}]\!]=p$$

$$\sqrt{p^2+1}=p+\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{p^2+1}}+\boldsymbol{p}\right)}{\left(\sqrt{\boldsymbol{p^2+1}}+\boldsymbol{p}\right)}$$

$$\sqrt{p^2+1}=p+\frac{1}{\sqrt{p^2+1}+p}; \quad [\![\sqrt{p^2+1}+p]\!]=2p$$

$$\sqrt{p^2+1}=p+\frac{1}{2p+\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)}$$

$$\sqrt{p^2+1}=p+\frac{1}{2p+\frac{\left(\sqrt{p^2+1}-p\right)\left(\sqrt{\boldsymbol{p^2+1}}+\boldsymbol{p}\right)}{\left(\sqrt{p^2+1}+p\right)}}$$

$$\therefore \quad \sqrt{p^2+1}=p+\frac{1}{2p+\frac{1}{2p+\ddots}}=[p;\overline{(2p)}]$$

Entonces, por ejemplo tenemos

- $\sqrt{10}=\sqrt{3^2+1}=[3;\overline{6}]$
- $\sqrt{37}=\sqrt{6^2+1}=[6;\overline{12}]$
- $\sqrt{50}=\sqrt{7^2+1}=[7;\overline{14}]$

Teorema 3

Si $p \in \mathbb{Z}^+$, entonces

$$\boxed{\sqrt{p^2-1}=[(p-1);\overline{1;2(p-1)}]}$$

Para demostrar este teorema, debemos proceder de manera similar al teorema anterior.

Entonces, tenemos

- $\sqrt{8}=\sqrt{3^2-1}=[2;\overline{1;4}]$
- $\sqrt{10}=\sqrt{4^2-1}=[3;\overline{1;6}]$
- $\sqrt{48}=\sqrt{7^2-1}=[6;\overline{1;12}]$

Para hallar, por ejemplo, el número irracional representado por la FCSI $[2;\overline{4}]$, se siguen los siguientes pasos:

Paso 1
Se expresa en FCSI en su forma detallada y se iguala a una variable (generalmente x).

Paso 2
Se despeja en forma conveniente la parte periódica (fracción continua que se repite en forma cíclica).

Paso 3
Se reemplaza la parte periódica por la expresión previamente despejada (en función de la variable).

Paso 4
Se despeja la variable en forma adecuada, la cual siempre tomará más de un valor.

Paso 5
Para determinar cuál es el único número irracional que corresponde a la FCSI, se extrae el máximo entero de los irracionales encontrados.

Paso 6
Aquel número irracional, cuyo máximo entero coincide con el primer término de la FCSI, será la respuesta.

Entonces, tenemos

$$x=2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{\underbrace{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}_{x-2}}}$$

$$\rightarrow\ x-2=\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{4+\ddots}}}}$$

Reemplazamos.

$$x=2+\frac{1}{4+(x-2)}$$

$$x-2=\frac{1}{x+2}$$

$$x^2-4=1$$

$$x^2=5$$

$$x=\pm\sqrt{5}$$

Evaluamos el máximo entero.

$$[\![\sqrt{5}]\!]=2$$

$$[\![-\sqrt{5}]\!]=-3$$

$$\therefore\ x=\sqrt{5}$$

Aplicación 36
Indique a qué número irracional representan las siguientes FCSI:

I. $[-2;4;4;\ldots]=[-2;\overline{4}]$

II. $[3;\overline{2;1}]$

Resolución

I. $$x=-2+\cfrac{1}{\underbrace{4+\cfrac{1}{\underbrace{4+\ddots}_{x+2}}}_{x+2}}$$

$$x+2=\frac{1}{4+(x+2)} \rightarrow x+2=\frac{1}{x+6}$$

$$(x+2)(x+6)=1$$

$$x^2+8x+12=1$$

$$x^2+8x+12=0$$

Recordemos que para la ecuación de 2.º grado $ax^2+bx+c=0$, tenemos

$$x_{1;2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a};$$

donde x_1; x_2 son las raíces de la ecuación.

$$x_{1;2}=\frac{-8\pm\sqrt{8^2-4(1)(11)}}{2}$$

$$x_{1;2}=\frac{-8\pm\sqrt{20}}{2}$$

$$x_{1;2}=\frac{-8\pm2\sqrt{5}}{2}$$

$$x_{1;2}=-4\pm\sqrt{5};$$

donde $x_1=-4+\sqrt{5}$ y $x_2=-4-\sqrt{5}$

$$\text{Como}\begin{cases}[\![-4+\sqrt{5}]\!]=-2\\ [\![-4-\sqrt{5}]\!]=-7\end{cases}$$

Luego la fracción continua representa al que tiene como máximo entero la parte entera de la fracción continua, es decir –2.

$$\therefore\ x=-4+\sqrt{5}$$

II. $x=3+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+\ddots}}}}$ ← $x-3$

$x-3$

$$x-3=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{1+(x-3)}}$$

$$x-3=\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{x-2}}$$

$$x-3=\cfrac{1}{\cfrac{2(x-2)+1}{x-2}} \rightarrow x-3=\frac{x-2}{2x-3}$$

$$(x-3)(2x-3)=x-2$$

$$2x^2-9x+9=x-2$$

$$2x^2-10x+11=0$$

$$x_{1;2}=\frac{10\pm\sqrt{(-10)^2-4(2)(11)}}{4}$$

$$x_{1;2}=\frac{10\pm\sqrt{12}}{4}$$

$$x_{1;2}=\frac{5\pm\sqrt{3}}{2}$$

de donde $x_1=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}$ y $x_2=\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}$

Tomando el máximo entero a cada uno para ver a cuál de los dos representa la fracción continua, tenemos

$$\begin{cases}\left[\!\left[\dfrac{5+\sqrt{3}}{2}\right]\!\right]=3\\ \left[\!\left[\dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right]\!\right]=1\end{cases}$$

$$\therefore\ x=\frac{5+\sqrt{3}}{2}$$

Nota

De lo anterior, se puede afirmar que toda FCSI representa un único número irracional.

k	Fracciones continuas para $\sqrt{k}$
2	$(1; \overline{2})$
3	$(1; \overline{1; 2})$
5	$(2; \overline{4})$
6	$(2; \overline{2; 4})$
7	$(2; \overline{1; 1; 1; 4})$
8	$(2; \overline{1; 4})$
10	$(3; \overline{6})$
11	$(3; \overline{3; 6})$
12	$(3; \overline{2; 6})$
13	$(3; \overline{1; 1; 1; 1; 6})$
14	$(3; \overline{1; 2; 1; 6})$
15	$(3; \overline{1; 6})$
17	$(4; \overline{8})$
18	$(4; \overline{4; 8})$
19	$(4; \overline{2; 1; 3; 1; 2; 8})$
20	$(4; \overline{2; 8})$
21	$(4; \overline{1; 1; 2; 1; 1; 8})$
22	$(4; \overline{1; 2; 4; 2; 1; 8})$
23	$(4; \overline{1; 3; 1; 8})$
24	$(4; \overline{1; 8})$
26	$(5; \overline{10})$
27	$(5; \overline{5; 10})$
28	$(5; \overline{3; 2; 3; 10})$
29	$(5; \overline{2; 1; 1; 2; 10})$
30	$(5; \overline{2; 10})$
31	$(5; \overline{1; 1; 3; 5; 3; 1; 1; 10})$
32	$(5; \overline{1; 1; 1; 10})$
33	$(5, \overline{1; 2; 1; 10})$
34	$(5; \overline{1; 4; 1; 10})$
35	$(5; \overline{1; 10})$
37	$(6; \overline{12})$
38	$(6; \overline{6; 12})$
39	$(6; \overline{4; 12})$
40	$(6; \overline{3; 12})$
41	$(6; \overline{2; 2; 12})$
42	$(6; \overline{2; 12})$
43	$(6; \overline{1; 1; 3; 1; 5; 3; 1; 1; 12})$
44	$(6; \overline{1; 1; 1; 2; 1; 1; 1; 12})$
45	$(6; \overline{1; 2; 2; 2; 12})$

Representación como fracción continua de los no cuadrados perfectos menores o iguales a 45

8.3. CONVERGENTES DE UNA FRACCIÓN CONTINUA SIMPLE

Una de las razones por las cuales las fracciones continuas son importantes es que ellas pueden ser usadas para obtener aproximaciones numéricas de los números irracionales.

Sea la fracción continua simple

$$F = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{a_3 + \ddots}}}$$

Si tomamos solo algunos términos, obtendremos expresiones de la forma siguiente:

$$R_1 = [a_0] = a_0$$

$$R_2 = [a_0; a_1] = a_0 + \frac{1}{a_1}$$

$$R_3 = [a_0; a_1; a_2] = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2}}$$

$$\vdots$$

$$R_k = [a_0; a_1; a_2; \ldots; a_{k-1}]$$

$$= a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots \; a_{k-2} + \cfrac{1}{a_{k-1}}}}}$$

A estas expresiones se les llama **convergentes** o reducidas de la FCS $[a_0; a_1; a_2; a_3; \ldots]$, la cual puede ser finita o infinita.

Ejemplos

- Determinemos las convergentes de la FCSF

  $[1; 2; 4; 5; 2]$

  $R_1 = [1] = 1$ 1.ª convergente

$R_2=[1;2]=1+\frac{1}{2}=\frac{3}{2}$ 2.ª convergente

$R_3=[1;2;4]$

$=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=\frac{13}{9}$ 3.ª convergente

$R_4=[1;2;4;3]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3}}}$

$=\frac{42}{29}$ 4.ª convergente

$R_5=[1;2;4;3;2]=1+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{2}}}}$

$=\frac{97}{67}$ 5.ª convergente

En el ejemplo anterior, se puede observar que la 5.ª convergente R_5 es igual al valor de la FCS, pues consta de cinco términos [1; 2; 4; 3; 2].

En general, la última convergente de una FCSF es siempre igual al racional representado por esa fracción continua.

Además, se observa que cada convergente de la FCSF del ejemplo anterior es una mejor aproximación del número racional $\frac{97}{67}$ que el convergente precedente.

Tenemos lo siguiente:

$$\left|\frac{97}{67}-1\right|=\frac{30}{67}\approx 0{,}4478$$

$$\left|\frac{97}{67}-\frac{3}{2}\right|=\frac{7}{134}\approx 0{,}0522$$

$$\left|\frac{97}{67}-\frac{13}{9}\right|=\frac{2}{603}\approx 0{,}0033$$

$$\left|\frac{97}{67}-\frac{42}{29}\right|=\frac{1}{1\,943}\approx 0{,}0005$$

$$\left|\frac{97}{67}-\frac{97}{67}\right|=0$$

- Determinemos los primeros cincos convergentes de $\sqrt{6}=[2;\overline{2;4}]$.

$C_1=[2]=2$

$C_2=[2;2]=2+\frac{1}{2}=\frac{5}{2}=2{,}5000$

$C_3=[2;2;4]=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}=\frac{22}{9}=2{,}4444$

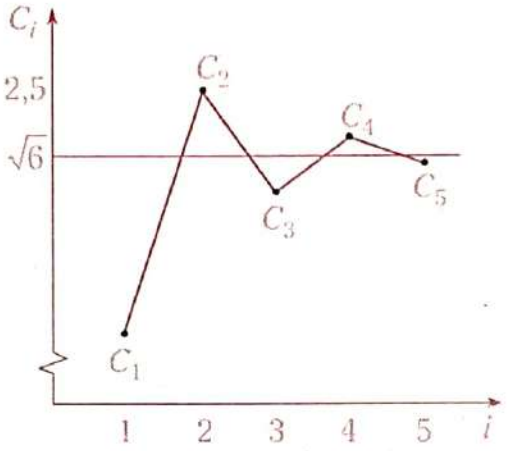
$C_4=[2;2;4;2]=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2}}}=\frac{49}{20}=2{,}4500$

$C_5=[2;2;4;2;4]=2+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\cfrac{1}{4}}}}=\frac{218}{89}$

$=2{,}4494$

En el ejemplo anterior, se nota que el convergente C_2 es una mejor aproximación a $\sqrt{6}$ que el primer convergente C_1; el tercer convergente C_3 es una mejor aproximación de $\sqrt{6}$ que el segundo convergente C_2; así podríamos continuar concluyendo que los convergentes C_1; C_2; C_3; C_4 y C_5 de la fracción continua que representa a $\sqrt{6}$ forman una sucesión de números racionales que son aproximaciones cada vez mejores de $\sqrt{6}$.

A continuación graficaremos los cinco primeros convergentes de la FCSI que representa a $\sqrt{6}$.



Se observa que los convergentes correspondientes a lugares impares, C_1; C_3 y C_5, son menores que $\sqrt{6}$, y los convergentes correspondientes a lugares pares, C_2 y C_4, son mayores que $\sqrt{6}$. De lo anterior, se concluye que

$$C_1 < C_3 < C_5 < \sqrt{6} < C_4 < C_2$$

Nota

Históricamente, la teoría de las fracciones continuas surgió, en un inicio, por la necesidad de representar aproximadamente un número racional con numeradores y denominadores relativamente grandes mediante otra fracción de términos menores, y de estimar el error de esta aproximación.

Las fracciones continuas simples infinitas que poseen la forma

$$M=a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{\ddots}}}$$

representan números irracionales conformados por raíces, siempre y cuando a^2+4b no sea un cuadrado perfecto.

Tenemos lo siguiente:

$$M=a+\cfrac{b}{a+\boxed{\cfrac{b}{\ddots}}} \leftarrow M-a$$

$$M=a+\frac{b}{M}$$

De lo anterior, tenemos que

$$M^2=aM+b$$

$$M^2-aM-b=0 \quad \text{ecuación cuadrática}$$

cuya solución general sabemos que es la siguiente:

$$M=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

De la cual tomaremos la raíz positiva y tendremos que

$$\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}=a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{a+\cfrac{b}{\ddots}}}$$

donde $a^2+4b\neq k^2$

Por ejemplo, si $a=1$ y $b=1$ tendremos

$$\frac{1+\sqrt{5}}{2}=+1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{1+\cfrac{1}{\ddots}}}$$

El cual representa al número áureo: $\phi=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$

Biografía

Srinivasa Ramanujan

Nació el 22 de diciembre de 1887 en casa de su abuela en Erode (India) y murió el 26 de abril de 1920 en Kumbakonam, donde pasó la mayor parte de su vida, puesto que sus padres se trasladaron allí cuando él tenía un año.

Era de una familia venida a menos de la casta de los brahmanes. Su padre era el contable de un vendedor de telas. Siempre tuvo una salud muy débil, por ejemplo, a los dos años enfermó de viruela.

Fue por primera vez al colegio a los cinco años, al Town High School de Kumbakonam. Allí encontró un libro de matemáticas de G. S. Carr, *Sinopsis elemental de matemática pura*, que despertó su interés por las matemáticas a cuyo estudio dedicó toda su vida.

Libros escritos

- Su primer trabajo publicado fue sobre los números de Bernoulli en el Journal de Sociedad Matemática de la India.
- Un artículo "Sobre la distribución de números primos", publicado en 1913 por S.N. Aiyar sobre el trabajo desarrollado por Ramanujan en este tema.
- "Cuaderno perdido" es un cuaderno de notas escrito durante su último año de vida que fue encontrado en 1976 y contenía 600 fórmulas.

Principales aportaciones a las matemáticas

- Encontró la forma de resolver las ecuaciones cúbicas y cuárticas.
- Construyó una serie cuya suma está relacionada con el número π.
- Desarrolló algoritmos que ha permitido obtener el número π con millones de cifras decimales.
- Resolvió las series de Riemman, las integrales elípticas, las series geométricas y las ecuaciones funcionales de la función z.
- Obtuvo los mismos resultados que Gauss, Kummer y otros en series hipergeométrcias, contribuyendo a un mayor desarrollo de las sumas parciales y productos de las mismas.
- Estudió los números de Bernoulli.
- Hizo avanzar la teoría de números, las fracciones continuas y el cálculo de series divergentes.

Adaptado de "Srinivasa Ramanujan". En <http://sauce.pntic.mec.es>.

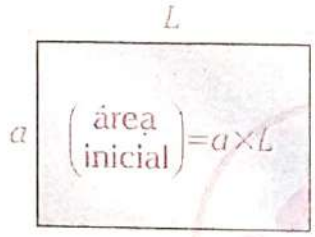
Problemas resueltos

Problema 1

Las láminas teraflex son utilizadas para pavimentos deportivos. En cierto país, por su elevada temperatura, se dilatan aumentando su largo en 1/9 y aumentando su ancho en 7/20. ¿Qué fracción del área inicial de la lámina es la nueva área?

Resolución

Graficamos.



Al dilatarse, tendremos que

Nuevo largo: $L+\frac{1}{9}L=\frac{10}{9}L$

Nuevo ancho: $a+\frac{7}{20}a=\frac{27}{20}a$

Entonces

$$\begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{final}\end{pmatrix}=\left(\frac{27}{20}a\right)\times\left(\frac{10}{9}L\right)=\frac{3}{2}a\times L$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}\text{área}\\ \text{final}\end{pmatrix}=\frac{3}{2}(\text{área inicial})$$

Problema 2

Un balde de limonada contiene 1 kg de azúcar. Se consume 1/4 del contenido y se vuelve a llenar con agua; se consume nuevamente 1/3 del contenido y se vuelve a llenar con agua. Finalmente, se consume la mitad del contenido. ¿Qué cantidad de azúcar queda todavía en el balde?

Resolución

Trabajaremos con lo que queda de azúcar.

Se consume $\frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4}$

$$\text{Queda } \frac{1}{2}\times\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}(1\text{ kg})=\frac{1}{4}\text{ kg}=250\text{ g}$$

Por lo tanto, quedan 250 gramos.

Problema 3

Un tanque de agua abastece a toda una urbanización en Comas. La capacidad del tanque es de 9600 m^3. A las 6:00 a. m. de cierto día se observa que faltan los 3/16 de su volumen para que esté lleno; además, hasta la 1:00 p.m. se consume 1/4 de lo que hay en él. ¿Qué cantidad de agua habrá que agregar para que falte llenar 1/6 de su capacidad?

Resolución

Sea $V=9600\text{ m}^3$ (volumen total)

Según el enunciado, estará quedando

$$\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{13}{16}V\right)$$

Luego tenemos

$$\frac{39}{64}V+\underset{\text{se va a agregar}}{x}=\frac{5}{6}V$$

$$x=\frac{5}{6}V-\frac{39}{64}V$$

$$x=\frac{43}{192}V=\frac{43}{192}(9600)\text{ m}^3$$

$$\therefore\ x=2150\text{ m}^3$$

Problema 4

Un obrero puede concluir una obra en 20 días trabajando solo. Si contrata a 2 ayudantes, terminaría la obra en 12 días. ¿En qué tiempo construirán esta obra solo 6 ayudantes del mismo rendimiento?

Resolución

Si 1 obrero construye la obra en 20 días, entonces en 1 día construye $\frac{1}{20}$ obra.

Se sabe que 1 obrero más 2 ayudantes construyen la obra en 12 días. Entonces en 1 día hacen $\frac{1}{12}$ obra.

Si 2 ayudantes en 1 día construyen

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{12}=\frac{1}{30} \text{ obra}$$

entonces cada ayudante construye $\frac{1}{60}$ obra en 1 día.

Además, 6 ayudantes en 1 día construyen

$$6\left(\frac{1}{60}\right)=\frac{1}{10} \text{ obra en 1 día.}$$

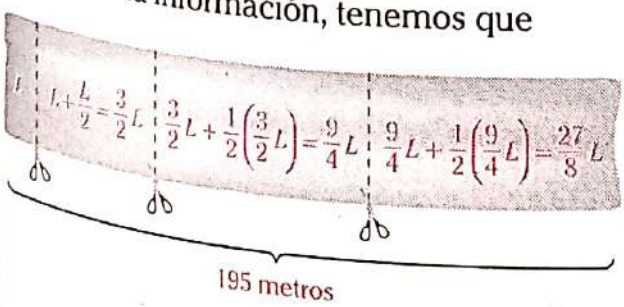
Por lo tanto, 6 ayudantes construyen la obra en 10 días.

Problema 5

A una tela de 195 metros de longitud se le hace 3 cortes, de manera que la longitud de cada retazo es igual al del anterior aumentado en la mitad. ¿Cuál es la longitud del retazo más grande?

Resolución

Graficando la información, tenemos que



Luego,

$$L+\frac{3}{2}L+\frac{9}{4}L+\frac{27}{8}L=195$$

Homogeneizamos los denominadores.

$$\frac{8L+12L+18L+27L}{8}=195$$

$$\frac{65}{8}L=195$$

$$L=24 \text{ metros}$$

El retazo más grande sería

$$\frac{27}{8}L=\frac{27}{8}(24)=81 \text{ metros}$$

Por lo tanto, el retazo más grande es de 81 m.

Problema 6

Raúl tenía cierto número de manzanas y las distribuye del modo siguiente: da a Julio la cuarta parte del total más una manzana y media; a Rosa le da los 2/7 del total más 6/7 de manzana; por último, le da a Henry la octava parte del total más 3/4 de manzana, y le quedan tres para él. Halle cuántas manzanas tenía Raúl y dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

Considere que todos recibieron una cantidad entera de manzanas.

Resolución

Por condición, sea T el total de manzanas; entonces lo que le toca a cada uno es

$$\left.\begin{array}{ll} \bullet \text{ Julio} & \frac{1}{4}T+\frac{3}{2} \\ \bullet \text{ Rosa} & \frac{2}{7}T+\frac{6}{7} \\ \bullet \text{ Henry} & \frac{1}{8}T+\frac{3}{4} \\ \bullet \text{ Raúl} & 3 \end{array}\right\} \text{suma}=T$$

Luego,

$$\left(\frac{1T}{4}+\frac{3}{2}\right)+\left(\frac{2T}{7}+\frac{6}{7}\right)+\left(\frac{1T}{8}+\frac{3}{4}\right)+3=T$$

$$\left(\frac{14+16+7}{56}\right)T+\left(\frac{42+24+21+84}{28}\right)=T$$

$$\frac{171}{28}=T-\frac{37}{56}T$$

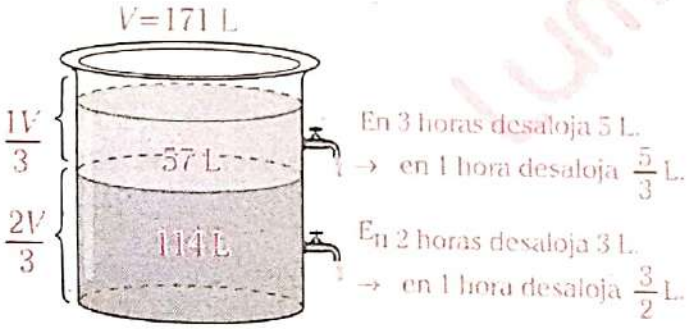
$$T=18$$

Por lo tanto, la suma de cifras es 9.

Problema 7

Se tiene un reservorio cilíndrico, cuya capacidad es de 171 litros, con 2 orificios. El primer orificio, ubicado en la parte de abajo, deja salir 3 litros cada 2 horas; el segundo, ubicado a 2/3 de altura del cilindro y encima del primer orificio, deja salir 5 litros en 3 horas. Si el reservorio está lleno y con los orificios abiertos, ¿en qué tiempo quedará vacío?

Resolución



En los 57 L (x horas)

$$\frac{3x}{2}+\frac{5}{3}x=57 \rightarrow x=18$$

En los 114 L (t horas)

$$\frac{3}{2}t=114 \rightarrow t=76$$

Por lo tanto, quedará vacío en $(18+76)=94$ horas.

Problema 8

Una piscina es llenada por un caño en 4 horas; otro caño la llena en 6 horas. Cuando la piscina está llena puede ser vaciada por un desagüe en 8 horas, mientras que otro desagüe la vacía en 12 horas. Estando la piscina llena hasta su octava parte, se abren los caños durante 2 horas y, luego, se abren los desagües. ¿En cuánto tiempo se llenará dicha piscina?

Resolución

Trabajamos en la unidad de tiempo, teniendo en cuenta lo que han llenado los caños en 2 horas y lo que se llenaría de la piscina en x horas.

		En 1 h	En 2 h	En x h
Caño 1	4 h	$\frac{1}{4}$	$\frac{2}{4}$	$\frac{x}{4}$
Caño 2	6 h	$\frac{1}{6}$	$\frac{2}{6}$	$\frac{x}{6}$
Desagüe 1	8 h	$\frac{1}{8}$	0	$\frac{x}{8}$
Desagüe 2	12 h	$\frac{1}{12}$	0	$\frac{x}{12}$

Sabemos que estaba llena la octava parte.

Faltaría llenar

$$\frac{7}{8}=\frac{2}{4}+\frac{2}{6}+\frac{x}{4}+\frac{x}{6}-\frac{x}{8}-\frac{x}{12}$$

$$x=\frac{1}{5} \text{ horas}$$

Recordemos que los caños han estado abiertos 2 horas y luego se abrieron los desagües.

Por lo tanto, se llena en $2+\frac{1}{5}=2$ horas con 12 minutos.

Problema 9

Si a los dos términos de una fracción irreductible se le suma cinco veces el denominador y al resultado se le resta la fracción inicial, resulta la misma fracción. ¿Cuánto suman los términos de la fracción inicial?

Resolución

Sea $\frac{N}{D}$ la fracción.

Se tendrá del enunciado $\frac{N+5D}{6D}-\frac{N}{D}=\frac{N}{D}$

Homogeneizamos los denominadores.

$$\frac{N+5D}{6D}-\frac{6N}{6D}=\frac{6N}{6D}$$

Obtenemos que

$$N+5D=12N$$

$$11N=5D \rightarrow \frac{N}{D}=\frac{5}{11}$$

$\therefore\ N+D=16$

Problema 10

¿Cuántas fracciones comprendidas entre $\frac{19}{37}$ y $\frac{21}{23}$ son tales que sus términos son números consecutivos?

Resolución

La fracción tendrá la forma $\frac{N}{N+1}$.

Del enunciado

$$\frac{19}{37}<\frac{N}{N+1}<\frac{21}{23}$$

Invertimos la fracción.

$$\frac{23}{21}<\frac{N+1}{N}<\frac{37}{19}$$

$$1+\frac{2}{21}<1+\frac{1}{N}<1+\frac{18}{19}$$

$$\frac{2}{21}<\frac{1}{N}<\frac{18}{19}$$

$$\frac{19}{18}<N<\frac{21}{2}$$

$$1, \ldots < N < 10, \ldots$$

$\hookrightarrow$ 2; 3; 4; ...; 10

Para cada valor de N se tendrá una fracción.

Por lo tanto, se tendrán 9 fracciones

Problema 11

¿Para cuántos valores de n ($n \in \mathbb{Z}^+$) la expresión $\frac{5n+17}{3n-8}$ representa números fraccionarios mayores que 7?

Resolución

Se tiene

$$7<\frac{5n+17}{3n-8}$$

$$16n<73 \rightarrow n<4,\ldots$$

Además

$$3n-8>1$$

$$n>\frac{9}{3} \rightarrow n>3$$

De lo anterior ($3<n<4,\ldots$), obtenemos que $n=4$.

Por lo tanto, solo para un valor.

Problema 12

Halle $m+n$ si $\frac{m}{11}=0,\widehat{6n}$.

Resolución

Trabajamos con la generatriz.

$$\frac{m}{11}=\frac{\overline{6n}}{99}\ ;\ m=\frac{\overline{6n}}{9}$$

Se tiene $\overline{6n}=\overset{\circ}{9}$

$\uparrow$ 3

Luego $m=\frac{63}{9}=7$

$\therefore\ m+n=7+3=10$

Problema 13

¿Para cuántos números enteros p entre 1 y 500 se cumple que los términos de la fracción impropia $\dfrac{p^2+7}{p+4}$ no son PESI?

Resolución

Primero sacamos la parte entera.

$$\begin{array}{r|l} p^2+7 & p+4 \\ \underline{-p^2-4p} & p-4 \\ 4p+16 & \\ \underline{} & \\ 23 & \end{array}$$

$$p-4+\frac{23}{p+4}$$

Si no son PESI, significa que $p+4=\overset{\circ}{\overline{23}}$, es decir, $p=23k-4$.

Por condición,

$$1<p<500 \;\rightarrow\; 1<23k-4<500$$

$$\downarrow$$

$$5<23k<504;\ k\in\mathbb{Z}^+$$

$$\downarrow$$

1 No sería fracción.
2
⋮
21

Por lo tanto, se cumple para 20 números.

Problema 14

Halle $a+b+c$ si $\dfrac{a}{2}+\dfrac{b}{5}+\dfrac{c}{11}=1,4\widehat{63}$, siendo $\{a;b;c\}\subset\mathbb{Z}^+$.

Resolución

Tenemos

$$\frac{a}{2}+\frac{b}{5}+\frac{c}{11}=1+\frac{463-4}{990}=1+\frac{51}{110}$$

Multiplicamos todo por 110.

$$55a+22b+10c=161$$

Llevamos todo a $\overset{\circ}{\overline{11}}$.

$$\overset{\circ}{\overline{11}}+\overset{\circ}{\overline{11}}+10c=\overset{\circ}{\overline{11}}+7$$

$$10c=\overset{\circ}{\overline{11}}+(7+33)$$

$$c=\overset{\circ}{\overline{11}}+4 \;\rightarrow\; c:\ 4;\ 15;\ 26;\ \ldots$$

$c=4$ (ya que si fuera mayor, los valores de a y b no serían $\mathbb{Z}^+$)

Reemplazamos.

$$55a+22b+10(4)=161$$

$$55a+22b=121$$

$$5a+2b=11$$

$$\downarrow \quad \downarrow$$

1 3

$$\therefore\ a+b+c=8$$

Problema 15

Calcule la diferencia entre el denominador y el numerador al simplificar la siguiente expresión:

$$F=\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{28}+\frac{1}{70}+\frac{1}{130}+\ldots}_{30\text{ sumandos}}$$

Resolución

Se observa que los denominadores se pueden expresar como el producto de dos enteros que se diferencian en 3.

$$F=\underbrace{\frac{1}{1\times4}+\frac{1}{4\times7}+\frac{1}{7\times10}+\ldots+\frac{1}{88\times91}}_{30\text{ sumandos}}$$

Los números 4; 7; 10; ... forman un PA, cuyo término general tiene la forma $3n+1$.

$$91=3(30)+1$$

Multiplicamos por 3, de tal manera que la diferencia de los factores del denominador aparezca en el numerador.

$$3F=\frac{3}{1\times4}+\frac{3}{4\times7}+\frac{3}{7\times10}+\ldots+\frac{3}{88\times91}$$

$$3F=\left(1-\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{7}\right)+\left(\frac{1}{7}-\frac{1}{10}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{88}-\frac{1}{91}\right)$$

$$3F=\left(1-\frac{1}{91}\right);\ F=\frac{90}{91}\times\frac{1}{3}=\frac{30}{91}$$

Por tanto, la diferencia de términos $=91-30=61$.

Problema 16

¿Cuántas fracciones propias e irreducibles de denominador 275 existen que sean tales que en su desarrollo decimal la parte no periódica exceda en 12 a la parte periódica?

Resolución

$$\frac{N}{\underbrace{275}_{5^2\times11}}=0,\overline{abcd}$$

Como $\overline{ab}=\overline{cd}+12$

$\rightarrow\ \overline{cd}=\overline{ab}-12$

$$\rightarrow\ \frac{N}{\underset{1}{275}}=\frac{\overline{abcd}-\overline{ab}}{\underset{36}{9900}}$$

$$\underbrace{36N}_{\overset{\circ}{9}}=\underbrace{99\overline{ab}}_{\overset{\circ}{9}}+\overline{ab}-12 \qquad N<275$$

De ahí que

$\overline{ab}=\overset{\circ}{9}+3$

$\overline{ab}=12$ No es solución

$$\left.\begin{array}{ll}\overline{ab}=21 & \rightarrow\ N=58\\ \overline{ab}=30 & \rightarrow\ N=83\\ \vdots & \qquad\ \vdots\\ \overline{ab}=93 & \rightarrow\ N=258\end{array}\right\}\ 9\text{ valores}$$

Por lo tanto, hay 9 valores.

Problema 17

Si $\frac{17}{23}=0,\overline{ab\ldots xy}$, calcule $a+b+x+y$.

Resolución

Para hallar las primeras cifras dividimos

$$\begin{array}{r|l}170 & 24\\ \underline{161} & 0{,}73\ldots\\ 90 & \uparrow\uparrow\\ \underline{69} & ab\\ 21 & \end{array}$$

Para hallar las últimas cifras trabajaremos con la generatriz.

$$\frac{17}{23}=\frac{\overline{ab\ldots xy}}{99\ldots99} \qquad 17\times99\ldots99=\overline{\ldots xy}\times23$$

$$\ldots83=\overline{\ldots xy}\times23$$

Ahora reconstruimos la multiplicación.

$$\begin{array}{r}\ldots\boxed{2}\,\boxed{1}\times\\ 2\ \ 3\\ \hline 6\ \ 3\\ \underline{-\ 2\ \ \ }\\ \ldots\ 8\ \ 3\end{array} \qquad x=2;\ y=1$$

$\therefore\ a+b+x+y=7+3+2+1=13$

Problema 18

Calcule la suma de las cifras del periodo generado por la siguiente fracción:

$$F=\frac{47}{\underbrace{27027027\ldots}_{53\text{ cifras}}}$$

Resolución

Podemos observar lo siguiente:

$$\underbrace{27027}_{5\text{ cifras}}\times37=\underbrace{999999}_{6\text{ cifras}}$$

$$\underbrace{27027027}_{8\text{ cifras}}\times37=\underbrace{999999999}_{9\text{ cifras}}$$

$$\underbrace{27027027027}_{11\text{ cifras}}\times37=\underbrace{999\ldots9}_{12\text{ cifras}}$$

En la fracción inicial tendremos:

$$F=\frac{47\times 37}{27027027...27\times 37}=\frac{1739}{\underbrace{999...999}_{54\text{ cifras}}}$$

Lo cual representa la generatriz de F.

$$F=0,\underbrace{\widehat{00...01739}}_{54\text{ cifras}}$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{suma de cifras}\\ \text{del periodo}\end{pmatrix}=1+7+3+9=20$$

Problema 19

Si la fracción

$$F=\frac{280}{40^{3n}\times 34^{n+5}}$$

genera 72 cifras en la parte no periódica, calcule la suma de cifras del periodo que genera la fracción $\left(\frac{n-3}{n}\right)$.

Resolución

Descomponemos canónicamente el numerador y el denominador.

$$F=\frac{280}{40^{3n}\times 34^{n+5}}$$

$$F=\frac{7\times 2^3\times 5}{(2^3\times 5)^{3n}\times 17^{n+5}\times 2^{n+5}}$$

$$F=\frac{7}{2^{10n+2}\times 5^{3n-1}\times 17^{n+5}}$$

El mayor exponente de 2 o 5 nos da la cantidad de cifras no periódicas.

Luego,

$$10n+2=72;\ n=7$$

Reemplazando tendremos

$$\frac{n-3}{n}=\frac{4}{7}=0,\widehat{571428}$$

Por lo tanto, la suma de cifras es 27.

Problema 20

Si f es irreductible y se sabe que

$$f=\frac{n+1}{\overline{(n-1)(n+3)}}=0,\widehat{pqr}$$

¿cuántas cifras periódicas origina $\frac{n+1}{\overline{qpr}}$?

Resolución

Hallemos la generatriz.

$$f=\frac{n+1}{\overline{(n-1)(n+3)}}=\frac{\overline{pqr}}{999}=\frac{\overline{pqr}}{27\times 37}$$

$\overline{(n-1)(n+3)}$ no puede ser 27

Luego,

$$\overline{(n-1)(n+3)}=37\ \rightarrow\ n=4$$

$$f=\frac{5}{37}=0,\widehat{135}=0,\widehat{pqr}$$

Reemplazamos.

$$\frac{n+1}{\overline{qpr}}=\frac{5}{315}=\frac{1}{63}=\frac{1}{7\times 9}$$

Por lo tanto, 7 genera 6 cifras periódicas.

Problema 21

Indique la suma de los términos de la fracción irreductible que resulta de

$$f=\frac{1}{3^2}+\frac{5}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\frac{5}{3^8}+\frac{1}{3^{10}}+...$$

Resolución

Sea $f=\frac{1}{3^2}+\frac{5}{3^4}+\frac{1}{3^6}+\frac{5}{3^8}+...$

Expresamos los denominadores como potencias de 9.

$$f=\frac{1}{9}+\frac{5}{9^2}+\frac{1}{9^3}+\frac{5}{9^4}+...$$

La expresión f representa la descomposición polinómica de un número nonaval periódico puro.

Así tendremos

$$f=0,\widehat{15}_9=\frac{15_9}{88_9}=\frac{\cancel{14}}{\cancel{80}}=\frac{7}{40}$$

Por lo tanto, la suma de términos es $7+40=47$.

Problema 22

Si $0,m\widehat{n}=\dfrac{n-5}{6}$ y $0,n\widehat{m}=\dfrac{5m+6}{18}$

halle la tercera cifra decimal que resulta al sumarlos.

Resolución

Hallemos la generatriz.

$$0,m\widehat{n}=\frac{n-5}{6}\rightarrow\frac{\overline{mn}-m}{90}=\frac{n-5}{6}$$

$$9m+n=15n-75$$

$$\underset{\substack{\downarrow\\6}}{14n}-\underset{\substack{\downarrow\\1}}{9m}=75\ (n=\overset{\circ}{3})$$

$$0,1\widehat{6}=0,1666...$$

$$0,n\widehat{m}=0,6\widehat{1}=0,6111...$$

Luego

$$0,m\widehat{n}+0,n\widehat{m}=0,7777...$$

Por lo tanto, la tercera cifra decimal es 7.

Problema 23

Se sabe que $m\in\mathbb{Z}^+$, tal que $(m;1)\in\left[\dfrac{83-12b}{7}\right]$; $\dfrac{r}{s}$ es el representante canónico de $\left[\dfrac{b}{m}\right]$ y $m+b<10$. Halle $r+s$.

Resolución

Se sabe que $(m;1)$ representa a $m\in\mathbb{Z}^+$; de ahí que

$$\overset{\overset{\circ}{7}+6}{\overbrace{83}}-12b=\overset{\circ}{7}$$

$$12b=\overset{\circ}{7}+6$$

$$b=\overset{\circ}{7}+4$$

$$b=4$$

Luego

$$m=\frac{83-12(4)}{7}=5$$

$$m=5 \text{ y } b=4\ (m+b<10)$$

La clase de equivalencia $\left[\dfrac{b}{m}\right]=\left[\dfrac{4}{5}\right]$ tiene como representante canónico a $\dfrac{r}{s}=\dfrac{4}{5}$.

$\therefore\ r+s=9$

Problema 24

Determine la suma de los términos de una fracción perteneciente a $\left[\dfrac{14}{63}\right]$, tal que la diferencia de sus términos sea $\overset{\circ}{49}$, el denominador sea $\overset{\circ}{5}$ y su numerador sea $\overset{\circ}{8}$ y lo menor posible. Indique la suma de cifras de la suma pedida.

Resolución

Veamos la forma de la fracción a hallar. Como pertenece a $\left[\dfrac{14}{63}\right]$, tendrá la forma $\dfrac{2k}{9k}$. Según las condiciones tenemos lo siguiente:

$$9k-2k=\overset{\circ}{49};\qquad 9k=\overset{\circ}{5};\qquad 2k=\overset{\circ}{8}$$

$$7k=\overset{\circ}{49};\qquad k=\overset{\circ}{5};\qquad k=\overset{\circ}{4}$$

$$k=\overset{\circ}{7}$$

Luego

$$k \begin{cases} \overset{\circ}{7} \\ \overset{\circ}{5} \\ \overset{\circ}{4} \end{cases} \qquad k=\overline{\overset{\circ}{140}} \qquad k_{\text{mín}}=140$$

La fracción pedida será $\dfrac{2(140)}{9(140)}=\dfrac{280}{1260}$.

$\rightarrow$ suma de términos$=280+1260=1540$

$\therefore \begin{pmatrix}\text{suma de}\\ \text{cifras}\end{pmatrix}=1+5+4+0=10$

Problema 25

Si p es la cantidad de cifras de la parte no periódica y q es la cantidad de cifras de la parte periódica de $\dfrac{11\times 17}{7^3\times 5\times 19}$ en la base 7, calcule $q-p$.

Resolución

Como la fracción ya es irreductible tendremos que $p=3$ (exponente de 7). Para hallar q debemos analizar los numerales de cifras máximas en base 7.

$$\left.\begin{aligned} 6_7&=2\times 3\\ 66_7&=2^4\times 3\\ 666_7&=2\times 3^2\times 19\\ 6666_7&=2^5\times 3\times 5^2 \end{aligned}\right\}$$

Observamos que 19 aparece en 3 cifras máximas por primera vez; 5 aparece en 4 cifras máximas por primera vez.

Para que coincidan ambos factores se deberá tener MCM(3; 4)=12 cifras máximas, entonces $q=12$.

$\therefore\ q-p=12-3=9$

Problema 26

Se sabe que $0{,}\overline{ab}_4=0$; $\overline{bac}_6=\dfrac{p}{q}$; además, p y q son PESI. Calcule $a+b+c+p+q$.

Resolución

Como sabemos que son avales exactos, las últimas cifras no pueden ser cero, entonces, $b\neq 0$ y $c\neq 0$.

$$0{,}\overline{ab}_4=\frac{\overline{ab}_4}{100_4}=\frac{4a+b}{16}$$

$$0{,}\overline{bac}_6=\frac{\overline{bac}_6}{1000_6}=\frac{36b+6a+c}{216}$$

$$\frac{4a+b}{16}=\frac{36b+6a+c}{216}$$

Simplificamos y operamos.

$$108a+27b=72b+12a+2c$$

$$\underbrace{96a}_{\overset{\circ}{3}}=\underbrace{45b}_{3}+2c$$

$$c=\overset{\circ}{3}\quad (c<6)\ \rightarrow\ c=3$$

Reemplazamos.

$$\underbrace{96a}_{\overset{\circ}{2}}=45b+\underbrace{6}_{\overset{\circ}{2}}$$

$$b=\overset{\circ}{2}\quad (b<4)$$

$\rightarrow\ b=2;\qquad a=1$

$$\frac{p}{q}=\frac{4(1)+2}{16}=\frac{36(2)+6(1)+3}{216}=\frac{3}{8};\ p=3 \text{ y } q=8$$

$\therefore\ a+b+c+p+q=17$

Test

1. ¿Cuánto obtiene Iván al agregar a los 3/8 de los 24/7 de 112 los 2/5 de los 15/9 de 90?

A) 200 B) 202 C) 204
D) 206 E) 208

2. ¿Cuál es la fracción ordinaria que resulta triplicada si se agrega su denominador a sus dos términos?

A) $\frac{1}{5}$ B) $\frac{1}{4}$ C) $\frac{2}{13}$
D) $\frac{2}{9}$ E) $\frac{5}{13}$

3. Mijaíl gasta 1/3 de los ahorros que tiene y gana 1/3 de lo que le queda. Si ha perdido en total 12 soles, ¿cuántos soles tenía al principio?

A) 108 B) 126 C) 135
D) 144 E) 99

4. Halle la suma de los términos de la fracción irreductible equivalente a $\frac{420}{924}$.

A) 18 B) 21 C) 16
D) 30 E) 32

5. Halle la suma de todos los valores de a si se sabe que la fracción $a/12$ es propia e irreductible.

A) 18 B) 21 C) 24
D) 30 E) 32

6. Si dos fracciones propias e irreductibles suman 5, y sus numeradores suman 35, ¿cuál será la suma de sus denominadores?

A) 7 B) 12 C) 9
D) 11 E) 14

7. Halle a si $0,a\widehat{3}=\frac{7}{30}$

A) 7 B) 1 C) 2
D) 4 E) 9

8. Si $0,\widehat{abc}=0,16_9$, halle $a+b+c$.

A) 5 B) 10 C) 12
D) 14 E) 15

9. Si $M=\frac{1}{5^1}+\frac{2}{5^3}+\frac{1}{5^4}+\frac{2}{5^6}+\frac{1}{5^7}+\ldots$ halle M.

A) $\frac{7}{24}$ B) $\frac{17}{24}$ C) $\frac{27}{24}$
D) $\frac{37}{24}$ E) $\frac{27}{124}$

10. Si un caño llena una piscina en 8 horas y otro caño de menor caudal la llena en 12 horas, ¿en qué tiempo se llenará la piscina, estando vacía, si se abren ambos caños al mismo tiempo?

A) 4 h 30 min
B) 4 h 36 min
C) 4 h 48 min
D) 3 h 48 min
E) 5 h 20 min

CLAVES

1 C 2 A 3 A 4 D 5 C 6 E 7 C 8 D 9 E 10 C

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Un ludópata asiste todos los días al casino. Cierto día, después de perder 3/8 de su dinero, 1/9 del resto y 3/10 del nuevo resto, gana 3700 soles; de este modo, su pérdida quedó reducida al 20% del dinero inicial. ¿Qué cantidad de dinero tenía inicialmente?

A) 7200 B) 8400 C) 8600
D) 9000 E) 9600

2. En una barrica se tiene una mezcla de 24 litros de agua con 48 litros de mosto de vino. Se extrae 1/3 de la mezcla y se reemplaza con 20 litros de agua; luego se extrae 1/4 de la mezcla y se reemplaza con 5 litros de agua; finalmente, se extrae 1/8 de la mezcla. Calcule la diferencia entre los volúmenes de agua y de mosto de vino en la mezcla final.

A) 5 L B) 8 L C) 6 L
D) 9 L E) 7 L

3. Un tanque de agua, que abastece a todo el sector de San Felipe en Comas, puede ser llenado por un caño *A* en 15 horas y por un caño *B* en 10 horas; además, puede ser vaciado por una tubería *C*, que se encuentra en la base, en 2 horas. *A* y *B* trabajan juntos por 4 horas, luego se cierran y, después, se abre *C*. ¿En cuánto tiempo es vaciado el contenido del estanque?

A) 1 h 30 min
B) 1 h 20 min
C) 2 h 30 min
D) 2 h 20 min
E) 1 h 40 min

4. Para pavimentar 3 tramos de la Panamericana Sur, entre los puentes vehiculares Arica y Quebrada, se divide el trabajo en 3 cuadrillas de la siguiente forma: el primer grupo debe hacer los 5/11; el segundo grupo debe hacer los 3/7; y el tercer grupo debe hacer el resto. En los primeros 28 días, el primer grupo ha hecho 4/5 de lo que le corresponde, el segundo grupo ha hecho 2/3 de lo que le corresponde y el tercer grupo ha hecho la tercera parte de lo suyo. Si ahora solo el primer grupo trabajará, ¿en qué tiempo culminará lo que falta de la obra?

A) 28 días B) 27 días C) 26 días
D) 25 días E) 24 días

5. En una reunión por el aniversario de la academia Cesar Vallejo se observa que los 2/3 de los concurrentes son mujeres y que los 3/5 de los varones son casados, en tanto que los otros 60 son solteros. ¿Cuál es la diferencia entre el número de mujeres y el número de varones casados?

A) 450 B) 360 C) 210
D) 90 E) 150

6. Un camión transporta naranjas desde Huaral hasta Lima. En la primera parada, en el mercado de Zapallal, descarga 2/3 de las cajas que traslada; y después descarga 5 cajas en una tienda en Puente Piedra. Si le queda la cuarta parte de su carga original, la cual será entregada en el mercado Unicachi de los Olivos, ¿cuál será el importe que pagará el comerciante del mercado Unicachi sabiendo que por cada caja cobran 8 soles por el traslado?

A) 120 B) 108 C) 72
D) 144 E) 152

7. Mijaíl se percata que ha gastado 5/6 de su propina para comprar un videojuego. Si en lugar de gastar esos 5/6 hubiera gastado los 7/8 de su dinero en comprar otro videojuego, tendría ahora S/10 menos de lo que tiene. ¿Cuánto dinero le queda a Mijail?

A) S/50 B) S/60 C) S/48
D) S/40 E) S/56

8. Iván realiza un viaje de trabajo a la ciudad de Trujillo, por el cual recibe viáticos por 4 días. El primer día gastó la quinta parte; el segundo día gastó 1/8 del resto; el tercer día gastó los 5/3 de la cantidad del primer día; el cuarto día gastó el doble de la cantidad del segundo día. Si le quedaron S/20, ¿cuál fue la cantidad entregada para los viáticos?

A) S/100
B) S/120
C) S/300
D) S/90
E) S/180

9. Al lavarse una tela en la lavandería industrial, antes del proceso de fabricación de prendas de vestir, se observa que se encoge 1/3 de su longitud y que también se estira 1/5 de su ancho. ¿Cuántos metros deberán comprarse para que después de lavada se disponga de 240 m^2 para la elaboración de polos si se sabe que el ancho original de la tela es de 60 cm?

A) 150 B) 240 C) 360
D) 480 E) 500

10. Janet va al mercado los días domingos y realiza las compras para toda la semana. Cierto domingo al hacer el balance de sus gastos dice: "Gasté los 2/5 de lo que no gasté; luego perdí 1/4 de lo que no perdí, y me quedé al final con S/32". ¿Cuánto tenía inicialmente?

A) S/42 B) S/50 C) S/64
D) S/72 E) S/56

11. Un cobrador de ómnibus de la empresa de transportes Etuchisa se percata de que en el primer paradero se bajan los 2/5 de los pasajeros que lleva y que suben 15; en el segundo, se bajan los 2/3 de los que lleva en ese momento y suben 35. ¿Cuántos pasajeros tenía el ómnibus en su paradero inicial si llegó al tercer paradero con 50 pasajeros?

A) 50 B) 45 C) 60
D) 48 E) 42

12. María Alejandra tiene M soles, pero jugando ajedrez pierde los 3/10 de lo que no pierde. Luego juega ludo y recupera 3/17 de lo que le quedaba, por lo que se percata de que si ganara S/63 más, habría recuperado todo lo perdido. Halle M.

A) S/663 B) S/660 C) S/442
D) S/440 E) S/450

13. Indique la verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:

I. La gráfica de la clase de equivalencia $\left[\frac{3}{8}\right]$ no es parte de una recta.

II. La representación de un número irracional mediante fracciones continuas simples posee finitos términos.

III. Si $\sqrt{\overline{ab}}=[6\,;\overline{1;12}]$, entonces $a+b=12$.

A) FFF B) FFV C) VVV
D) FVF E) FVV

14. Un contratista realiza una obra con 1/19 de rebaja en el presupuesto inicial. Para el pago de planilla de los obreros, destina 7/11 de lo que él ha de cobrar, además, paga con los 2/37 de lo que le quedaba un seguro de vida. ¿Cuál era el presupuesto inicial si después de realizar todos sus gastos le queda S/2520?

A) S/3377 B) S/7373 C) S/7733
D) S/7337 E) S/7007

15. Se dejan derretir 3 pedazos de hielo, tales que el volumen del segundo es los 4/11 del volumen del primero y los 6/13 del tercero. Si se sabe que la diferencia entre los volúmenes del primero y el tercero de los trozos es 231 cm^3, y que el agua se dilata 1/10 de su volumen al pasar del estado líquido al estado sólido, ¿cuántos centímetros cúbicos de agua se obtienen en esta operación?

A) 1200 cm^3 B) 1120 cm^3 C) 2343 cm^3
D) 1000 cm^3 E) 2130 cm^3

16. Al dividir una herencia en 2 partes, resulta que la diferencia entre los 4/5 de los 3/8 de la cantidad mayor menos los 5/12 de los 4/7 de la cantidad menor es igual a 1/3 de la cantidad menor. Si la herencia total es S/30 500, ¿cuál es la diferencia de las partes?

A) S/19 500 B) S/9500 C) S/9580
D) S/9150 E) S/7200

17. Indique la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) según corresponda respecto a los números racionales.

I. Todo racional posee representante canónico.
II. Si n es un número irracional, entonces $\sqrt[3]{n^2}$ es también irracional.
III. Si el radio de un círculo es irracional, su área es irracional.

A) VVV B) VFF C) VFV
D) VVF E) FFF

Nivel intermedio

18. Jessica, Katty y Janet son 3 tejedoras artesanales, las cuales pueden tejer 1 lote de chullos en $1\frac{17}{23}$ días. Si Jessica y Katty se demoran 5 y 8 días, respectivamente, en elaborar dicho lote trabajando solas, ¿cuántos días se demorará Janet si elabora ella sola todo el pedido?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

19. Halle $a+b$ si $\frac{a}{11}+\frac{b}{3}=0{,}9696...$

A) 6 B) 8 C) 9
D) 12 E) 14

20. ¿Cuántas fracciones propias e irreductibles de numerador 50 existen tales que sean mayores que $\frac{23}{37}$?

A) 10 B) 11 C) 12
D) 13 E) 14

21. Si $\frac{a}{b}=0{,}\widehat{a}$; $\frac{a+2}{b+2}=0{,}\widehat{ef}$; $a+2=e+f$, halle $\frac{a}{b}$.

A) $0{,}\widehat{9}$ B) $0{,}\widehat{6}$ C) $0{,}\widehat{7}$
D) $0{,}\widehat{3}$ E) $0{,}\widehat{5}$

22. Indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones respecto a los números racionales $\mathbb{Q}$.

I. Si $\frac{c}{d} \in \left[\frac{a}{b}\right]$, entonces

$$\left[\frac{c}{d}\right] \cup \left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{c}{d}\right]$$

II. Si $\left[\frac{a}{b}\right] \cap \left[\frac{p}{q}\right] \neq \varnothing$, entonces $\left[\frac{a}{b}\right] = \left[\frac{p}{q}\right]$.

III. Los elementos de $\mathbb{Q}$ son conjuntos.

IV. El número $\frac{0}{3}$ no pertenece a una clase de equivalencia.

A) FVVF B) FVFV C) VVVF
D) VVFF E) FVVV

23. ¿Cuántas fracciones $\frac{P}{36}$ tienen en su representación decimal una cifra periódica y una cifra no periódica si se cumple que $\frac{2}{5} < \frac{P}{36} < \frac{44}{15}$?

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

24. Si $S = \frac{1}{7} + \frac{3}{7^2} + \frac{1}{7^3} + \frac{3}{7^4} + \frac{1}{7^5} + \frac{3}{7^6} + \ldots$

cuando S se expresa como fracción irreductible, calcule la suma del numerador y el denominador.

A) 31 B) 29 C) 24
D) 21 E) 19

25. Si $\frac{101}{15\,873} = 0,\ldots\widehat{abcd}$

además $\frac{\overline{abc}}{\overline{bd}} = [e; f; g; h]$,

halle $e+f+g+h$.

A) 20 B) 24 C) 25
D) 27 E) 36

26. De un tonel lleno de vino se extraen 2/5 de lo que no se extrae y se llena de agua. Si esta operación se repite 3 veces, ¿qué fracción del volumen de agua es el volumen de vino al final?

A) $\frac{170}{218}$ B) $\frac{31}{41}$ C) $\frac{43}{31}$
D) $\frac{125}{218}$ E) $\frac{173}{281}$

27. Se tiene 3 planchas de fierro de superficies $\frac{1334}{560}$; $\frac{874}{280}$ y $\frac{1173}{90}$ en m^2. Si se desea dividir estas planchas en piezas rectangulares, todas de igual área, cuyo ancho sea $\frac{92}{210}$ m, calcule el total de piezas obtenidas. Considere que no debe sobrar material.

A) 581
B) 723
C) 677
D) 621
E) 743

28. Jorge y Ángel pueden realizar una obra en 40 días. Al empezar el noveno día de trabajo, se retira Jorge y continúa Ángel; de esta forma, la obra se termina en 12 días más de lo establecido inicialmente. Si en lugar de Ángel se hubiera quedado Jorge, ¿cuántos días más de lo inicial se habría empleado?

A) $76,\widehat{2}$ B) $83,\widehat{2}$ C) 90
D) $72,\widehat{6}$ E) $85,\widehat{3}$

Nivel avanzado

29. Determine la suma de las dos últimas cifras del período originado por la fracción $\frac{8}{23}$.

A) 9 B) 6 C) 4
D) 8 E) 10

30. Calcule la suma de los términos de la fracción irreductible que da origen a la fracción continua [1; 2; 3; 4; 5].

A) 383 B) 392 C) 382
D) 282 E) 372

31. Sabiendo que al dividir N entre 8! se obtiene un decimal de 5 cifras no periódicas y una periódica, calcule cuál es el menor valor de N.

A) 28 B) 29 C) 30
D) 32 E) 34

32. Obtenga una fracción irreductible cuyo numerador sea 648 tal que dé lugar a un número decimal periódico mixto con 3 cifras en la parte no periódica y con 2 cifras en el periodo. Dé la suma de las cifras del denominador.

A) 13 B) 15 C) 12
D) 14 E) 16

33. Si $E=\frac{15273}{37037037...}$ tiene en el denominador $(33n+2)$ cifras, halle la suma de cifras del periodo generado en E.

A) 15 B) 18 C) 27
D) 36 E) 45

34. Si $0,\overline{\left(\frac{15}{x}\right)(x)(x^2+1)}_{14}=d,\overline{abc}_7$, calcule cuántas cifras genera en el período la fracción $\frac{a}{\overline{bc}}$ cuando se expresa en base 6.

A) 1 B) 2 C) 3
D) 4 E) 5

35. Dada la fracción irreductible $\frac{510}{511}$, determine la cantidad de cifras que tiene el periodo de su expresión decimal.

A) 6 B) 8 C) 14
D) 24 E) 48

36. Determine la cantidad de cifras en la parte no periódica del heptaval periódico mixto que origina la fracción $f=\frac{56}{84!-81!}$.

A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 13

37. Si $\frac{\overline{ab}}{\overline{ba}}=0,\widehat{mnpq}_5$

calcule $a+b+m+n+p+q$.

A) 13 B) 12 C) 11
D) 10 E) 9

38. Si

$$A=\frac{1}{2}+\frac{1}{2^3}+\frac{1}{2^5}+...$$

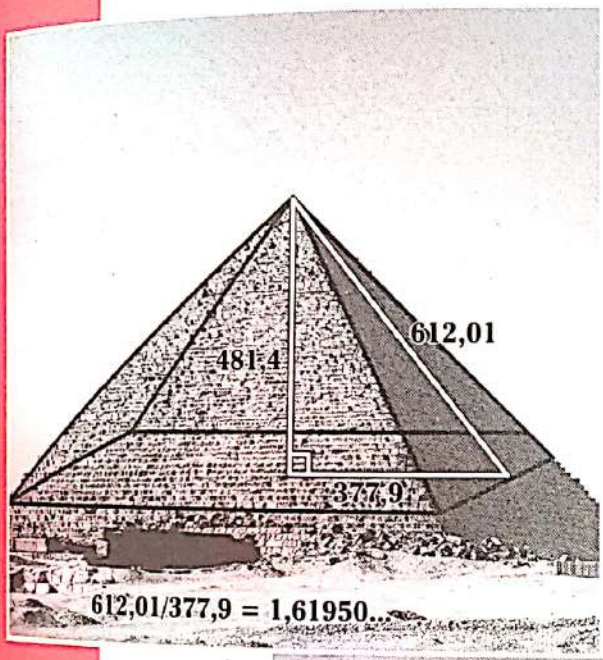
$$B=\frac{9}{10^2}+\frac{9}{10^5}+\frac{9}{10^8}+...$$

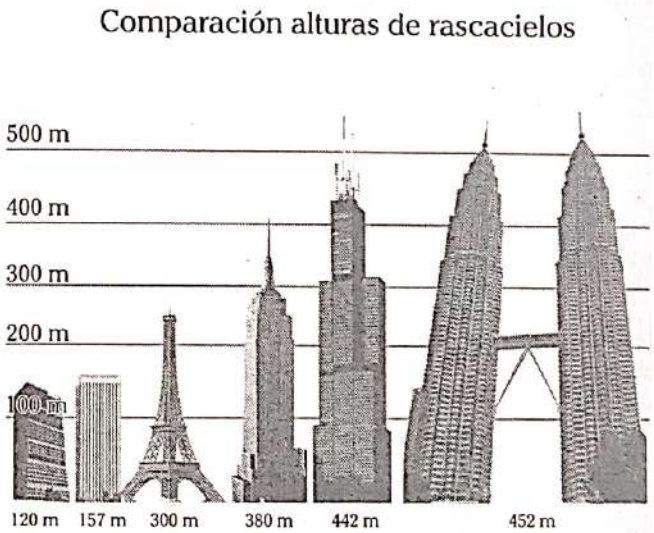
calcule la cifra de orden −25 que generan $A+B$.

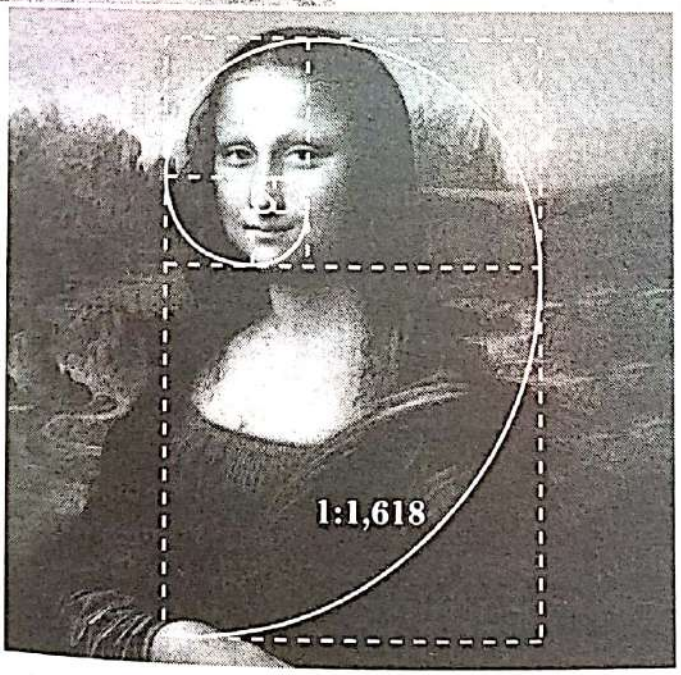
A) 6 B) 2 C) 7
D) 0 E) 4

Capítulo

XII







Razones y Proporciones

Arturo Sánchez Vásquez

CAPÍTULO XII

RAZONES Y PROPORCIONES

Objetivos

- Reconocer las razones aritméticas, geométricas y armónicas, así como sus aplicaciones.
- Reconocer la serie de razones geométricas equivalentes y los casos particulares, como son las proporciones aritméticas, geométricas y armónicas.
- Aplicar las propiedades de la serie de razones geométricas equivalentes y de las proporciones en la resolución de problemas.

Introducción

Desde lo cotidiano hay dos tipos de comparaciones bastante utilizadas: mediante una sustracción (por ejemplo, en la diferencia de edades) o mediante una división (por ejemplo, en la relación de los ingredientes para una receta), en ambos casos estamos hablando de una razón (aritmética y geométrica) que aprenderemos a distinguir.

A partir de las razones llegamos a las proporciones, las cuales amplían su importancia debido a las aplicaciones que tienen en diversas ramas de las matemáticas, la ciencia, el arte, etc., por ejemplo, en la ingeniería civil (en el diseño de mezclas), en la arquitectura (para escalas de las maquetas), en la química (en el cálculo de densidad), en las finanzas (en la relación costo-beneficio), en la música (en los sistemas de afinación), en el arte (cuando se amplía y reduce el tamaño de una obra de arte original), etc.

El contenido del presente capítulo está organizado de la siguiente manera: al inicio de la teoría encontraremos las razones, sus clases, sus aplicaciones y los casos más frecuentes en exámenes de admisión; más adelante, veremos la igualdad de dos o más razones equivalentes y, como un caso particular, estudiaremos las proporciones, de igual modo, los aspectos teóricos serán reforzados con ejemplos y aplicaciones; al final de la teoría, encontraremos una lectura relativa al tema. A continuación, hay una variedad de problemas resueltos, seguido de un test para que nos autoevaluemos y, finalmente, problemas propuestos. Recomendamos que se siga el orden indicado, ya que el capítulo está elaborado con una secuencia que va de lo sencillo a lo complejo. Tengamos presente que las razones las aplicaremos en otros temas, como por ejemplo en magnitudes proporcionales.

RAZONES

1 Definición

Es la comparación que se establece entre dos cantidades mediante una operación aritmética (sustracción o división).

Ejemplo

En la etapa final de la elección de las 7 nuevas maravillas del mundo quedaron 21 monumentos preseleccionados, de los cuales serían elegidos solo 7.

Los resultados se dieron a conocer en una gran ceremonia el 7 de julio del 2007 en el estadio Benfica Lisboa (Portugal). Estas nuevas 7 maravillas del mundo son:

- Machu Picchu (Perú)
- El Cristo Redentor (Brasil)
- Chichén Itzá (México)
- El Coliseo de Roma (Italia)
- La Gran Muralla China (China)
- El Taj Mahal (India)
- Petra (Jordania)

Entonces, podemos observar lo siguiente:

- 14 monumentos quedaron eliminados; es decir, se realizó la siguiente operación:

  $21-7$

- La cantidad de monumentos preseleccionados era el triple de la cantidad de monumentos que iban a ser elegidos; es decir, se realizó la siguiente operación:

  $\frac{21}{7}$

- Solo iba a ser elegida la tercera parte de la cantidad de monumentos preseleccionados; es decir, se realizó la siguiente operación:

  $\frac{7}{21}$

Notamos que estamos comparando dos cantidades (21 y 7) mediante las operaciones de sustracción o división.

2 Clases de razones

2.1. Razón aritmética

Es la comparación que se establece entre dos cantidades mediante una sustracción.

Del ejemplo anterior, tenemos la razón aritmética 21-7, la cual tiene dos términos: 21 es el antecedente y 7 es el consecuente.

Mediante la razón aritmética se puede conocer en cuánto excede una cantidad a la otra.

Así tenemos que

$21-7=14$

Entonces, 14 es el valor de la razón aritmética.

Podemos interpretar lo siguiente:

- La cantidad de monumentos preseleccionados excede (es mayor) a la cantidad de monumentos elegidos en 14.
- La cantidad de monumentos elegidos es excedida (menor) en 14 a la cantidad de monumentos preseleccionados.

En general

$$\boxed{a-b=r}$$

donde

- a: antecedente
- b: consecuente
- r: valor de la razón aritmética

Observación

- Si A excede a B en 6, entonces

  $A-B=6$

- Si C es excedido por D en 10, entonces

  $D-C=10$

Ejemplos

- Hallemos en cuánto excede 23 a 17.

  $\rightarrow$ $23-17=6$

  Excede en 6.

- Hallemos en cuánto es excedido 13 por 29.

  $\rightarrow$ $29-13=16$

  Es excedido en 16.

Aplicación 1

La cantidad de problemas resueltos por Andrea excede en 13 a los problemas resueltos por Bertha, y la cantidad de problemas resueltos por Claudia es excedida en 7 por los problemas resueltos por Bertha. Halle el valor de la razón aritmética entre la cantidad de problemas resueltos por Andrea y Claudia, en ese orden.

Resolución

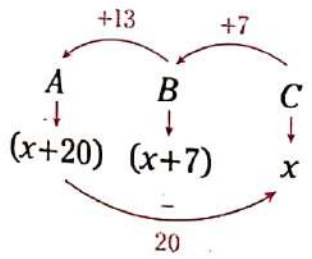
Sean A, B y C las cantidades de problemas resueltos por Andrea, Bertha y Claudia, respectivamente. Del enunciado se tiene que

$$\begin{array}{l} A-B=13 \\ B-C=7 \\ \hline A-C=20 \end{array} \quad (+)$$

Por lo tanto, el valor de la razón aritmética pedida es 20.

Otra forma

Sea x la cantidad de problemas resueltos por Claudia.



$\rightarrow (x+20)-x=20$

Por lo tanto, el valor de la razón aritmética pedida es 20.

Nota

Cuando se pide hallar la razón aritmética se entenderá que lo que se está pidiendo es hallar el valor de dicha razón aritmética; si no se especifica, daremos como respuesta su valor positivo.

2.2. RAZÓN GEOMÉTRICA

Es la comparación que se establece entre dos cantidades mediante una división.

Del ejemplo inicial, tenemos la siguiente razón geométrica:

$$\frac{21}{7}$$

la cual tiene dos términos: 21 que es el antecedente y 7 que es el consecuente.

Mediante la razón geométrica se puede conocer cuántas veces una cantidad contiene o está contenida en la otra, o simplemente en qué relación se encuentran dichas cantidades. Así tenemos que

$$\frac{21}{7}=3$$

Entonces 3 es el valor de la razón geométrica.

Luego, en la razón geométrica obtenida se tiene que

$$\frac{21}{7}=3=\frac{3}{1}$$

De lo cual se puede interpretar lo siguiente:

- La cantidad de monumentos preseleccionados (MP) y la cantidad de monumentos elegidos (ME) están en la relación de 3 a 1.
- MP es a 3 como ME es a 1.
- ME y MP están en la relación de 1 a 3.
- ME es a 1 como MP es a 3.
- MP es el triple de ME, lo que equivale decir que MP es dos veces más que ME.

En general,

$$\boxed{\frac{a}{b}=k}$$

donde

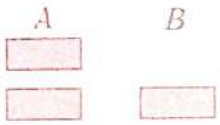
- a: antecedente
- b: consecuente
- k: valor de la razón geométrica

Observación

Comparemos las cantidades de A y B.

-

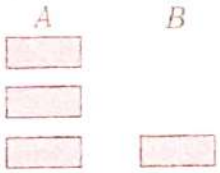
  A es igual a B.

- 

  A es dos veces B; $(A=2B)$.

  <>

  A es una vez más que B; $(A=B+1\times B)$.

- 

  A es tres veces B; $(A=3B)$.

  <>

  A es dos veces más que B; $(A=B+2\times B)$

En general,

> A es K veces B; $(A=kB)$
>
> <>
>
> A es $(k-1)$ veces más que B
>
> $A=B+(k-1)B$

Ejemplos

- Andrés tiene 12 años y la edad de Carolina es dos veces más que la de Andrés. Entonces, la edad de Carolina es el triple que la de Andrés.

  Por lo tanto, Carolina tiene 36 años.

- Juan tiene S/150 y Janeth tiene tres veces más que Juan. Entonces, Janeth tiene el cuádruple de lo que tiene Juan.

  Por lo tanto, Janeth tiene S/600.

Nota

Cuando se pida hallar la razón geométrica, se entenderá que lo que se está pidiendo es hallar el valor de dicha razón geométrica, y se debe poner atención al orden en que son mencionados sus términos; por ejemplo, es distinto que nos pidan la relación entre las cantidades de varones y mujeres que la relación entre las cantidades de mujeres y varones.

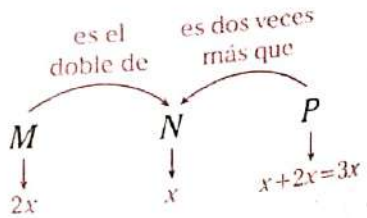
Aplicación 2

Al cabo de una hora se observa que la cantidad de problemas que resuelve Manuel es el doble de la cantidad de problemas que resuelve Nidia y que la cantidad de problemas resueltos por Patricia es dos veces más de lo que ha resuelto Nidia. ¿En qué relación se encuentra la cantidad de problemas resueltos por Patricia y la cantidad de problemas resueltos por Manuel?

Resolución

Sean M, N y P las cantidades de problemas resueltos por Manuel, Nidia y Patricia, respectivamente.

Si en una hora Nidia ha resuelto x problemas, entonces

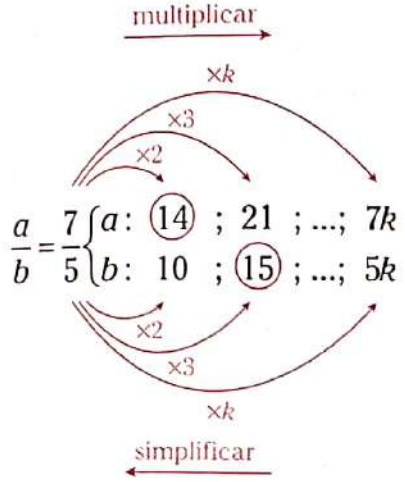


$$\rightarrow \frac{P}{M}=\frac{3x}{2x}=\frac{3}{2}$$

Por lo tanto, los problemas resueltos por Patricia y por Manuel están en la relación de 3 a 2.

Analicemos diferentes situaciones.

- Dos números están en relación de 7 a 5. Sean a y b los números.



No necesariamente a vale 7 y b vale 5.

Entonces

$a=7k$ y $b=5k$

En una relación se puede multiplicar o simplificar a todos sus términos para que la relación no se altere.

- a y b son entre sí como 7 es a 3.

a es como 7 y b es como 3

$$\frac{a}{b}=\frac{7}{3}$$

Entonces

- $a+b$ es como 10.
- $a-b$ es como 4.

En general

$a=7k$; $b=3k$

$a+b=10k$

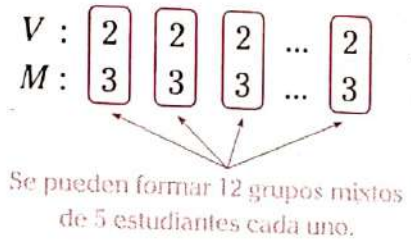
$a-b=4k$

- Si en un aula de una academia hay 24 varones y 36 mujeres, la relación entre la cantidad de varones y mujeres será

varones → V, mujeres → M: $\frac{V}{M}=\frac{\cancel{24}}{\cancel{36}}=\frac{2}{3}$

La relación es de 2 a 3.

Lo anterior también se puede interpretar como que en el aula hay 2 varones por cada 3 mujeres.



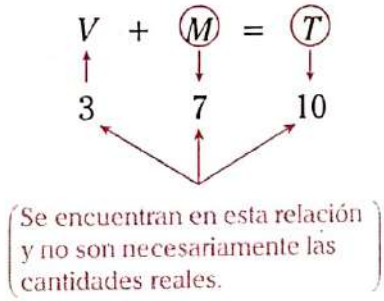
- Si la relación entre la cantidad de mujeres y el total de personas es de 7 a 10, entonces
  - cantidad de mujeres $=M$
  - total de personas $=T$

$$\frac{M}{T}=\frac{7}{10}\begin{cases}M=7n\\T=10n\end{cases}$$

También podemos entender que el total de personas están conformadas por varones y mujeres. Por ello, si el total de personas es como 10 y el de mujeres es como 7, entonces la cantidad de varones será como 3.

Sea V la cantidad de varones.

Luego,



Las cantidades exactas serán las siguientes:

- $V=3n$
- $M=7n$
- $T=10n$

Las situaciones presentadas no son las únicas; sin embargo, son un importante punto de partida, ya en cada ejercicio analizaremos las diferentes situaciones de la manera más conveniente.

2.3. RAZÓN ARMÓNICA

Es la razón aritmética de las inversas de dos cantidades.

Ejemplo

Beto pinta una pared en 5 horas; Dino puede pintar la misma pared en 7 horas. Entonces, se tiene la siguiente razón armónica:

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{7}$$

Esta razón armónica tiene dos términos: 5 es el antecedente y 7 es el consecuente.

Mediante la razón armónica se puede conocer en cuánto excede la inversa de una cantidad a la inversa de la otra.

Así tenemos que

$$\frac{1}{5}-\frac{1}{7}=\frac{2}{35}$$

Entonces $\frac{2}{35}$ es el valor de la razón armónica.

Podemos interpretar lo siguiente:

- $\frac{1}{5}$: En una hora, Beto puede pintar la quinta parte de la pared.
- $\frac{1}{7}$: En una hora, Dino puede pintar la séptima parte de la pared.
- $\frac{2}{35}$: En una hora, lo que puede pintar Beto excede a lo que puede pintar Dino en $\frac{2}{35}$ del área de la pared.

En general,

$$\boxed{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=h}$$

donde

- a: antecedente
- b: consecuente
- h: valor de la razón armónica

Aplicación 3

Un caño puede llenar un tanque en 5 h; un desagüe ubicado en el fondo lo puede vaciar en 11 h. Si se abren simultáneamente el caño y el desagüe, ¿qué fracción de la capacidad del tanque se habrá llenado al cabo de 5 horas?

Resolución

Sea V la capacidad del tanque.

En una hora

$$\underbrace{\frac{1}{5}}_{\text{lo que llena}} - \underbrace{\frac{1}{11}}_{\text{lo que vacía}} = \underbrace{\frac{6}{55}}_{\text{queda lleno}}$$

Se llena $\frac{6}{55}V$.

$\rightarrow$ En 5 horas se llena $5\left(\frac{6}{55}V\right)=\frac{6}{11}V$.

Por lo tanto, al cabo de 5 horas se habrá llenado los $\frac{6}{11}$ de la capacidad del tanque.

> **Nota**
>
> De las tres razones estudiadas, la que tiene mayor aplicación es la **razón geométrica**. Entonces, si en un problema solo se indica la palabra **razón**, se entenderá que se trata de la razón geométrica.

Aplicación 4

El valor de la razón geométrica de dos números es $\frac{13}{7}$ y el de su razón aritmética es 90. Halle la suma de dichos números.

Resolución

Sean a y b los números, tal que $a>b$

Piden $a+b$.

Del enunciado tenemos

- $\frac{a}{b}=\frac{13}{7}\begin{cases}a=13k\\b=7k\end{cases}$

- $a-b=90$
  $13k-7k=90$
  $6k=90$
  $k=15$

Observación

Empezar la resolución de un problema conociendo qué es lo que piden, evitará, en este caso, por ejemplo, que reemplaces el valor de k y halles el valor de cada número. Podemos hallar directamente lo que piden.

$\rightarrow a+b=13k+7k=20k$
$a+b=20(15)=300$

Por lo tanto, la suma de dichos números es 300.

Otra forma

$$\frac{a}{b}=\frac{13}{7}$$

a es como 13 y b es como 7.

Entonces

$$\underbrace{a-b}_{6(15)}=90\ ;\ \underbrace{a+b}_{20(15)}=?=300$$

Se debe multiplicar a ambos para que la relación no se altere.

Debemos encontrar el dato adecuado para saber por cuánto debemos multiplicar en la relación; en este caso fue 90, y por ello multiplicamos por 15. Si necesitáramos hallar el valor de a y b, también deberíamos multiplicar por 15.

Por lo tanto,

- $a=13(15)=195$
- $b=7(15)=105$

Aplicación 5

En un aula, por cada 5 mujeres hay 3 varones. Si la diferencia entre la cantidad de mujeres y varones es 18, ¿cuántos alumnos hay en total?

Resolución

Sean M y V las cantidades de mujeres y varones, respectivamente.

Se tiene

$$\frac{M}{V}=\frac{5}{3}\begin{cases}M=5k\\V=3k\end{cases}$$

Luego,

$M-V=18$
$5k-3k=18$
$2k=18\ \rightarrow\ k=9$

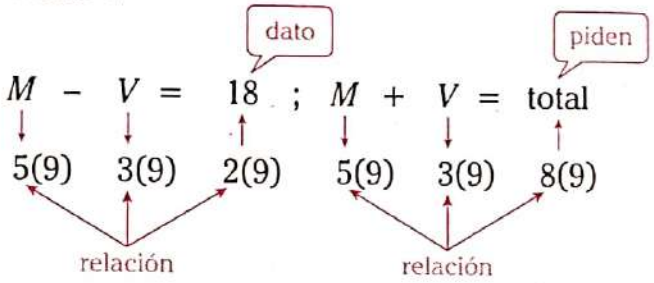
Nos piden

total$=M+V$
total$=5k+3k=8k=8(9)=72$

Por lo tanto, en total hay 72 alumnos.

Veamos las siguientes formas de resolver:

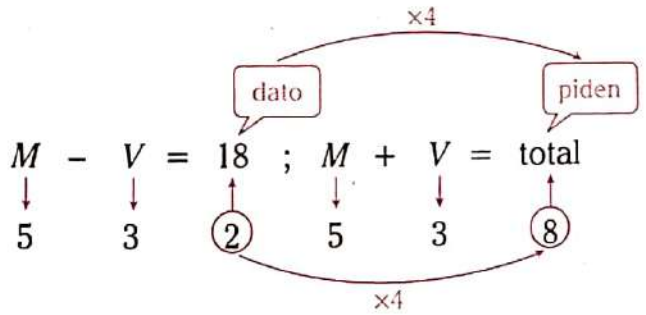
Forma 1



Por lo tanto, en total hay 72 alumnos.

Forma 2

En este caso es conveniente observar la relación que hay entre el dato y lo que piden.



Por lo tanto, en total hay 72 alumnos.

En algunas ocasiones cuando se tiene dos o más relaciones, es conveniente homogeneizar para utilizar una sola constante, ya sea con una letra o multiplicando, por un mismo factor, como ya hemos visto.

Ejemplo

A y B están en la relación de 5 a 4, mientras que B y C están en la relación de 6 a 7.

Entonces

- $\dfrac{A}{B}=\dfrac{5}{4}\begin{cases}A=5m\\B=4m\end{cases}$

- $\dfrac{B}{C}=\dfrac{6}{7}\begin{cases}B=6n\\C=7n\end{cases}$

$\rightarrow\ B=4m=6n$

$$\frac{m}{n}=\frac{\cancel{6}}{\cancel{4}}=\frac{3}{2}\begin{cases}m=3k\\n=2k\end{cases}$$

Reemplazamos.

$$A=5m=5(3k)=15k$$

$$\left.\begin{array}{l}B=4m=4(3k)=12k\\B=6n=5(2k)=12k\end{array}\right\}\text{Basta reemplazar en uno de los dos.}$$

$$C=7n=7(2k)=14k$$

Veamos las siguientes formas de resolver:

Forma 1

Para homogeneizar utilizaremos el mínimo común múltiplo (MCM).

$$\frac{A}{B}=\frac{5}{4}\ \text{ y }\ \frac{B}{C}=\frac{6}{7}$$

Entonces vamos a homogeneizar B.

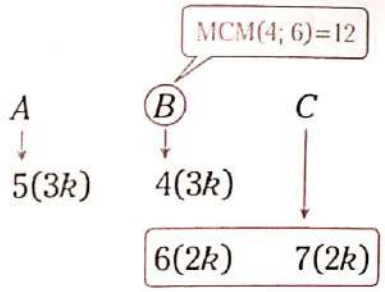
MCM(4; 6)=12

Luego,

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{A}{B}=\dfrac{5}{4}\times\underbrace{\boxed{\dfrac{3}{3}}}_{1}=\dfrac{15}{12}\\[2ex]\dfrac{B}{C}=\dfrac{6}{7}\times\underbrace{\boxed{\dfrac{2}{2}}}_{1}=\dfrac{12}{14}\end{array}\right\}\begin{array}{l}A=15k\\B=12k\\C=14k\end{array}$$

Forma 2

Generalmente usamos el siguiente esquema:



Por lo tanto,

$A=15k;\quad B=12k;\quad C=14k$

Practicamos lo anterior.

- $\overbrace{10a}^{\text{MCM(10; 15)=30}}=\overbrace{15b}$

  Relación: $\uparrow 3 \qquad \uparrow 2$

- $\overbrace{18m}^{\text{MCM(18; 24)=72}}=\overbrace{24n}$

  Relación: $\uparrow 4 \qquad \uparrow 3$

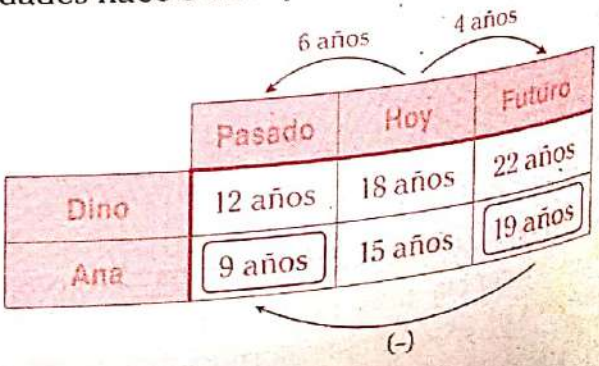
3 ▸ APLICACIONES DE LAS RAZONES

Las razones tienen diversas aplicaciones. A continuación detallaremos las aplicaciones de uso más frecuente.

3.1. EN PROBLEMAS DE EDADES

Veamos el siguiente ejemplo:

Dos amigos Dino y Ana tienen 18 y 15 años, respectivamente. Analicemos la relación de sus edades hace 6 años y dentro de 4 años.



	Pasado	Hoy	Futuro
Dino	12 años	18 años	22 años
Ana	9 años	15 años	19 años

Transcurren 10 años, tanto para Dino como para Ana.

Dino: $22-12=10$

Ana: $19-9=10$

También $6+4=10$

6 años 4 años

	Pasado	Hoy	Futuro
Dino	12 años	18 años	22 años
Ana	9 años	15 años	19 años

(-)

3 años = 3 años = 3 años

La diferencia de edades es constante en cualquier tiempo.

En conclusión, el tiempo que transcurre para toda persona es el mismo; por lo tanto, la diferencia de edades entre dos personas es siempre constante.

Aplicación 6

Las edades de Alejandra y Mateo están en la relación de 7 a 1; sin embargo, dentro de 12 años sus edades estarán en la relación de 5 a 2. ¿Cuántos años tiene Alejandra?

Resolución

Se tiene que

12 años

	Hoy	Futuro
Alejandra	$7(k)$	$5(2k)$
Mateo	$1(k)$	$2(2k)$

(diferencia constante) : $6(k) = 3(2k)$

MCM(6; 3)=6

Luego,

$$5(2k)-7k=12$$
$$3k=12$$
$$k=4$$
$$\rightarrow\ 7k=28$$

Por lo tanto, Alejandra tiene 28 años.

Otra forma

12 años

	Hoy	Futuro	
Alejandra	$7n$	$7n+12$	→ 5
Mateo	n	$n+12$	→ 2

Luego,

$$\frac{7n+12}{n+12}=\frac{5}{2}$$

Resolvemos.

$$2(7n+12)=5(n+12)$$
$$14n+2\times12=5n+5\times12$$
$$14n-5n=5\times12-2\times12$$
$$9n=3\times12$$
$$n=4$$
$$\rightarrow\ 7n=28$$

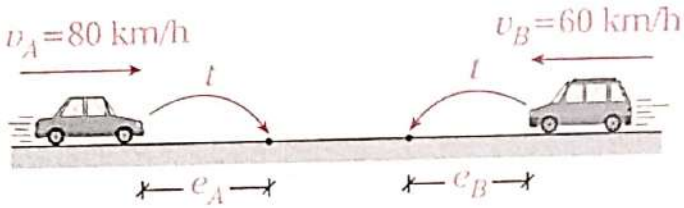
Por lo tanto, Alejandra tiene 28 años.

3.2. EN PROBLEMAS DE MÓVILES

Veamos el siguiente ejemplo:

Sean

- e_A; e_B: recorridos de los autos A y B.
- v_A; v_B: velocidades de los autos A y B.
- t: tiempo empleado por los autos A y B.



Observamos que

$$\frac{v_A}{v_B}=\frac{80\text{ km/h}}{60\text{ km/h}}=\frac{4}{3}$$

Por lo tanto, en un recorrido de t horas para ambos notamos que

$$\frac{e_A}{e_B}=\frac{(80\text{ km/h})(t)}{(60\text{ km/h})(t)}=\frac{4}{3}$$

En general,

$$\boxed{\frac{v_A}{v_B}=\frac{e_A}{e_B}}$$

Recuerde

En el movimiento rectilíneo uniforme (MRU) se considera lo siguiente:

- v constante
- $e=v\times t$

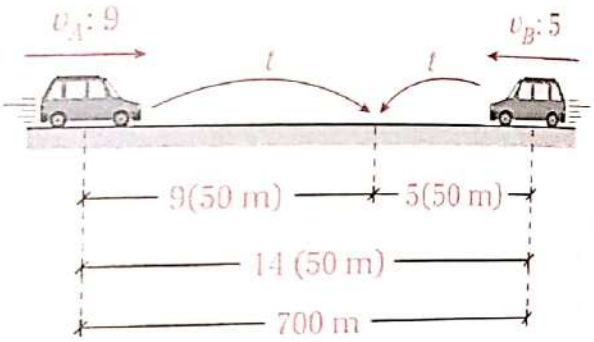
En conclusión, para un mismo tiempo, la relación de las velocidades de los móviles es la misma relación en la que se encuentran sus recorridos.

Aplicación 7

Dos móviles, A y B, se desplazan uno hacia el encuentro del otro con MRU; además, sus velocidades están en la relación de 9 a 5. Si inicialmente estaban separados 700 m y parten simultáneamente, ¿cuánto recorre el auto más lento hasta el momento en que se encontraron?

Resolución

Como parten simultáneamente, entonces, hasta el encuentro, ambos emplearon el mismo tiempo.



Por lo tanto, el auto más lento recorre 250 m hasta el momento en que se encontraron.

Nota

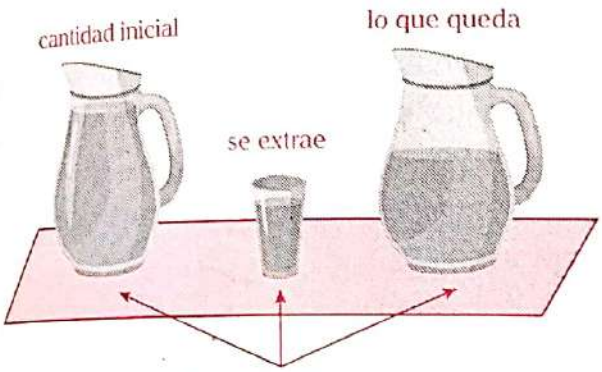
- En Física se distingue entre velocidad y rapidez, así como entre distancia y recorrido; sin embargo, en los problemas de aritmética se usan dichos términos indistintamente.
- Si en un problema no se indica lo contrario, se asumirá que los móviles parten simultáneamente, en línea recta y con rapidez constante.

3.3. EN PROBLEMAS DE MEZCLAS HOMOGÉNEAS

Las mezclas homogéneas son aquellas que aparecen totalmente uniformes (no presentan discontinuidad) y presentan iguales propiedades y composición en todo el sistema.

Una limonada es un ejemplo de mezcla homogénea, pues está compuesta por agua, limón y azúcar. Por ejemplo, si en una jarra preparamos limonada y la servimos en un vaso, aún quedará limonada en la jarra.

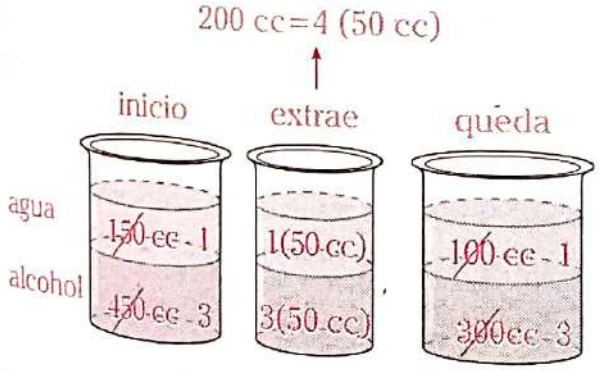
Tendríamos lo siguiente:



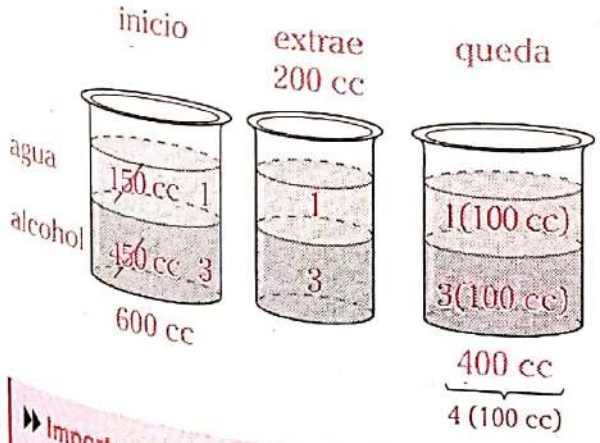
Sus componentes (agua, limón y azúcar) se encuentran mezclados en la misma proporción.

Ejemplo

Se tiene una mezcla de 150 cc de agua y 450 cc de alcohol puro. Se extraen 200 cc de la mezcla y se observa lo siguiente:



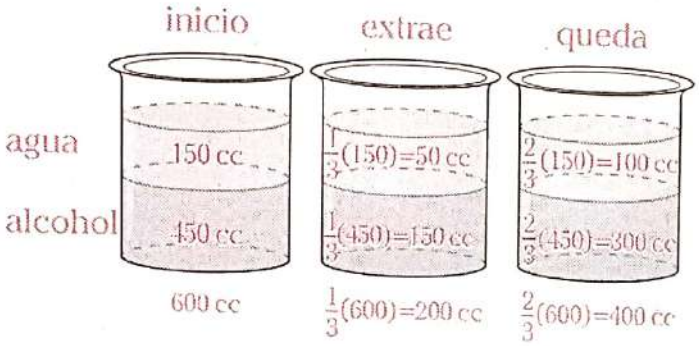
También se tiene que



Importante

En una mezcla homogénea, los ingredientes al inicio, los que se extraen y los que quedan se encuentran en la misma relación.

Además,



En conclusión, en una mezcla homogénea, si se extrae una fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ del contenido inicial, entonces debe salir la misma fracción de cada componente; por lo tanto, queda $\left(1-\frac{a}{b}\right)$ de cada componente.

Del ejemplo anterior se extrae $\frac{1}{3}$ del volumen inicial, entonces

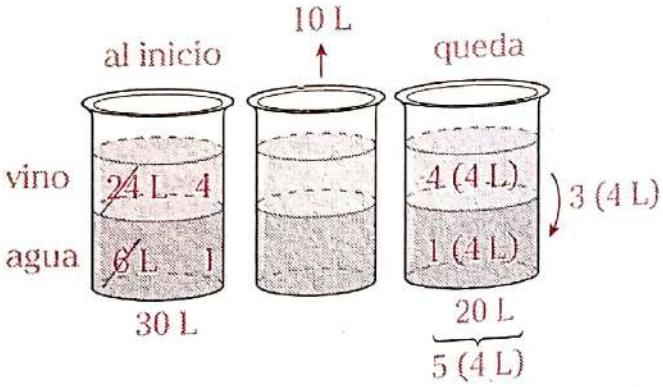
- sale $\frac{1}{3}$ de cada ingrediente.
- queda $1-\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$ de cada ingrediente.

Aplicación 8

De un tonel que contiene 24 litros de vino y 6 litros de agua se extraen 10 litros de la mezcla. ¿En cuánto excede el volumen de vino al volumen del agua que queda en el recipiente?

Resolución

Graficamos.



Por lo tanto, el volumen de vino que queda en el recipiente excede al del agua en 12 litros.

Nota

Dos o más razones de una misma clase se denominan equivalentes si tienen el mismo valor.

Ejemplos

- $\boxed{7-5}=2$; $\boxed{13-11}=2$; $\boxed{43-41}=2$

Son razones aritméticas equivalentes.

- $\boxed{\frac{6}{2}}=3$; $\boxed{\frac{15}{5}}=3$; $\boxed{\frac{24}{8}}=3$

Son razones geométricas equivalentes.

- $\boxed{\frac{1}{4}-\frac{1}{6}}=\frac{1}{12}$; $\boxed{\frac{1}{3}-\frac{1}{4}}=\frac{1}{12}$; $\boxed{\frac{1}{6}-\frac{1}{12}}=\frac{1}{12}$

Son razones armónicas equivalentes.

Tengamos en cuenta que

$\boxed{11-7}=4$ $\boxed{\frac{24}{6}}=4$

No son razones equivalentes.

No es suficiente que tengan el mismo valor, las razones deben ser de la misma clase, es decir, todas aritméticas, todas geométricas o todas armónicas.

Debido a que tiene mayor aplicación, estudiaremos las razones geométricas equivalentes.

4 Serie de razones geométricas equivalentes (SRGE)

Se denomina así a la expresión que se obtiene al igualar dos o más razones geométricas equivalentes. Es por eso que también se le denomina igualdad de razones geométricas equivalentes.

Ejemplo

$\boxed{\frac{12}{4}}=3$; $\boxed{\frac{60}{20}}=3$; $\boxed{\frac{120}{40}}=3$

Son razones geométricas equivalentes.

Entonces, al igualarlas formamos una SRGE.

$$\frac{12}{4}=\frac{60}{20}=\frac{120}{40}$$

Tenemos una serie de 3 razones geométricas equivalentes o una SRGE de 6 términos, ya que cada razón posee dos términos (antecedente y consecuente).

Es importante reconocer lo siguiente:

- Razones: $\frac{12}{4}$; $\frac{60}{20}$ y $\frac{120}{40}$
- Antecedentes: 12; 60 y 120
- Consecuentes: 4; 20 y 40
- Como todas las razones tienen el mismo valor, dicho valor es llamado constante de proporcionalidad o valor de la SRGE. En este caso es 3.
- $\frac{1.^{er}\text{ antecedente}}{1.^{er}\text{ consecuente}}=\frac{2.^{o}\text{ antecedente}}{2.^{o}\text{ consecuente}}=\frac{3.^{er}\text{ antecedente}}{3.^{er}\text{ consecuente}}$

- $\dfrac{1.^{er}\text{ término}}{2.^{o}\text{ término}} = \dfrac{3.^{er}\text{ término}}{4.^{o}\text{ término}} = \dfrac{5.^{o}\text{ término}}{6.^{o}\text{ término}}$

  Por ejemplo, en $\dfrac{12}{4} = \dfrac{60}{20} = \dfrac{120}{40}$ se tiene que

  - 120 es el tercer antecedente o es el quinto término de la SRGE.
  - 20 es el segundo consecuente o es el cuarto término de la SRGE.

- Al primer y al último término de una SRGE se les denomina términos extremos; en este caso son el 1.er y 6.º término, es decir, 12 y 40.

- En $\dfrac{12}{4} = \dfrac{60}{20} = \dfrac{120}{40} = 3$

  observe que cada antecedente se puede obtener multiplicando su respectivo consecuente por la constante de proporcionalidad.

  - 12=4(3)
  - 60=20(3)
  - 120=40(3)

- Cuando sea conveniente podemos

  - Analizar la relación que hay entre los términos de cada razón.

    $\dfrac{12}{4} = \dfrac{60}{20} = \dfrac{120}{40} = \dfrac{3}{1}$ $\times 3$ $\div 3$

    Observe que en cada razón, el antecedente es el triple del consecuente o el consecuente es la tercera parte del antecedente.

  - Analizar la relación entre los antecedentes y la de sus respectivos consecuentes.

$$\frac{12}{4} = \frac{60}{20} = \frac{120}{40}$$

$\times 10$, $\times 5$, $\div 2$, $\times 5$, $\div 2$, $\times 10$

La relación que hay entre los antecedentes es la misma que hay entre sus respectivos consecuentes.

Aplicación 9

En una SRGE de ocho términos, la suma de dos de las razones es $\dfrac{3}{2}$ y el segundo término es 20. Halle el primer antecedente.

Resolución

Si la SRGE tiene ocho términos, entonces tiene cuatro razones.

1.er antecedente

$$\frac{a}{20} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k$$

2.º término

Todas las razones tienen el mismo valor, entonces, del dato tenemos que

$$k + k = 2k = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad k = \frac{3}{4}$$

En la SRGE,

$$\frac{a}{20} = \frac{c}{d} = \frac{e}{f} = \frac{g}{h} = k = \frac{3}{4}$$

$\times 5$, $\times 5$

$\rightarrow \; a = 3(5) = 15$

Por lo tanto, el primer antecedente es 15.

Aplicación 10

Los consecuentes de una igualdad de tres razones geométricas equivalentes son 15, 25 y 35. Si la suma de los dos mayores antecedentes es 180, ¿en cuánto excede el mayor al menor antecedente?

Resolución

Tenemos la siguiente igualdad de razones geométricas equivalentes:

$$\frac{a}{15}=\frac{b}{25}=\frac{c}{35}=k$$

$\rightarrow$ $a=15k$; $b=25k$; $c=35k$

Del dato

$$b+c=180$$
$$25k+35k=60k=180$$
$$k=3$$

Piden $c-a$.

$\rightarrow$ $35k-15k=20k$

Reemplazamos.

$$20(3)=60$$

Por lo tanto, el mayor antecedente excede al menor en 60.

Otra forma

Cuando sea conveniente podemos simplificar.

$$\frac{a}{\cancel{15}}=\frac{b}{\cancel{25}}=\frac{c}{\cancel{35}}$$

Tenemos que

$$\frac{a}{3}=\frac{b}{5}=\frac{c}{7}=n$$

$\rightarrow$ $a=3n$; $b=5n$; $c=7n$

Del dato

$$b+c=180$$
$$5n+7n=12n=180$$
$$n=15$$

Piden $c-a$.

$\rightarrow$ $7n-3n=4n$

Reemplazamos.

$$4(15)=60$$

Por lo tanto, el mayor antecedente excede al menor en 60.

Nota

- Cuando simplificamos, el valor de la constante cambia, pero finalmente llegamos al mismo resultado.
- En una SRGE,

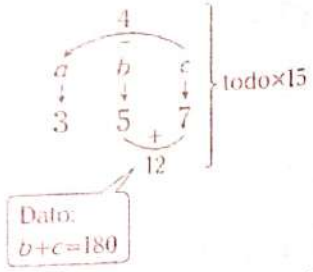
$$\frac{a}{\underset{3}{15}}=\frac{b}{\underset{5}{25}}=\frac{c}{\underset{7}{35}}$$

También podemos decir a, b y c están en la misma relación que los números 3, 5 y 7, respectivamente, o que a, b y c son proporcionales a 3, 5 y 7.

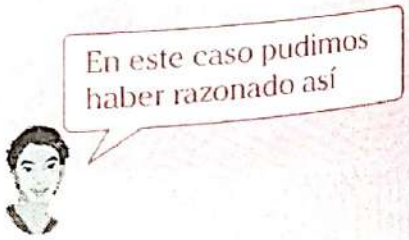
Entonces

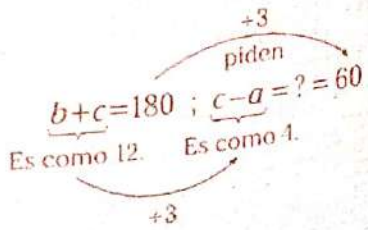
$$a=3n;\ b=5n;\ c=7n$$

Otra forma



$\therefore$ $c-a=4(15)=60$





Se debe elegir la manera de resolver más conveniente para el problema.

5 PROPIEDADES DE LA SRGE

En general, tenemos una serie de n razones geométricas equivalentes.

$$\boxed{\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\ldots=\frac{a_n}{b_n}=k}$$

donde

- $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n$ son los antecedentes.
- $b_1, b_2, b_3, \ldots, b_n$ son los consecuentes.
- k es la constante de proporcionalidad o valor de la SRGE.

Propiedad 1

$$\boxed{\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=k}$$

Demostración

Sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} a_1=b_1k \\ a_2=b_2k \\ a_3=b_3k \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n=b_nk \end{array}\right\} \text{Sumamos miembro a miembro.}$$

$\rightarrow$ $a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=b_1k+b_2k+b_3k+\ldots+b_nk$

$a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n=k(b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n)$

Por lo tanto,

$$\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_n}{b_1+b_2+b_3+\ldots+b_n}=k$$

Ejemplo

$$\frac{12}{4}=\frac{60}{20}=\frac{120}{40}=3$$

$$3=\begin{cases} \dfrac{12+60}{4+20} \\ \dfrac{60+120}{20+40} \\ \dfrac{12+120}{4+40} \\ \dfrac{12+60+120}{4+20+40} \end{cases}$$

Nota

El valor de la constante de proporcionalidad también la podemos hallar restando antecedentes y sus respectivos consecuentes o sumando y restando antecedentes (lo mismo con sus respectivos consecuentes).

Del ejemplo anterior

$$3=\begin{cases} \dfrac{60-12}{20-4} \\ \dfrac{120-60}{40-20} \\ \dfrac{120+60-12}{40+20-4} \end{cases}$$

Observación

Sea

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=\frac{a_4}{b_4}=k$$

Entonces

$$\frac{(a_1)m}{(b_1)m}=\frac{(a_2)n}{(b_2)n}=\frac{(a_3)p}{(b_3)p}=\frac{(a_4)q}{(b_4)q}=k$$

donde m, n, p y q son diferentes de cero. Luego, podemos aplicar las propiedades mencionadas.

Ejemplo

Se tiene que $\frac{12}{4}=\frac{60}{20}=\frac{120}{40}=3$

Entonces

$$\frac{12(3)}{4(3)}=\frac{60(5)}{20(5)}=\frac{120(2)}{40(2)}=3$$

De lo anterior

$$3=\begin{cases} \dfrac{12(3)+60(5)}{4(3)+20(5)} \\ \dfrac{120(2)-12(3)}{40(2)-4(3)} \\ \dfrac{60(5)-120(2)+12(3)}{20(5)-40(2)+4(3)} \end{cases}$$

Propiedad 2

$$\boxed{\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n}{b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n} = k^n}$$

donde n indica el número de razones que se multiplican.

Demostración

Sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} a_1 = b_1 k \\ a_2 = b_2 k \\ a_3 = b_3 k \\ \vdots \quad \vdots \\ a_n = b_n k \end{array}\right\} \text{Multiplicamos miembro a miembro.}$$

Entonces

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n = (b_1 k)(b_2 k)(b_3 k) \times \ldots \times (b_n k)$$

$$a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n = k^n (b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n)$$

Por lo tanto,

$$\frac{a_1 \times a_2 \times a_3 \times \ldots \times a_n}{b_1 \times b_2 \times b_3 \times \ldots \times b_n} = k^n$$

Ejemplo

Tenemos que $\frac{12}{4} = \frac{60}{20} = \frac{120}{40} = 3$

Multiplicamos 2 razones.

$$\frac{\boxed{12} \times \boxed{60}}{\boxed{4} \times \boxed{20}} = 3^2$$

$$\downarrow \qquad \downarrow$$
$$3 \qquad 3$$

Multiplicamos 3 razones.

$$\frac{\boxed{12} \times \boxed{60} \times \boxed{120}}{\boxed{4} \times \boxed{20} \times \boxed{40}} = 3^3$$

$$\downarrow \qquad \downarrow \qquad \downarrow$$
$$3 \qquad 3 \qquad 3$$

Propiedad 3

$$\boxed{\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{b_1^m + b_2^m + b_3^m + \ldots + b_n^m} = k^m}$$

Demostración

Elevamos cada razón a la m.

$$\left(\frac{a_1}{b_1}\right)^m = \left(\frac{a_2}{b_2}\right)^m = \left(\frac{a_3}{b_3}\right)^m = \ldots = \left(\frac{a_n}{b_n}\right)^m = k^m$$

Entonces

$$\frac{a_1^m}{b_1^m} = \frac{a_2^m}{b_2^m} = \frac{a_3^m}{b_3^m} = \ldots = \frac{a_n^m}{b_n^m} = k^m$$

Aplicamos la propiedad 1 y se obtiene

$$\frac{a_1^m + a_2^m + a_3^m + \ldots + a_n^m}{b_1^m + b_2^m + b_3^m + \ldots + b_n^m} = k^m$$

Ejemplo

Sea $\frac{10}{5} = \frac{6}{3} = \frac{4}{2} = 2$

$$\rightarrow \frac{10^2}{5^2} = \frac{6^2}{3^2} = \frac{4^2}{2^2} = 2^2$$

Finalmente,

$$\frac{10^2 + 6^2 + 4^2}{5^2 + 3^2 + 2^2} = 2^2$$

Observación

También se pueden utilizar las variaciones que se hizo a la propiedad 1, pero debemos tener presente que la constante de proporcionalidad quedará elevada al mismo exponente al que se elevan todos los términos.

Propiedad 4

De la SRGE

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k=\frac{k}{1}$$

podemos deducir diferentes relaciones, algunas de ellas son las siguientes:

I. $\boxed{\frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}=\frac{e+f}{f}=\frac{k+1}{1}}$

II. $\boxed{\frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}=\frac{e-f}{f}=\frac{k-1}{1}}$

III. $\boxed{\frac{a}{a+b}=\frac{c}{c+d}=\frac{e}{e+f}=\frac{k}{k+1}}$

IV. $\boxed{\frac{a}{a-b}=\frac{c}{c-d}=\frac{e}{e-f}=\frac{k}{k-1}}$

V. $\boxed{\frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}=\frac{e+f}{e-f}=\frac{k+1}{k-1}}$

Demostremos algunas de ellas.

Sea $\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$

I. Sumamos 1 a cada razón y también a k.

$$\frac{a}{b}+1=\frac{c}{d}+1=\frac{e}{f}+1=k+1$$

Operamos.

$$\therefore\ \frac{a+b}{b}=\frac{c+d}{d}=\frac{e+f}{f}=\frac{k+1}{1}$$

II. Restamos 1 a cada razón y también a k.

$$\frac{a}{b}-1=\frac{c}{d}-1=\frac{e}{f}-1=k-1$$

Operamos.

$$\therefore\ \frac{a-b}{b}=\frac{c-d}{d}=\frac{e-f}{f}=\frac{k-1}{1}$$

V. De (I) y (II) dividimos cada razón respectivamente.

$$\frac{\frac{a+b}{\cancel{b}}}{\frac{a-b}{\cancel{b}}}=\frac{\frac{c+d}{\cancel{d}}}{\frac{c-d}{\cancel{d}}}=\frac{\frac{e+f}{\cancel{f}}}{\frac{e-f}{\cancel{f}}}=\frac{\frac{k+1}{\cancel{1}}}{\frac{k-1}{\cancel{1}}}$$

Operamos.

$$\therefore\ \frac{a+b}{a-b}=\frac{c+d}{c-d}=\frac{e+f}{e-f}=\frac{k+1}{k-1}$$

Nota

Note que al sumar o restar los términos de cada razón, las nuevas razones resultantes son equivalentes entre ellas, pero el valor de la constante de proporcionalidad inicial cambia.

Estas propiedades se cumplen para una serie de dos o más razones geométricas equivalentes.

Ejemplos

Sea la siguiente SRGE.

$$\frac{10}{2}=\frac{15}{3}=\frac{20}{4}=5=\boxed{\frac{5}{1}}$$

Aplicamos la propiedad 4.

- $\frac{10+2}{2}=\frac{15+3}{3}=\frac{20+4}{4}=\frac{5+1}{1}$
- $\frac{10-2}{2}=\frac{15-3}{3}=\frac{20-4}{4}=\frac{5-1}{1}$
- $\frac{10}{10+2}=\frac{15}{15+3}=\frac{20}{20+4}=\frac{5}{5+1}$
- $\frac{10}{10-2}=\frac{15}{15-3}=\frac{20}{20-4}=\frac{5}{5-1}$
- $\frac{10+2}{10-2}=\frac{15+3}{15-3}=\frac{20+4}{20-4}=\frac{5+1}{5-1}$

Tengamos presente que no son las únicas relaciones que se pueden obtener, por ejemplo

$$\frac{10(2)-2(7)}{2}=\frac{15(2)-3(7)}{3}=\frac{20(2)-4(7)}{4}$$

Aplicación 11

La suma de las razones de una SRGE de 6 términos es 5. Si el producto de los consecuentes es 648, halle el producto de los antecedentes.

Resolución

Como la SRGE tiene 6 términos, entonces está compuesta por 3 razones.

$$\frac{a}{b}=\frac{c}{d}=\frac{e}{f}=k$$

Por dato

$$k+k+k=5$$

$$3k=5 \rightarrow k=\frac{5}{3}$$

Por propiedad

$$\frac{a\times c\times e}{b\times d\times f}=k^3=\left(\frac{5}{3}\right)^3$$

Por dato, el producto de consecuentes es 648, entonces

$$\frac{a\times c\times e}{648}=\frac{5^3}{3^3}$$

$\times 24$ $\times 24$

$$\rightarrow a\times c\times e=5^3(24)=5^3\times 2^3\times 3$$

$$a\times c\times e=3000$$

Por lo tanto, el producto de los antecedentes es 3000.

Aplicación 12

En la siguiente igualdad de razones geométricas equivalentes se sabe que

- $\frac{a}{11}=\frac{b}{7}=\frac{c}{15}$
- $a+c-b=95$

Halle $c-a$.

Resolución

Aplicamos propiedades.

$$\frac{a}{11}=\frac{b}{7}=\frac{c}{15}=\underbrace{\frac{c-a}{15-11}=\frac{a+c-b}{11+15-7}}$$

$$\times 5\left(\frac{c-a}{4}=\frac{95}{19}\right)\times 5$$

$$\therefore\ c-a=4(5)=20$$

6▸ SERIE DE RAZONES GEOMÉTRICAS EQUIVALENTES CONTINUAS

Una SRGE se denomina continua cuando a partir de la segunda razón, todo antecedente es igual al consecuente de la razón anterior.

Ejemplos

- $\frac{80}{40}=\frac{40}{20}=\frac{20}{10}=\frac{10}{5}=2>1$
- $\frac{27}{36}=\frac{36}{48}=\frac{48}{64}=\frac{3}{4}<1$
- $\frac{162}{108}=\frac{108}{72}=\frac{72}{48}=\frac{48}{32}=\frac{3}{2}>1$

▸▸ Nota

- Si la constante de proporcionalidad es mayor que 1, entonces el mayor término es el primero y el menor término es el último.
- Si la constante de proporcionalidad es menor que 1, entonces el mayor término es el último y el menor término es el primero.

Analicemos lo que convenientemente se puede realizar con una SRGE continua.

Sea

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}=\frac{d}{e}=k$$

1. Todos los términos, excepto el último, se pueden expresar en función del último término y la constante de proporcionalidad.

Veamos.

- $d=ek$
- $c=dk=(ek)k=ek^2$
- $b=ck=(ek^2)k=ek^3$
- $a=bk=(ek^3)k=ek^4$

Reemplazamos.

$$\boxed{\frac{ek^4}{ek^3}=\frac{ek^3}{ek^2}=\frac{ek^2}{ek}=\frac{ek}{e}=k}$$

2. Al multiplicar dos o más razones, encontraremos que la relación entre el primer y último término considerado es igual a la constante de proporcionalidad elevada al número de razones multiplicadas.

Veamos.

- $\dfrac{a\times b}{b\times c}=k^2 \rightarrow \dfrac{a}{c}=k^2$
- $\dfrac{a\times b\times c}{b\times c\times d}=k^3 \rightarrow \dfrac{a}{d}=k^3$
- $\dfrac{a\times b\times c\times d}{b\times c\times d\times e}=k^4 \rightarrow \dfrac{a}{e}=k^4$

3. Reconstruir la SRGE continua a partir de la constante de proporcionalidad.

Ejemplos

- Dos razones y constante de proporcionalidad igual a $\dfrac{3}{5}$.

$$\frac{3^2}{15}=\frac{15}{25}=\frac{3}{5}$$

×3 ×5 ×5 ×3

Elevamos 3 al cuadrado porque hay 2 razones.

Por lo tanto, la SRGE continua será

$$\frac{9m}{15m}=\frac{15m}{25m}$$

- Tres razones y constante de proporcionalidad igual a $\dfrac{2}{3}$.

$$\frac{2^3}{12}=\frac{12}{18}=\frac{18}{27}=\frac{2}{3}$$

×4 ×6 ×9 ×9 ×6 ×4

Elevamos 2 al cubo porque hay 3 razones.

Por lo tanto, la SRGE continua será

$$\frac{8n}{12n}=\frac{12n}{18n}=\frac{18n}{27n}$$

Aplicación 13

En una igualdad de 3 razones geométricas equivalentes continuas de constante de proporcionalidad par, la suma de sus dos últimos términos es 10. Halle el mayor de sus términos.

Resolución

Construimos la SRGE continua a partir del último término y de la constante.

$$\frac{ak^3}{ak^2}=\frac{ak^2}{ak}=\frac{ak}{a}=k$$

Por dato

- k es par
- $ak+a=10$

$$\underset{\uparrow}{a}\,\underbrace{(k+1)}=10$$

10	1	No cumple
5	2	No cumple
2	5	$\rightarrow k=4$ Sí cumple
1	10	No cumple

$\rightarrow a=2 \wedge k=4$

Piden $ak^3=2(4^3)=128$

Por lo tanto, el mayor de sus términos es 128.

Nota

Analicemos la siguiente SRGE:

$$\frac{200}{120}=\frac{150}{90}=\frac{100}{60}$$

Antecedentes:	4 · 200	3 · 150	2 · 100
Consecuentes:	4 · 120	3 · 90	2 · 60
(suma de términos de cada razón)	4 · 320	3 · 240	2 · 160
(diferencia de términos de cada razón)	4 · 80	3 · 60	2 · 40

Se cumple que los antecedentes, consecuentes, suma de términos de cada razón y la diferencia de los términos de cada razón se encuentran en la misma relación.

Lo anterior lo podemos generalizar usando las propiedades de la SRGE.

PROPORCIONES

1 DEFINICIÓN

Es una serie de 2 razones equivalentes, es decir, tiene cuatro términos.

2 CLASES DE PROPORCIONES

2.1. PROPORCIÓN ARITMÉTICA

Se da cuando las razones equivalentes son aritméticas.

Ejemplo

$$\boxed{13-11}=2\ ;\ \boxed{9-7}=2$$

Son razones aritméticas equivalentes.

Entonces, al igualarlas tenemos una proporción aritmética.

$$13-11=9-7$$

donde

- 13: primer término
- 11: segundo término
- 9: tercer término
- 7: cuarto término

- 13 y 7: términos extremos
- 11 y 9: términos medios

- 13 y 9: antecedentes
- 11 y 7: consecuentes

Propiedad

En toda proporción aritmética se cumple que la suma de los términos extremos es igual a la suma de los términos medios.

En el ejemplo anterior notamos que

$$13+7=9+11$$

2.1.1. Tipos de proporción aritmética

Según sean los términos medios, una proporción aritmética puede ser discreta o continua.

a. Proporción aritmética discreta

Se da cuando sus términos medios son diferentes.

$$\boxed{a-b=c-d}\ ;\ b\neq c$$

donde d es la cuarta diferencial de a, b y c (en ese orden).

Ejemplo

Hallemos la cuarta diferencial de 17; 11 y 26.

Colocamos los términos en el orden indicado.

$$\underbrace{17-11}_{6}=26-\underset{20}{\boxed{}}$$

Por lo tanto, la cuarta diferencial de 17; 11 y 26 es 20.

b. Proporción aritmética continua

Se da cuando sus términos medios son iguales.

$$\boxed{a-b=b-c}$$

donde

- c es la tercera diferencial de a y b (en ese orden).
- b es la media diferencial o media aritmética de a y c (en ese orden).

Operamos.

$a+c=b+b=2b$

$$\rightarrow \boxed{b=\frac{a+c}{2}}$$

Ejemplos

- Hallemos la tercera diferencial de 35 y 30. Colocamos los términos en el orden indicado.

$$\underbrace{35-30}_{5}=30-\underset{25}{\boxed{}}$$

Por lo tanto, la tercera diferencial de 35 y 30 es 25.

- Hallemos la media diferencial de 55 y 25. Sea x la media diferencial de 55 y 25. Colocamos los términos en el orden indicado.

$$55-\boxed{x}=\boxed{x}-25$$

$$\rightarrow x=\frac{55+25}{2}=40$$

Por lo tanto, la media diferencial de 55 y 25 es 40.

Aplicación 14

En una proporción aritmética, los consecuentes están en la relación de 7 a 4. Si el primer término es 50, halle la tercera diferencial de dicha proporción.

Resolución

Como piden la tercera diferencial, entonces la proporción aritmética es continua.

En el enunciado, los consecuentes están en la relación de 7 a 4.

Entonces, tenemos

$$\overset{3.^{\circ}}{\boxed{10n}}-\boxed{7n}=\boxed{7n}-\boxed{4n}$$

1.° 2.°

$10n=50$

$n=5$

$\rightarrow 4n=20$

Por lo tanto, la tercera diferencial de dicha proporción es 20.

2.2. PROPORCIÓN GEOMÉTRICA

Se da cuando las razones equivalentes son geométricas.

Ejemplo

$$\boxed{\frac{20}{5}}=4\ ;\ \boxed{\frac{12}{3}}=4$$

Son razones geométricas equivalentes.

Entonces, al igualarlos tenemos una proporción geométrica.

$$\frac{20}{5}=\frac{12}{3}$$

donde

- 20: primer término
- 5: segundo término
- 12: tercer término
- 3: cuarto término
- 20 y 3: términos extremos
- 5 y 12: términos medios
- 20 y 12: antecedentes
- 5 y 3: consecuentes

Propiedad

En toda proporción geométrica se cumple que el producto de los términos extremos es igual al producto de los términos medios.

En el ejemplo anterior tenemos que

$$(20)(3)=(5)(12)$$

2.2.1. Tipos de proporción geométrica

Según sean los términos medios, una proporción geométrica puede ser discreta o continua.

a. Proporción geométrica discreta

Se da cuando sus términos medios son diferentes.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{c}{d}}\ ;\ b\neq c$$

donde d es la cuarta proporcional de a, b y c (en ese orden).

Ejemplo

Hallemos la cuarta proporcional de 45, 18 y 15. Entonces, colocamos los términos en el orden indicado.

$$\frac{45}{18}\overset{\div 3}{=}\frac{15}{\boxed{}}\leftarrow 6$$

Por lo tanto, la cuarta proporcional de 45, 18 y 15 es 6.

b. Proporción geométrica continua

Se da cuando sus términos medios son iguales.

$$\boxed{\frac{a}{b}=\frac{b}{c}}$$

donde

- c es la tercera proporcional de a y b (en ese orden).
- b es la media proporcional o media geométrica de a y c (en ese orden).

Operamos.

$$(a)(c)=(b)(b)$$

$$b^2=a\times c$$

$$\rightarrow\ \boxed{b=\sqrt{a\times c}}$$

Ejemplos

- Hallemos la tercera proporcional de 8 y 40. Colocamos los términos en el orden indicado.

$$\frac{8}{40}\overset{\times 5}{=}\frac{40}{\boxed{}}\leftarrow 200$$

Por lo tanto, la tercera proporcional de 8 y 40 es 200.

- Hallemos la media proporcional de 16 y 100. Sea x la media proporcional de 16 y 100. Colocamos los términos en el orden indicado.

$$\frac{16}{\boxed{x}}=\frac{\boxed{x}}{100}$$

$$\rightarrow\ x^2=(16)(100)$$

$$x=\sqrt{(16)(100)}=(4)(10)=40$$

Por lo tanto, la media proporcional de 16 y 100 es 40.

Nota

Como una proporción geométrica es una serie de 2 razones geométricas equivalentes, entonces se cumplen todas las propiedades estudiadas de la SRGE.

Aplicación 15

En una proporción geométrica, el primer término es al segundo como 1 es a 3. Halle la tercera proporcional si se sabe que los antecedentes suman 100.

Resolución

Como piden la tercera proporcional, entonces la proporción geométrica es continua.

Sabemos que el primer término es al segundo como 1 es a 3.

Tenemos lo siguiente:

$$\frac{\boxed{n}}{\boxed{3n}} = \frac{\boxed{3n}}{\boxed{9n}}$$

1.° 2.° 3.°

$\rightarrow n+3n=100$

$4n=100$

$n=25$

Luego, $9n=225$

Por lo tanto, la tercera proporcional es 225.

2.3. PROPORCIÓN ARMÓNICA

Se da cuando las razones equivalentes son armónicas.

Ejemplo

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{60} \qquad \frac{1}{15}-\frac{1}{20}=\frac{1}{60}$$

Son razones armónicas equivalentes.

Al igualarlas, tenemos la siguiente proporción armónica:

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{15}-\frac{1}{20}$$

donde

- 10: primer término
- 12: segundo término
- 15: tercer término
- 20: cuarto término

- 10 y 20: términos extremos
- 12 y 15: términos medios

- 10 y 15: antecedentes
- 12 y 20: consecuentes

Propiedad

En toda proporción armónica se cumple que la suma de los términos extremos y la suma de los términos medios está en la misma relación que el producto de términos extremos y el producto de términos medios.

En el ejemplo anterior notamos que

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{12}=\frac{1}{15}-\frac{1}{20}$$

$$\frac{1}{10}+\frac{1}{20}=\frac{1}{15}+\frac{1}{12}$$

$$\frac{10+20}{10\times 20}=\frac{12+15}{12\times 15}$$

$$\therefore \quad \frac{10+20}{12+15}=\frac{(10)(20)}{(12)(15)}$$

2.3.1. Tipos de proporción armónica

Según sean los términos medios, una proporción armónica puede ser discreta o continua.

a. Proporción armónica discreta

Se da cuando sus términos medios son diferentes.

$$\boxed{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{c}-\frac{1}{d}}\ ;\ b\neq c$$

donde d es la cuarta armónica de a, b y c (en ese orden).

Ejemplo

Hallemos la cuarta armónica de 10; 20 y 4.

Sea x la cuarta armónica de 10, 20 y 4.

Colocamos los términos en el orden indicado.

$$\frac{1}{10}-\frac{1}{20}=\frac{1}{4}-\frac{1}{x}$$

Por propiedad

$$\frac{10+x}{20+4}=\frac{\cancel{(10)}(x)}{\cancel{(20)(4)}}$$

$$\frac{10+x}{24}=\frac{x}{8}$$

×3

×3

$\rightarrow$ $10=2x$

$x=5$

Por lo tanto, la cuarta armónica de 10; 20 y 4 es 5.

b. Continua

Se da cuando sus términos medios son iguales.

$$\boxed{\frac{1}{a}-\frac{1}{b}=\frac{1}{b}-\frac{1}{c}}$$

donde

- c es la tercera armónica de a y b (en ese orden.)
- b es la media armónica de a y c (en ese orden).

Operamos.

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{1}{b}+\frac{1}{b}$$

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{c}=\frac{2}{b} \rightarrow \boxed{b=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}}$$

También,

$$b=\frac{2}{\frac{c+a}{a\times c}} \rightarrow \boxed{b=\frac{2\times a\times c}{a+c}}$$

Ejemplos

- Hallemos la tercera armónica de 20 y 30.

  Sea x la tercera armónica de 20 y 30.

  Colocamos los términos en el orden indicado.

$$\frac{1}{20}-\frac{1}{30}=\frac{1}{30}-\frac{1}{\boxed{x}}$$

Operamos.

$$\left.\frac{1}{x}=\frac{1}{30}+\frac{1}{30}-\frac{1}{20}\right\}\times \text{MCM}(30;20)=60$$

$$\frac{60}{x}=2+2-3=1$$

$\rightarrow$ $x=60$

Por lo tanto, la tercera armónica de 20 y 30 es 60.

- Hallemos la media armónica de 40 y 60.

  Sea x la media armónica de 40 y 60.

  Colocamos los términos en el orden indicado.

$$\frac{1}{40}-\frac{1}{\boxed{x}}=\frac{1}{\boxed{x}}-\frac{1}{60}$$

Como sabemos

$$x=\frac{2(4\cancel{0})(6\cancel{0})}{\cancel{40+60}}$$

$\rightarrow$ $x=2(4)(6)=48$

Por lo tanto, la media armónica de 40 y 60 es 48.

Aplicación 16

En una proporción armónica, los términos extremos están en la relación de 3 a 7. Halle el primer término si se sabe que la media armónica es 84.

Resolución

Como existe media armónica, entonces la proporción armónica es continua.

Del enunciado tenemos lo siguiente:

$$\frac{1}{\boxed{3n}}-\frac{1}{84}=\frac{1}{84}-\frac{1}{\boxed{7n}}$$

Sabemos que

$$84=\frac{2(3n)(7n)}{3n+7n}=\frac{\cancel{2}\times 21\times n\times \cancel{n}}{\cancel{10}\,\cancel{n}}$$

$$84=\frac{21n}{5}\ \rightarrow\ n=20$$

Piden $3n=3(20)=60$.

Por lo tanto, el primer término es 60.

Importante

- Cuando solo se indique "proporción", se entenderá que se trata de una proporción geométrica.
- Si en el problema no se indica un orden determinado, los términos en cualquier clase de proporción se tomarán en el orden dado.

Ejemplos

- $31-23=19-11$
  donde 11 es la cuarta diferencial de 31; 23 y 19.
- $19-11=31-23$
  donde 23 es la cuarta diferencial de 19; 11 y 31.

Note que son dos proporciones diferentes, ya que se distingue **el orden de sus términos**.

- Si en el enunciado aparece la palabra *diferencial*, se entenderá que la proporción es aritmética.
- Si en el enunciado aparece la palabra *proporcional*, se entenderá que la proporción es geométrica.
- Si en el enunciado aparece la palabra *cuarta*, se entenderá que la proporción es discreta.
- Si en el enunciado aparece la palabra *tercera* o *media*, se entenderá que la proporción es continua.
- La tercera y la cuarta son el último término de una proporción, siendo esta continua y discreta, respectivamente.
- Si con a, b y c se forma una proporción continua en ese orden, tenemos que
  - b es la media aritmética de a y c.

    $$\boxed{b=\frac{a+c}{2}}$$
  - b es la media geométrica de a y c.

    $$\boxed{b=\sqrt{a\times c}}$$
  - b es la media armónica de a y c.

    $$\boxed{b=\frac{2}{\frac{1}{a}+\frac{1}{c}}}$$

LECTURA

El problema del joyero

El dueño de la hospedería se llamaba Salim y al llegar le dije que necesitaba un cuarto para mí y para mi amigo Beremiz Samir.

–¿Ese hombre es calculador? –indagó el viejo Salim–. Entonces llegó en el momento oportuno, acabo de tener una seria discrepancia con un vendedor de joyas.

Llamaron al vendedor de joyas, quien declaró estar interesadísimo en la solución del problema.

–¿Cuál es finalmente el origen de la duda? –preguntó Beremiz.

Salim apuntó hacia el joyero y dijo: vino de Siria a vender joyas en Bagdad. Me prometió que pagaría por el hospedaje 20 dinares si vendía las joyas por 100 dinares, y 35 si las vendía por 200. Al cabo de varios días, habiéndose movido de aquí para allá, vendió todo por 140 dinares. ¿Cuánto debía pagar por el hospedaje, consonante con nuestro acuerdo?

–¡Debo pagar solo 24 dinares y medio! –replicó de inmediato el mercader sirio–. Si vendiéndolas por 200 debía pagar 35, al venderlas por 140 debo pagar 24 y medio.

–¡Está equivocado! –dijo irritado el viejo Salim–. Según mis cuentas, son 28. Y voy a probarlo.

Y el viejo Salim raciocinó del siguiente modo:

–Si por 100 debía recibir 20, por 10, que es la décima parte de 100, debía recibir la décima parte de 20. ¿Cuál es la décima parte de 20? Es 2. ¿140 cuántos 10 contiene? Contiene 14 veces 10. Luego, por 140 debo recibir 14 veces 2, que es igual a 28, como ya dije.

–¡Calma, amigos míos–interrumpió el calculador–. Los resultados que los señores indican están equivocados según lo voy a probar. De acuerdo con la operación hecha, el sirio estaría obligado a pagar 20 dinares para el hospedaje si vendiera las joyas por 100 y estaría obligado a pagar 35 si las vendiera por 200. Observen que la diferencia de 100, en el precio de venta, corresponde a una diferencia de 15 en el precio de hospedaje. ¿Está claro? –asintieron los dos.

Prosiguió el calculista: Ahora, si el sustento de 100 en la venta trae un aumento de 15 en el hospedaje, yo pregunto: ¿cuál será el aumento del hospedaje por el aumento de 40 en la venta? Si la diferencia fuera de 20 (que es un quinto de 100), el aumento del hospedaje sería de 3 (pues 3 es un quinto de 15). Para la diferencia de 40 (que es el doble de 20) el aumento del hospedaje deberá ser de 6. Por eso el pago correspondiente a 140 es 26.

Finalmente, concluyó: Amigos míos, las proporciones que nos parecen perfectas están a veces falseadas por el error. Según los términos de la operación, el señor debe pagar al hospedero 26 dinares y no 24 y medio como al principio creía.

–El señor tiene toda la razón –asintió el joyero–. Reconozco ahora que mi cálculo estaba errado.

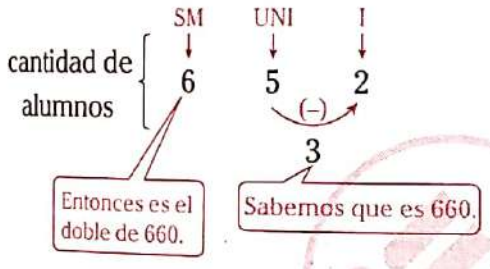
Tahan, Malba. *El hombre que calculaba.*

Problemas resueltos

Problema 1

En nuestro local, la cantidad de alumnos de los ciclos San Marcos (SM), UNI e Integral (I) son proporcionales a 6; 5 y 2, respectivamente. Si la cantidad de alumnos del ciclo UNI excede a la del ciclo Integral en 660, ¿cuántos alumnos hay en el ciclo SM?

Resolución



→ $2(660)=1320$

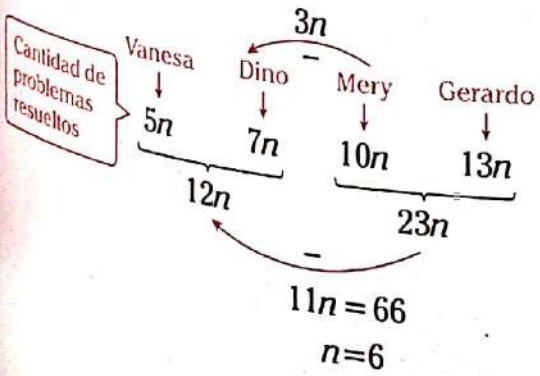
Por lo tanto, en el ciclo SM hay 1320 alumnos.

Problema 2

La cantidad de problemas que han resuelto Vanesa, Dino, Mery y Gerardo son proporcionales a 5; 7; 10 y 13, respectivamente. Si entre Mery y Gerardo han resuelto 66 problemas más que entre los resueltos por Vanesa y Dino, ¿cuántos problemas más que Dino ha resuelto Mery?

Resolución

Graficamos.



→ $3n=3(6)=18$

Por lo tanto, Mery ha resuelto 18 problemas más que Dino.

Problema 3

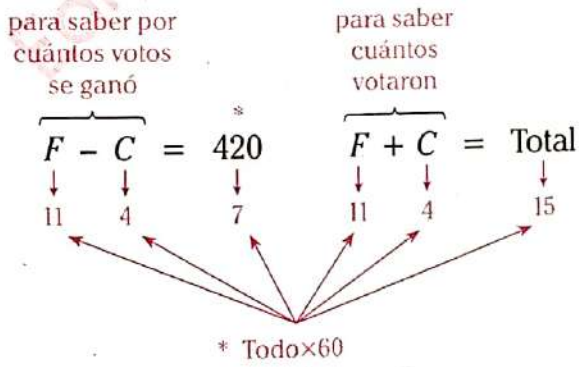
En la Facultad de Ingeniería Civil de la UNI, un tema es sometido a votación; al hacer el conteo de los votos se observó que hay 11 votos a favor por cada 4 votos en contra. Si la moción fue ganada por 420 votos, ¿cuántos alumnos votaron? Considere que no hubieron abstenciones.

Resolución

Sean

- F: cantidad de votos a favor
- C: cantidad de votos en contra

Sabemos que todos votaron.



→ total$=15(60)=900$

Por lo tanto, votaron 900 alumnos.

Problema 4

Los volúmenes de agua que hay en tres recipientes son proporcionales a 3; 7 y 11. Si se pasan 100 litros del recipiente de mayor volumen al de menor volumen, resultan los tres con el mismo volumen. ¿Cuántos litros hay en total en los tres recipientes?

Resolución

Recipiente:	1.er	2.o	3.er	Total
al inicio	$3k$	$7k$	$11k$	$21k$
volumen al final	$7k$	$7k$	$7k$	$21k$

$4k=100$ litros

c/u: $\frac{21k}{3}=7k$

$\rightarrow\ 4k=100$

$k=25$

Obtenemos que el total es $21k=21(25)=525$.

Por lo tanto, en total hay 525 litros.

Problema 5

Las propinas que trajeron hoy Mónica y Luis están en la relación de 13 a 7. Si Mónica le canceló 9 soles que debía a Luis y ambos quedaron con la misma cantidad de dinero, ¿cuánto de propina llevó Luis?

Resolución

Tenemos lo siguiente:

	Mónica	Luis
propina	$13k$	$7k$
al final	$(13k-9)$	$(7k+9)$

S/9

Del dato

$\rightarrow\ 13k-9=7k+9$

Operamos.

$13k-7k=9+9$

$6k=18$

$k=3$

$\rightarrow\ 7k=21$

Por lo tanto, Luis llevó 21 soles de propina.

Problema 6

Se tiene una mezcla de 260 L de agua y alcohol en la relación de 5 a 8. ¿Cuántos litros de agua se deben agregar para que por cada 4 L de agua se tenga 5 L de alcohol?

Resolución

El volumen de alcohol no se altera, solo se agrega agua.

	Al inicio	V_{litros}	Al final
agua:	$5(20)$	(+)	$4(32)$
alcohol:	$8(20)$	=	$5(32)$
total:	$\boxed{13(20)}$		

260 L

$V=4(32)-5(20)=28$

Por lo tanto, se deben agregar 28 L de agua.

Problema 7

Las edades de Janeth y Alejandra dentro de un año estarán en la relación de 5 a 1, y dentro de 15 años estarán en la relación de 11 a 5. Halle la edad de Janeth.

Resolución

Tenemos lo siguiente:

15 años; un año; 14 años

	Hoy	Futuro 1	Futuro 2
Janeth	¿?	$5(3k)$	$11(2k)$
Alejandra		$1(3k)$	$5(2k)$

(diferencia de edades constante): $4(3k) = 6(2k)$

MCM(4; 6)=12

Luego,

$11(2k)-5(3k)=14$

$7k=14\ \rightarrow\ k=2$

Nos piden $5(3k)-1=29$.

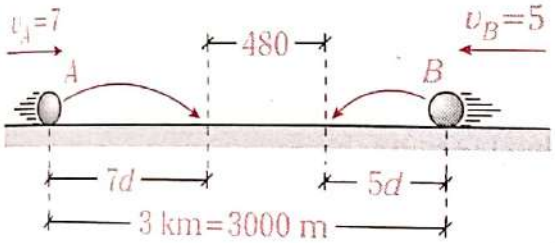
Por lo tanto, la edad de Janeth es 29 años.

Problema 8

Dos móviles están separados 3 km y parten hacia el encuentro con velocidades que están en la relación de 7 a 5. ¿Cuánto ha recorrido el más lento hasta el momento en que se encuentran separados 480 m?

Resolución

Tenemos lo siguiente:



Del gráfico

$7d+480+5d=3000$

$12d=2520$

$d=210$

$\rightarrow 5d=1050$

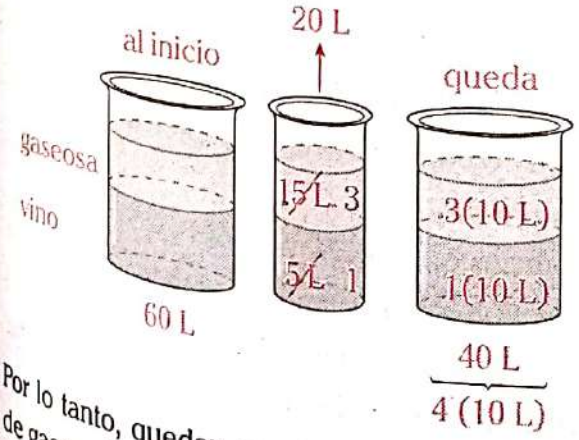
Por lo tanto, el más lento ha recorrido 1050 m.

Problema 9

De un recipiente que contiene 60 L de una mezcla de gaseosa y vino, se extraen 20 L, de los cuales 5 L son de vino. ¿Cuántos litros de gaseosa quedan en el recipiente?

Resolución

Graficamos.



Por lo tanto, quedan en el recipiente 30 litros de gaseosa.

Recuerde

En una mezcla homogénea, los ingredientes al inicio, en lo que se extrae y en lo que queda se encuentran en la misma relación.

Problema 10

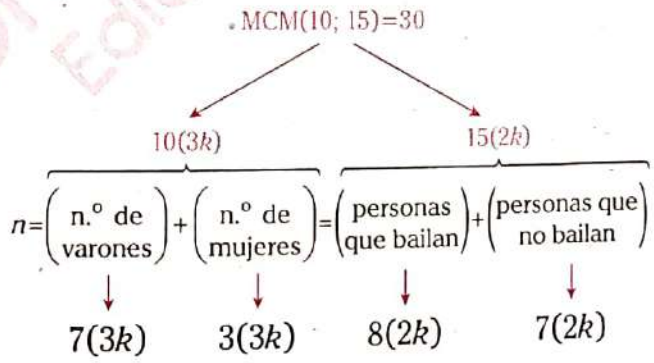
En una reunión por fin de ciclo, se observa que la cantidad de varones y mujeres están en la relación de 7 a 3, y que por cada 8 personas que están bailando hay 7 que no bailan. Si se sabe que 25 mujeres no están bailando, ¿cuántos varones están bailando?

Resolución

Sea n el total de asistentes

Se asume que la cantidad de hombres que bailan es la misma que la cantidad de mujeres que bailan.

Tenemos lo siguiente:



De donde se tiene que

	Varones ($21k$)	Mujeres ($9k$)
Bailan ($16k$)	$8k$	$8k$
No bailan ($14k$)		k

Por dato, $k=25$.

Piden $8k=8(25)=200$.

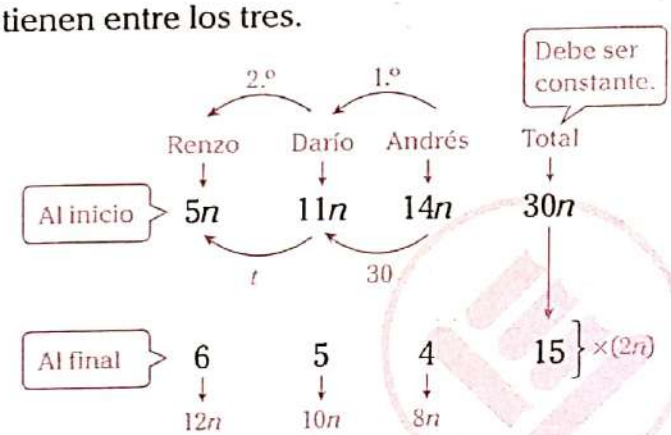
Por lo tanto, están bailando 200 varones.

Problema 11

Renzo, Darío y Andrés tienen figuritas del mundial en la relación de 5; 11 y 14, respectivamente. Si Andrés le da 30 figuritas a Darío y este le da t figuritas a Renzo, la nueva relación de la cantidad de figuritas es de 6; 5 y 4, respectivamente. Halle el valor de t.

Resolución

Solo se cambia la cantidad de figuritas de cada uno de ellos; lo que no cambia es el total que tienen entre los tres.



Se observa que Andrés tenía al inicio $14n$ y al final se queda con $8n$.

$\rightarrow\ 14n-8n=6n=30$

$n=5$

Luego, se observa que Renzo tenía $5n$ y al final tiene $12n$, entonces Darío le dio $7n$.

$\rightarrow\ t=7n=35$

Por lo tanto, el valor de t es 35.

Problema 12

Si $\dfrac{a^3}{32}=\dfrac{b^3}{108}=\dfrac{c^3}{500}$

y la tercera diferencial de $(b+c)$ y $(a+b)$ es 30, halle la cuarta proporcional de c, b y a (en ese orden).

Resolución

Tenemos que

$$\frac{a^3}{\cancel{32}}=\frac{b^3}{\cancel{108}}=\frac{c^3}{\cancel{500}}$$

$$\left.\frac{a^3}{8}=\frac{b^3}{27}=\frac{c^3}{125}\right\}\text{ Extraemos la raíz cúbica.}$$

$$\frac{a}{2}=\frac{b}{3}=\frac{c}{5}=k$$

$\rightarrow\ a=2k;\ b=3k;\ c=5k$

La tercera diferencial de $\underbrace{(b+c)}_{8k}$ y $\underbrace{(a+b)}_{5k}$ es 30.

$$\underbrace{8k-\boxed{5k}}_{3k}=\boxed{5k}-\underset{2k}{\underset{\downarrow}{30}}$$

$\rightarrow\ k=15$

Piden la cuarta proporcional de c, b y a (en ese orden).

$$\frac{5\cancel{k}}{3\cancel{k}}=\frac{2k}{\boxed{x}}$$

$$\rightarrow\ x=\frac{6}{5}k=\frac{6}{5}(15)=18$$

Por lo tanto, la cuarta proporcional de c, b y a (en ese orden) es 18.

Problema 13

En una fiesta de promoción se observó que inicialmente por cada 7 mujeres habían 5 varones; a la medianoche se retiraron 90 parejas, quedando la cantidad de mujeres y varones en la relación de 5 a 1. ¿Cuántas personas había inicialmente?

Resolución

Sean

- V: cantidad inicial de varones
- M: cantidad inicial de mujeres

Nos piden $V+M$.

Sabemos que $M=7k$ y $V=5k$.

Si se retiran 90 parejas, entonces se retiran 90 varones y 90 mujeres.

La nueva relación queda de la siguiente manera:

$$\left.\begin{array}{l}\text{mujeres}\rightarrow 7k-90\\ \text{varones}\rightarrow 5k-90\end{array}=\frac{5}{1}\right)(-)$$

Por propiedad

$$\frac{(7k-90)-(5k-90)}{5k-90}=\frac{5-1}{1}$$

Entonces

$$\frac{2k}{5k-90}=\frac{4}{1}$$

$k=20$

$\rightarrow V+M=12k=240$

Por lo tanto, inicialmente habían 240 personas.

Otra forma

Previamente veamos un ejemplo con algunas cantidades específicas.

Se retiran 10 parejas.

Llegan 20 parejas.

	Inicio		
Mujeres	100	120	90
Varones	70	90	60
Diferencia	30	30	30

Si llegan o se retiran una cierta cantidad de parejas, se cumple que la diferencia entre la cantidad de mujeres y varones permanece constante.

Aplicamos esta forma de resolver.

$9n$ (–)

	al inicio	al final
mujeres :	$7(2n)$	$5n$
varones :	$5(2n)$	$1n$
diferencia :	$\boxed{2(2n)}$	$\boxed{4n}$

Debe ser constante.

Como se retiran 90 parejas

$\rightarrow 9n=90$

$n=10$

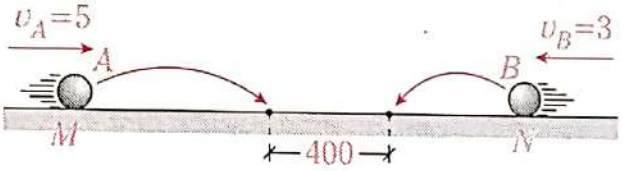
$\therefore M+V=12(2n)=24n=240$

Problema 14

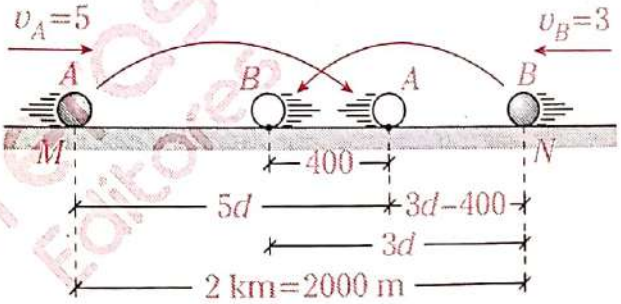
Dos ciudades, M y N, están separadas 2 km. A sale de M hacia N y, simultáneamente, B sale de N hacia M, con velocidades que están en la relación de 5 a 3, respectivamente. En el momento en que están separados 400 m por segunda vez, ¿cuánto le falta a A para llegar a N?

Resolución

La primera vez que están separados 400 m es antes de que se crucen.



En nuestro caso están separados 400 m por segunda vez, es decir, ya se cruzaron.



Del gráfico

$5d+(3d-400)=2000$

$8d=2400$

$d=300$

$\rightarrow 3d-400=3(300)-400=500$

Por lo tanto, a A le falta 500 m para llegar a N.

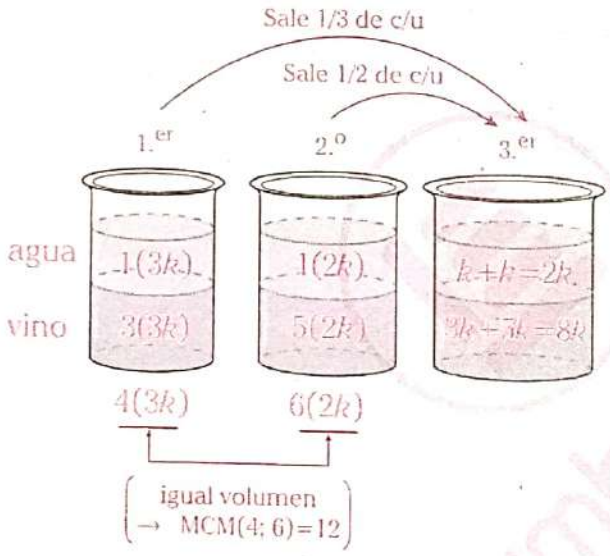
Problema 15

Dos toneles de igual capacidad están completamente llenos con agua y vino cada uno. En el primer tonel, por cada litro de agua hay 3 litros de vino, y en el segundo hay 1 litro de agua por cada 5 litros de vino. Si se vierte la tercera parte del primero y la mitad del segundo a un tercer recipiente, ¿en qué relación se encuentran los volúmenes de agua y vino en este último recipiente?

Resolución

> **Recuerde**
> Si se extrae una fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ del volumen de una mezcla homogénea, entonces, sale la misma fracción $\left(\frac{a}{b}\right)$ del volumen de cada componente.

Graficamos el enunciado.



En el tercer recipiente,

$$\frac{\text{(volumen de agua)}}{\text{(volumen de vino)}}=\frac{2k}{8k}=\frac{1}{4}$$

Por lo tanto, la relación es de 1 a 4.

Problema 16

En determinado momento de una fiesta se observa que el número de varones que no baila es al número de personas que están bailando como 5 es a 4, y el número de varones que bailan es al total de mujeres como 4 es a 5. Halle cuántas mujeres están bailando si en total asistieron 380 personas.

Resolución

Ordenamos la información.

	Varones: 7	Mujeres
Bailan: 4	2	2
No bailan	5	

Luego, $\frac{\text{(varones que bailan)}}{\text{(total de mujeres)}}=\frac{4}{5}$

Entonces

	Varones: 7(2k)	Mujeres: 5k
Bailan: 4(2k)	2(2k)	2(2k)
No bailan	5(2k)	

Por dato

$$\text{total de asistentes}=\begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{varones}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{mujeres}\end{pmatrix}$$

$380=14k+5k$

$380=19k$

$\rightarrow\ k=20$

Piden $4k=4(20)=80$.

Por lo tanto, 80 mujeres están bailando.

Problema 17

En una proporción geométrica continua de constante entera, la suma de sus términos diferentes es 124. Halle el mayor de sus términos.

Resolución

Construimos la proporción continua a partir del último término y la constante.

$$\frac{ak^2}{ak}=\frac{ak}{a}=k\ ;\ k\in\mathbb{Z}^+$$

> **Recuerde**
> Cuando en el enunciado del problema se indique "términos diferentes", los términos que se repiten se consideran solo una vez.

Entonces por dato

$$ak^2+ak+a=124$$

Operamos.

$$a(\overbrace{\underbrace{k^2+k}_{k(k+1)}+1}^{\text{impar}})=124$$

$$\underbrace{k(k+1)}_{\text{par}}$$

Entonces

$$\underline{\underline{a}}(k^2+k+1)=2\times2\times31$$

$k=5$

$\rightarrow a=4$

Piden $ak^2=4(5)^2=100$.

Por lo tanto, el mayor término es 100.

Problema 18

Al inicio de una reunión, la relación entre la cantidad de varones y mujeres era de 5 a 1; luego de una hora se retiran m parejas y la nueva relación fue de 7 a 1, pero dos horas más tarde llegan n parejas y la nueva relación fue de 5 a 2. Si la cantidad de varones que había al inicio excede a la cantidad de mujeres que quedó al final en 105, halle $n-m$.

Resolución

Tenemos lo siguiente:

		Al inicio	(Se retiran m parejas) (−)	(Llegan n parejas) (+) Al final
varones	:	$5(3k)$	$7(2k)$	$5(4k)$
mujeres	:	$1(3k)$	$1(2k)$	$2(4k)$
diferencia	:	$\boxed{4(3k)}$	$=\boxed{6(2k)}$	$=\boxed{3(4k)}$

MCM(4; 6; 3)=12

Entonces

- $m=15k-14k=k$
- $n=20k-14k=6k$

Por dato

$$\begin{pmatrix}\text{varones}\\ \text{al inicio}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{mujeres}\\ \text{al final}\end{pmatrix}=105$$

$$15k-8k=105$$

$$7k=105$$

$$k=15$$

Nos piden $n-m$.

$\therefore\ n-m=5k=5(15)=75$

Problema 19

En una proporción, la suma de los términos de la primera razón es a la suma de los términos de la segunda razón como 3 es a 2. Si la suma de los cuadrados de los consecuentes es 1300, halle la media proporcional.

Resolución

Como piden la media proporcional, entonces es una proporción geométrica continua.

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=K$$

Del dato obtenemos que $\dfrac{a+b}{b+c}=\dfrac{3}{2}=K$.

Formamos la proporción a partir de la constante.

$$\frac{3^2n}{6n}=\frac{6n}{4n}=\boxed{\frac{3}{2}}$$

×3 ×2 ×2 ×3

Sabemos que

$$\begin{pmatrix}\text{suma de los cuadrados}\\ \text{de los consecuentes}\end{pmatrix}=1300$$

Entonces

$$(6n)^2+(4n)^2=1300$$
$$52n^2=1300$$
$$n^2=25$$
$$n=5$$

Piden $6n=6(5)=30$.

Por lo tanto, la media proporcional es 30.

Problema 20

Dada la siguiente serie:

$$\frac{\sqrt{a^2-49}}{35}=\frac{\sqrt{b^2-121}}{55}=\frac{\sqrt{c^2-169}}{65}$$

Si $3a+2b-c=120$, halle $c-a$.

Resolución

Tenemos que

$$\frac{\sqrt{a^2-49}}{\cancel{35}}=\frac{\sqrt{b^2-121}}{\cancel{55}}=\frac{\sqrt{c^2-169}}{\cancel{65}}$$

$$\left.\frac{\sqrt{a^2-49}}{7}=\frac{\sqrt{b^2-121}}{11}=\frac{\sqrt{c^2-169}}{13}\right\}\text{Elevamos al cuadrado.}$$

$$\frac{a^2-49}{49}=\frac{b^2-121}{121}=\frac{c^2-169}{169}\ (+)$$

Por propiedad

$$\left.\frac{a^2}{49}=\frac{b^2}{121}=\frac{c^2}{169}\right\}\text{Extraemos la raíz cuadrada.}$$

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{11}=\frac{c}{13}$$

Por propiedad

$$\frac{a}{7}=\frac{b}{11}=\frac{c}{13}=\frac{c-a}{13-7}=\frac{3a+2b-c}{3(7)+2(11)-13}$$

$$\rightarrow\ \frac{c-a}{6}=\frac{120}{30}\quad (\div 5)$$

$$\therefore\ c-4=24$$

Problema 21

Se tiene la siguiente SRGE de constante entera positiva:

$$\frac{I+50}{I-50}=\frac{C+30}{C-30}=\frac{H+20}{H-20}=K$$

Además, $I+C+H+1=K^2$

Halle $K+H$.

Resolución

Tenemos que

$$\frac{I+50}{I-50}=\frac{C+30}{C-30}=\frac{H+20}{H-20}=\frac{K}{1}\ (+)\ (-)$$

Por propiedad

$$\frac{(I+50)+(I-50)}{(I+50)-(I-50)}=\frac{2I}{2(50)}=\frac{I}{50}$$

Lo mismo con todas las razones

$$\frac{I}{50}=\frac{C}{30}=\frac{H}{20}=\frac{K+1}{K-1}$$

$$\frac{I+C+H}{50+30+20}=\frac{K+1}{K-1}$$

Por dato, $I+C+H+1=K^2$

$$\frac{K^2-1}{100}=\frac{K+1}{K-1}$$

$$\frac{(K+1)(K-1)}{100}=\frac{K+1}{K-1}$$

$$(K-1)^2=100\ \rightarrow\ K=11$$

Además,

$$\frac{H}{20}=\frac{K+1}{K-1}=\frac{12}{10}\ \rightarrow\ H=24\quad (\times 2)$$

$$\therefore\ K+H=35$$

Test

1. La suma de dos números que están en la relación de 3 a 5 es 120. Halle el menor.

A) 30 B) 36 C) 40
D) 45 E) 48

2. Si A es B como 2 es 3 y B es a C como 6 es a 5, ¿en qué relación se encuentran A y C?

A) de 1 a 4 B) de 2 a 3 C) de 4 a 5
D) de 3 a 4 E) de 1 a 3

3. A una reunión asisten 30 varones y 70 mujeres. Indique la razón entre la cantidad de varones y el total de personas.

A) 3/7 B) 2/5 C) 7/10
D) 4/5 E) 3/10

4. Las edades de tres hermanos están en la relación de 3; 7 y 13. Si el mayor tiene 65 años, ¿qué edad tiene el menor?

A) 6 años B) 9 años C) 12 años
D) 15 años E) 21 años

5. Si A es tres veces más que B y $A+B=100$, halle el valor de A.

A) 60 B) 72 C) 75
D) 80 E) 84

6. La diferencia de las edades de Ana y Beto es 6 años. Si dentro de 4 años la edad de Ana y Beto estarán en la relación de 7 a 4, ¿cuántos años tiene Ana?

A) 8 años B) 10 años C) 12 años
D) 14 años E) 15 años

7. Dos móviles que están separados 1 km parten al encuentro simultáneamente con velocidades que están en relación de 7 a 3. Hasta el momento en que se encuentran, ¿cuánto avanzó el más lento?

A) 300 m B) 360 m C) 450 m
D) 480 m E) 700 m

8. De una mezcla de 30 L de alcohol y 70 L de agua se extraen 20 L. ¿Cuántos litros de alcohol se extrajo?

A) 4 L B) 5 L C) 6 L
D) 8 L E) 10 L

9. Si $\frac{a}{3}=\frac{b}{7}=\frac{c}{11}$ y $c-b=60$, halle a.

A) 15 B) 30 C) 33
D) 39 E) 45

10. En una reunión de 160 personas, la relación entre la cantidad de personas que bailan y no bailan es de 5 a 3. ¿Cuántas mujeres están bailando?

A) 30 B) 50 C) 60
D) 75 E) 100

11. Indique la media diferencial de 130 y 70.

A) 35 B) 60 C) 75
D) 80 E) 100

12. Indique la media proporcional de 60 y 15.

A) 20 B) 30 C) 35
D) 37,5 E) 40

CLAVES

1 D 2 C 3 E 4 D 5 D 6 B 7 A 8 C 9 E 10 B 11 E 12 B

Problemas propuestos

Nivel básico

1. En una proporción, la suma de los términos de la primera y la segunda razón son 20 y 60, respectivamente. Halla la media proporcional.

A) 9 B) 10 C) 12
D) 14 E) 15

2. Dos ciudades, M y N, están separadas 3 kilometros. Dos móviles, A y B, salen simultáneamente de M hacia N con velocidades que están en la relación de 3 a 7, respectivamente. Luego de cierto tiempo, la distancia que le falta al más veloz para llegar a N es una vez más de la distancia que aventaja al más lento. ¿Cuánto avanzó hasta ese momento el más lento?

A) 360 m B) 480 m C) 600 m
D) 660 m E) 750 m

3. En un recipiente se tiene 180 litros de una mezcla de agua y alcohol. Se extraen 48 litros de la mezcla, de los cuales 32 litros son de alcohol. ¿Cuántos litros de agua quedan en el recipiente?

A) 24 B) 30 C) 36
D) 44 E) 48

4. Se tiene una mezcla de 30 litros de agua y 90 litros de vino. Si se extraen 20 litros de la mezcla, ¿cuántos litros de vino quedan?

A) 25 L B) 40 L C) 60 L
D) 72 L E) 75 L

5. Los capitales que aportaron Alejandra, Bertha, Claudia y Daniela para iniciar un negocio están en la relación de 4; 6; 7 y 12, respectivamente. Si la suma de los dos mayores capitales excede a la suma de los otros dos capitales en S/22 500, ¿cuál fue el capital total que se reunió para iniciar un negocio?

A) S/45 000
B) S/64 000
C) S/72 500
D) S/75 000
E) S/87 500

6. En una sección de la biblioteca hay libros de aritmética (A), geometría (G) y física (F). Por cada 11 libros de A, hay 8 de G, y por cada 6 libros de G, hay 5 de F; además, hay 220 libros entre G y F. ¿En cuánto excede la cantidad de libros de A a la cantidad de libros de F?

A) 20 B) 45 C) 52
D) 60 E) 65

7. Sea $\frac{a}{13}=\frac{b}{11}=\frac{c}{7}=\frac{d}{3}$.

Si la cuarta diferencial de a, b y c (en ese orden) es 40, halle la media diferencial de b y d.

A) 21 B) 35 C) 44
D) 56 E) 70

8. Los volúmenes que contienen dos recipientes están en la relación de 2 a 5. Si agregamos 44 litros a cada uno, la nueva relación será de 5 a 7. Halla la diferencia positiva de los volúmenes finales.

A) 16 L B) 18 L C) 20 L
D) 24 L E) 30 L

9. En un tonel se tiene 120 litros de una mezcla de gaseosa y vino en la relación de 5 a 3. ¿Cuántos litros de gaseosa se deben agregar para que la nueva relación de gaseosa y vino sea de 19 a 9?

A) 16 L B) 20 L C) 24 L
D) 30 L E) 35 L

10. Los consecuentes de una igualdad de cuatro razones equivalentes son 3; 4; 5 y 6, en ese orden. Si la suma del producto de los dos primeros antecedentes más la suma de los dos últimos antecedentes es 9450, halle la suma de los antecedentes.

A) 240 B) 270 C) 280
D) 300 E) 320

11. Las edades de Beatriz y Alfredo están en la relación de 4 a 1 y dentro de 14 años estarán en la relación de 5 a 3. ¿Cuántos años tendrá Alfredo dentro de 6 años?

A) 10 años B) 12 años C) 14 años
D) 15 años E) 16 años

12. En una reunión, la cantidad de varones asistentes es a la cantidad de varones que no bailan como 13 es a 4. Si todas las mujeres están bailando y son 25 más que la cantidad de varones que no bailan, ¿cuántas personas asistieron a dicha reunión?

A) 75
D) 105 B) 88 C) 100
E) 110

13. La edad de Beto es el triple de la edad de Andrea y tres veces más que la edad de Claudia. Si la suma de las edades de Andrea y Claudia es 21 años, ¿cuántos años tiene Beto?

A) 18 años B) 20 años C) 24 años
D) 30 años E) 36 años

Nivel intermedio

14. En una reunión, la cantidad de varones y mujeres están en la relación de 5 a 6; además, por cada mujer que usa lentes hay 3 mujeres que no lo hacen. Si hay 20 mujeres más que varones, ¿cuántas mujeres usan lentes?

A) 20 B) 24 C) 30
D) 36 E) 40

15. A una conferencia asistieron 720 personas, notándose que por cada 7 varones habían 11 mujeres. Si después del primer receso se retiraron 80 parejas, ¿cuál es la nueva relación entre la cantidad de varones y mujeres?

A) 11:19 B) 5:9 C) 3:5
D) 7:9 E) 8:11

16. Dos móviles parten de M y N simultáneamente hacia el encuentro, con velocidades que están en la relación 7 a 12, respectivamente. Si cuando están separados 60 km por segunda vez al más veloz le falta 45 km para llegar a M, halle la distancia de M a N.

A) 200 km
B) 225 km
C) 240 km
D) 285 km
E) 300 km

17. De un depósito que contiene una mezcla de 45 L de alcohol y 75 L de agua se extrae 48 L. ¿Cuántos litros de alcohol se debe agregar para que la nueva relación de alcohol y agua sea de 4 a 3?

A) 15 L B) 24 L C) 33 L
D) 34 L E) 40 L

18. En un tonel se tiene una mezcla de vino y agua en la relación de 5 a 3; luego se extraen a litros de vino y la nueva relación es de 1 a 4; finalmente, se extraen b litros de agua y quedan 3 litros de vino por cada 5 litros de agua. Si $a+b=120$, ¿cuántos litros de vino había inicialmente?

A) 64 L B) 80 L C) 88 L
D) 100 L E) 120 L

19. Dos toneles están completamente llenos con agua y alcohol. En el primer tonel, por cada 2 L de agua hay 3 L de alcohol; en el segundo, cuya capacidad es dos veces más que el primero, por cada 3 L de agua hay 7 L de alcohol. Si se extrae la mitad del primero y la tercera parte del segundo para mezclarlos en otro recipiente, ¿en qué relación se encuentran los volúmenes de agua y alcohol en esta última mezcla?

A) de 1 a 1
B) de 1 a 2
C) de 1 a 3
D) de 1 a 4
E) de 2 a 5

20. Las edades de Juan y Gladys hace n años estaban en la relación de 3 a 4 y dentro de $2n$ años estarán en la relación de 5 a 6, respectivamente. Si la suma de sus edades es 75 años, halle la edad de Gladys.

A) 33 años B) 36 años C) 40 años
D) 42 años E) 45 años

21. Las edades de Andrés, Sergio y Rodrigo están en la misma relación que los números 2; 3 y 4; además, dentro de 9 años la relación será de 7; 9 y 11, respectivamente. ¿Hace 5 años, en cuánto excedía la edad de Rodrigo a la edad de Andrés?

A) 4 años B) 8 años C) 10 años
D) 12 años E) 16 años

22. Las edades de Andrea y Jim están en la relación de 5 a 7, respectivamente, y dentro de n años estarán en la relación de n a $(n+1)$. Si hace 5 años la suma de sus edades era 26 años, halle la edad de Andrea de $3n$ años.

A) 20 años B) 21 años C) 24 años
D) 25 años E) 27 años

23. En una fiesta de promoción se observa que la cantidad de varones y mujeres están en la relación de 11 a 7; además, por cada 8 personas que están bailando hay 7 personas que no bailan. ¿En qué relación se encuentra la cantidad de mujeres que no bailan y la cantidad de varones que bailan?

A) de 1 a 2
B) de 11 a 13
C) de 17 a 24
D) de 7 a 17
E) de 11 a 24

24. En un determinado momento de una fiesta se observa que la cantidad de mujeres que no bailan es a la cantidad de varones que están bailando como 3 es a 4; además, la cantidad de varones que no bailan con la cantidad de mujeres que están bailando están en la relación de 5 a 6. Si en dicha fiesta hay 5 varones más que mujeres, ¿cuántas personas no están bailando?

A) 64 B) 84 C) 95
D) 100 E) 105

25. Al inicio de una fiesta habían 240 personas, y se observó que la cantidad de varones que estaban bailando es la tercera parte de la cantidad de mujeres que no bailaban; además, el total de varones es el doble del total de mujeres. Si se retiran x varones, la nueva relación entre varones y mujeres sería de 5 a 4. Halle el valor de x.

A) 36 B) 40 C) 48
D) 50 E) 60

26. En una proporción geométrica, la suma de los términos es 294 y la diferencia de los extremos es 42. Si la constante es mayor que la unidad, halle la media proporcional.

A) 42 B) 45 C) 54
D) 72 E) 80

27. En una proporción geométrica, el producto de antecedentes es 126 y el producto de los consecuentes es 350. Si la razón aritmética de los términos medios es 29, ¿en cuánto excede el segundo término al segundo consecuente?

A) 10 B) 15 C) 20
D) 24 E) 25

28. En una proporción se cumple que la suma de la raíz cuadrada del producto de antecedentes con la raíz cuadrada del producto de consecuentes es 130. Si los términos y la constante son enteros mayores que uno, halle la media proporcional.

A) 25 B) 35 C) 52
D) 64 E) 65

29. Al inicio de una reunión habían 280 personas; se notó que por cada 5 varones habían 2 mujeres. ¿Cuántas parejas deben llegar para que la relación entre varones y mujeres sea de 9 a 5?

A) 40 B) 50 C) 60
D) 70 E) 80

30. El producto de los términos de una proporción continua es 40 960 000 y el producto de los consecuentes es igual a la suma de los 3 primeros términos. Halle la suma de los términos extremos.

A) 1024 B) 960 C) 840
D) 760 E) 650

31. En una SRGE de seis términos de constante menor que la unidad, la diferencia de los términos de cada razón es 21, 28 y 49 (en ese orden). Si la suma de los cuadrados de los dos últimos antecedentes es 260, halle el primer consecuente.

A) 24 B) 27 C) 30
D) 31 E) 35

32. Las velocidades de los móviles A y B están en la relación de 4 a 3 y parten simultáneamente. A parte de la ciudad P a Q, y B parte de la ciudad Q a P. En el momento en que se cruzan, A disminuye su velocidad a la mitad y B a su tercera parte. Se sabe que partir de allí A demora 4 horas para llegar a su destino. ¿Cuánto tiempo demora B para completar su recorrido si se sabe que la distancia de P a Q es 560 km?

A) 8 h
B) 9 h 15 min
C) 10 h 40 min
D) 12 h
E) 12 h 20 min

Nivel avanzado

33. En un concurso de matemáticas, para clasificar a la final se deben rendir 3 exámenes eliminatorios. Si la relación de la cantidad de alumnos que aprobaron y desaprobaron en el primer, segundo y tercer examen es de 10 a 7, de 3 a 5 y de 1 a 2, respectivamente; además, solo clasificaron 10 alumnos; ¿en cuánto excede la cantidad de aprobados en el primer examen a la cantidad de desaprobados en el segundo examen?

A) 15 B) 24 C) 30
D) 36 E) 45

34. Se tiene la siguiente serie de razones geométricas equivalentes

$$\frac{\sqrt{a^2-18}}{18}=\frac{\sqrt{b^2-32}}{24}=\frac{\sqrt{c^2-50}}{30}$$

Halle $a+b$ si $b+c=108$.

A) 60 B) 64 C) 72
D) 84 E) 90

35. Si $\frac{a}{m}=\frac{b}{n}=\frac{c}{p}$ y $(a-m)(b-n)(c-p)=1331$,

halle $R=\sqrt[3]{abc}-\sqrt[3]{mnp}$.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 11 E) 12

36. En una SRGE continua de seis términos, la diferencia entre el primer y quinto término es 630. Si la constante es entera y el último término es menor que 100, halle el mayor consecuente.

A) 75 B) 80 C) 108
D) 144 E) 180

37. En una SRGE de ocho términos, la suma de los términos de cada razón es 10; 25; 30 y 50. Si la suma de los cuadrados de los consecuentes es 660, halle la cuarta proporcional de los últimos tres antecedentes (en ese orden).

A) 30 B) 36 C) 42
D) 45 E) 48

38. Si $\frac{2a+15}{2a-15}=\frac{3b+25}{3b-25}=\frac{4c+35}{4c-35}$

además, $a+b+c=1180$

halle $c-a$.

A) 48 B) 60 C) 64
D) 75 E) 90

39. En una SRGE de constante entera, la suma de las raíces cuadradas del producto de los términos de cada razón es a la suma de las razones aritméticas de los términos de cada razón como 4 es a 15. Halle la suma de antecedentes si los consecuentes suman 45.

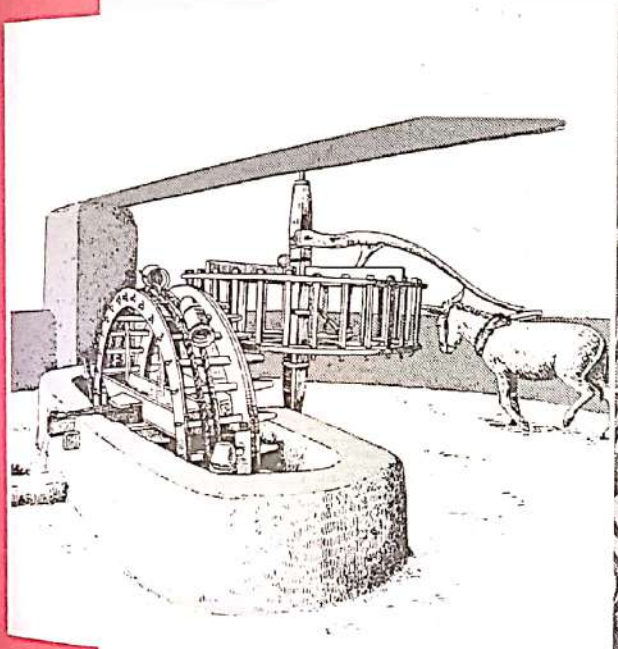
A) 400 B) 450 C) 540
D) 720 E) 900

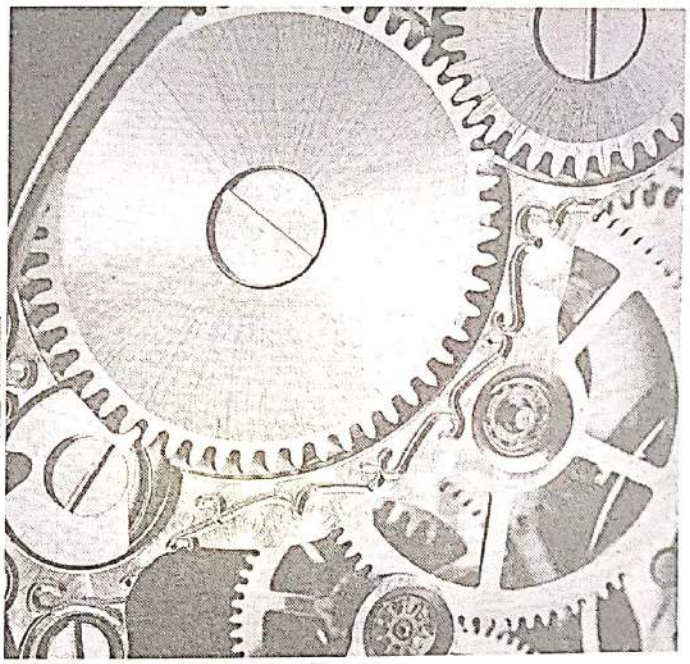
40. En una proporción geométrica, la suma de todos términos es 320 y la diferencia de los términos extremos es 80. Halle la media proporcional si se sabe que la constante es mayor que la unidad.

A) 48 B) 60 C) 72
D) 75 E) 90

Capítulo

XIII





Magnitudes proporcionales

Juan Esqueche Paiconcial

CAPÍTULO XIII

MAGNITUDES PROPORCIONALES

Objetivos

- Analizar la relación que cumplen dos o más magnitudes.
- Obtener conclusiones acerca de las relaciones que cumplen determinadas magnitudes que participan en casos particulares.
- Establecer una relación de las magnitudes con nuestra realidad cotidiana para un adecuado planteamiento de la resolución de un problema.

Introducción

En la vida cotidiana podemos observar distintas características propias de la materia, por ejemplo, sabemos que mientras más alto sea un edificio, su sombra será también mayor; si una persona pedalea más rápido su bicicleta, podrá recorrer mayor distancia en un mismo tiempo; si más obreros trabajan en la construcción de una misma casa, se demorarán menos tiempo en terminarlo; etc.

Estos ejemplos planteados nos hablan de cambios o variaciones de las magnitudes (altura, velocidad, distancia, número de obreros, número de días, etc.) que intervienen en una situación. En los dos primeros ejemplos, el aumento de una magnitud provoca que otra magnitud también aumente; en el tercer ejemplo, el aumento de una de ellas provoca la disminución de la otra. Cuando ocurren estas situaciones podemos trabajar con el tema de magnitudes proporcionales.

Con estas magnitudes se puede realizar la comparación (medición), teniendo en cuenta al tiempo; utilizando las horas (unidad de medida) como referencia se obtiene el resultado siguiente:

$$\text{tiempo} <> \underbrace{12}_{\text{valor numérico}} \quad \underbrace{\text{horas}}_{\text{unidad referencial}}$$

En el presente capítulo, se busca que los lectores puedan diferenciar los dos tipos de relaciones que se pueden realizar entre dos magnitudes, las cuales pueden ser directamente proporcional o inversamente proporcional, para luego resolver diferentes tipos de problemas tanto de examen de admisión como situaciones cotidianas.

Se busca además que a partir de la relación de dos magnitudes se puedan relacionar otras magnitudes tomando como referencia una de ellas y finalmente generar una ecuación que ayude a la solución de problemas con más de dos magnitudes.

1 ▸ DEFINICIONES PREVIAS

1.1. MAGNITUD

Se llama magnitud a todo aquello que posee la característica de variar, ya sea aumentando o disminuyendo; por ejemplo, la longitud de una carretera, la duración del recorrido de un atleta, la rapidez de un vehículo, el número de estudiantes en un aula, etc.

Las magnitudes pueden ser las siguientes: matemática, no matemática, escalar y vectorial.

1.1.1. Magnitud matemática

Es aquella magnitud que siendo abstracta (inmaterial) puede ser medida; por ejemplo, la velocidad, el tiempo, el caudal, etc.

1.1.2. Magnitud no matemática

Es aquella magnitud que se manifiesta a través de los sentidos de cada persona, por lo que no se puede medir; por ejemplo, el dolor, el miedo, la timidez, etc.

Debemos tener en cuenta que solo nuestros propios sentidos pueden percibir cuando una magnitud de este tipo aumenta o disminuye.

1.1.3. Magnitud escalar

Es una magnitud que solo se describe con la cantidad mediante un número y una unidad; por ejemplo, la longitud, el área, el volumen, el tiempo, etc.

$$\underbrace{20}_{\text{valor}} \quad \underbrace{\text{cm}}_{\text{unidad}}$$

1.1.4. Magnitud vectorial

Es una magnitud que además de ser descrita con la cantidad mediante un número y una unidad, lo es también por una dirección y un sentido. Por ejemplo, la velocidad, la fuerza, etc.

$$\underbrace{4}_{\text{valor numérico}} \quad \underbrace{\text{m/s}}_{\text{unidad}} \quad \underbrace{\text{verticalmente}}_{\text{dirección}} \ \underbrace{\text{y de abajo hacia arriba}}_{\text{sentido}}$$

1.2. CANTIDAD

Es todo estado particular de una magnitud, es el resultado de medir una determinada magnitud en ciertas unidades.

Ejemplos

- El peso es una magnitud, pero el peso de una persona, el peso de una carpeta, el peso de una roca, etc., son cantidades.
- El tiempo también es una magnitud, pero el tiempo que empleo para hacer una tarea, en cenar el que ha transcurrido desde que se nace, etc., son cantidades.

Es decir,

Magnitud	Cantidad
longitud	15 metros; 240 cm
área	400 cm^2; 25 m^2
tiempo	32 minutos; 43 segundos

Nota

En el presente capítulo, estudiaremos solo las magnitudes matemáticas, dado que con los valores obtenidos mediante el proceso de medición se puede establecer algunas relaciones entre dichas magnitudes.

2 RELACIÓN ENTRE MAGNITUDES

Las relaciones matemáticas que existen entre las magnitudes son de mucha importancia, ya que nos permiten deducir la variación de una magnitud, haciendo variar los valores de las magnitudes con las que se encuentra en interdependencia, teniendo en cuenta que estas relaciones pueden ser sencillas (solo entre dos magnitudes) y otras más complejas (más de dos magnitudes).

A continuación, estudiaremos la relación que se presenta entre dos magnitudes.

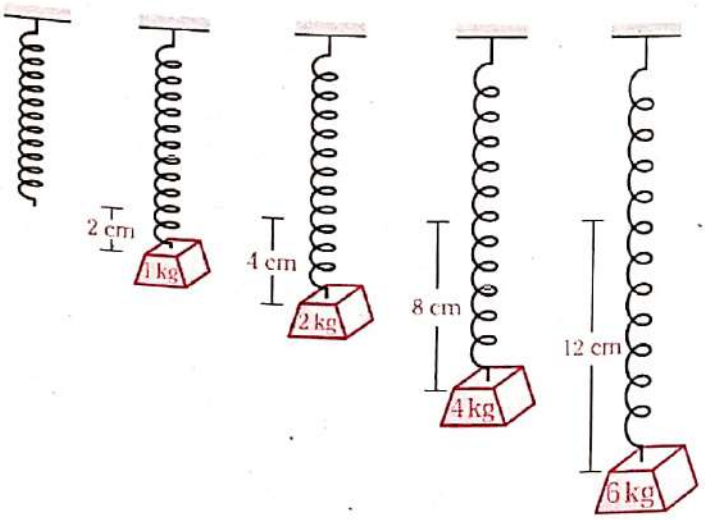
2.1. MAGNITUDES DIRECTAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes serán directamente proporcionales (DP) si al aumentar o disminuir los valores de una de ellas, los valores correspondientes de la otra magnitud también aumentan o disminuyen en la misma proporción.

Es decir, dos magnitudes son directamente proporcionales si al multiplicar el valor de una de ellas por un número (racional y positivo), el valor de la otra magnitud también queda multiplicado por el mismo número racional; o cuando triplicamos una de ellas, entonces, también se triplica el correspondiente valor de la otra magnitud, etc.

Ejemplo

A continuación se presenta un experimento realizado con un resorte y un conjunto de pesas.



Analizando las magnitudes de **deformación del resorte** (en cm), y el **peso** (en kg), se observa que si colocamos un mayor peso, la deformación también será mayor; y si hubiera un menor peso, entonces, la deformación también será menor. Dichos valores los podemos colocar en una tabla.

Peso (kg)	1	2	3	4	0,5
Deformación (cm)	2	4	6	8	1

×2 ×3 ×4 ×1/2

En el cuadro se observa que si el valor del peso se multiplica por un número, el valor de la deformación también quedará multiplicado por el mismo número. Es decir, si el valor del peso se duplica, la deformación también se duplica; o si el peso se reduce a la mitad, la deformación también se reduce a la mitad; así sucesivamente. Con ello podemos afirmar que el peso y la deformación son directamente proporcionales, es decir

(peso) DP (deformación)

Veamos los valores correspondientes de ambas magnitudes.

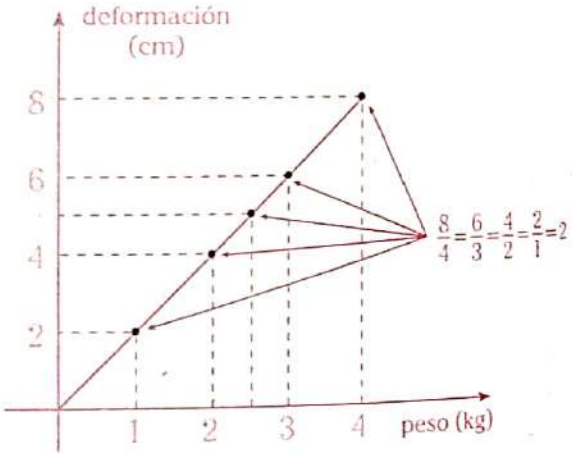
$$\frac{1}{2}=\frac{2}{4}=\frac{3}{6}=\frac{4}{8}=\frac{0,5}{1}=\underbrace{\frac{1}{2}}_{\text{constante}}$$

De esta manera se puede afirmar que el cociente de valores correspondientes del peso y la deformación es constante.

$$\frac{\text{valor del peso}}{\text{valor de la deformación}}=\text{constante}$$

2.1.1. Gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales

En el ejemplo anterior notamos que también se pueden representar los valores correspondientes de las dos magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares; para esto hacemos que en el eje X se ubique el peso y que en el eje Y se ubique la deformación; luego procedemos a realizar la gráfica.



Observación

La gráfica de dos magnitudes directamente proporcionales es un conjunto de puntos que pertenecen a una misma recta, la cual pasa por el origen de coordenadas.

También se cumple que en cualquier punto de la gráfica (excepto en el origen de coordenadas) el cociente de cada par de valores resulta ser constante.

En general, si A y B son dos magnitudes directamente proporcionales, se debe cumplir que el cociente de sus valores correspondientes resulte constante.

Es decir,

$$A \text{ DP } B \leftrightarrow \frac{\text{valor de } A}{\text{valor de } B}=\text{constante}$$

Además, tenemos

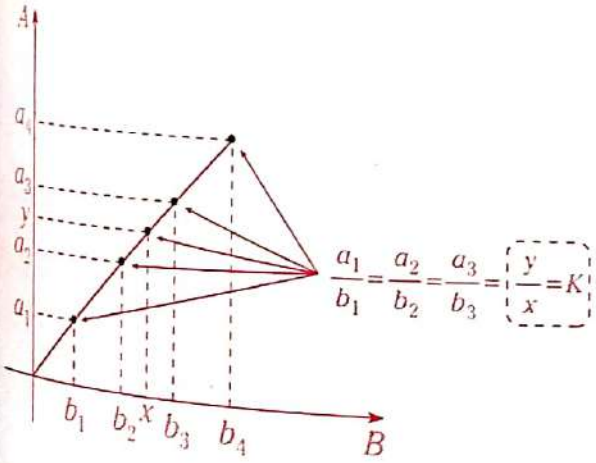
Magnitud	Cantidad
A	$a_1; a_2; a_3; ...; a_n$
B	$b_1; b_2; b_3; ...; b_n$

Entonces se cumplirá que

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2}=\frac{a_3}{b_3}=...=\frac{a_n}{b_n}=K$$

Función de proporcionalidad directa

Si graficamos los valores anteriores en el eje de coordenadas (en forma conveniente), obtendremos puntos sobre una línea recta.



Sea y el valor de la magnitud A y sea x el valor de la magnitud B; además, K es constante.

$$\frac{y}{x}=K$$

Ecuación de una recta que pasa por el origen de coordenadas.

Pero el valor y está en función de x; $y=f(x)$. Reemplazamos.

$$\frac{f(x)}{x}=K$$

Es una función que tiene el comportamiento de dos magnitudes DP.

Entonces

$$f(x)=Kx$$

Es una función de proporcionalidad directa.

Aplicación 1

La magnitud A es DP a B^2. Calcule el valor de A cuando B es 6 si se sabe que cuando A toma el valor de 25, B asume el valor de 15.

Resolución

Tenemos los siguientes datos:

Valor de A	x	25
Valor de B	6	15

Como A DP B^2, entonces

$$\frac{\text{valor de } A}{\text{valor de } B^2}=\text{constante}$$

Reemplazamos los valores de A y B.

$$\frac{x}{6^2}=\frac{25}{15^2} \rightarrow \frac{x}{36}=\frac{25}{225}$$

Obtenemos que $x=4$.

Por lo tanto, A toma el valor de 4.

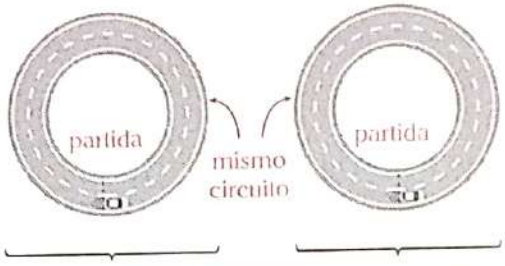
Aplicación 2

Un coche ha dado 60 vueltas en un circuito cerrado en 105 minutos. Calcule el tiempo que tardará en recorrer 40 vueltas en el mismo circuito.

Resolución

Primero debemos identificar las magnitudes que intervienen y luego buscar la relación, es decir, las magnitudes que se relacionan son el número de vueltas y el tiempo (en minutos) que tarda; al compararlos, notamos que a mayor número de vueltas, el tiempo que demora es mayor. Con esto concluimos que son DP.

Del enunciado, observamos que



N.° de vueltas	60	40
Tiempo (min)	105	x

Como

(n.° de vueltas) DP (tiempo)

$$\rightarrow \frac{\text{n.° de vueltas}}{\text{tiempo}} = \text{cte}$$

Reemplazamos los valores.

$$\frac{60}{105} = \frac{40}{x} \rightarrow x = 70$$

Por lo tanto, el tiempo que tarda es 70 minutos.

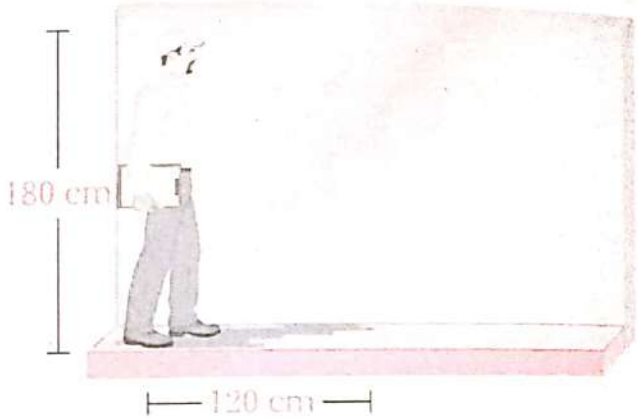
Aplicación 3

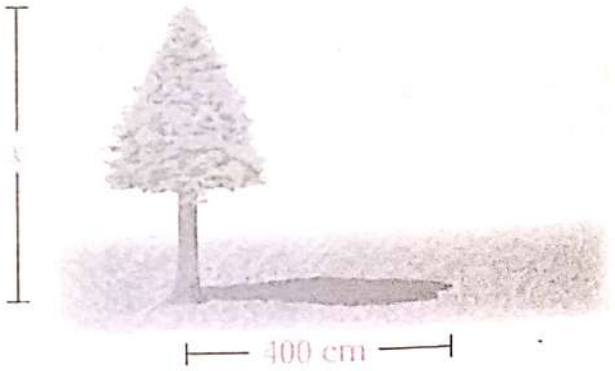
Sebastián, de 180 cm de altura, proyecta una sombra de 120 cm. ¿Qué altura tendrá un árbol que a la misma hora proyecta una sombra de 400 cm?

Resolución

En este problema se identifican dos magnitudes, que son la longitud normal y la longitud de la sombra; al compararlas decimos que si la longitud normal **es mayor**, entonces, la longitud de la sombra también **será mayor**. Con esto concluimos que la longitud normal y de la sombra son DP.

Longitud normal	180	x
Longitud de la sombra	120	400





(longitud normal) DP (longitud de sombra)

$$\frac{\text{longitud normal}}{\text{longitud de sombra}} = \text{cte.}$$

Reemplazamos.

$$\frac{180}{120} = \frac{x}{400} \rightarrow x = 600 \text{ cm}$$

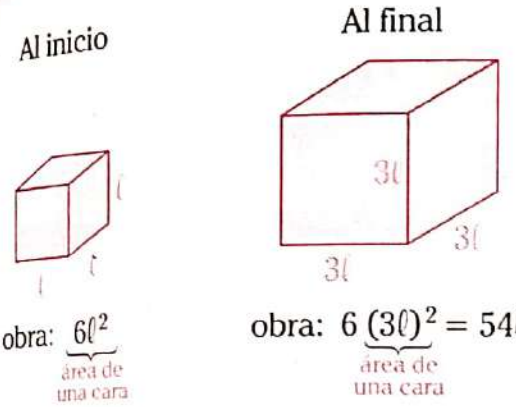
Por lo tanto, la altura del árbol es de 600 cm.

Aplicación 4

Verónica pintó las caras de un cubo en 20 minutos. Si ahora está pintando otro cubo cuya arista es el triple de la del anterior, ¿en cuánto tiempo terminará de pintar este cubo?

Resolución

Debemos tener en cuenta que al pintar las caras de un cubo tenemos que considerar el área de las caras y no la arista, entonces planteamos lo inicial y lo final.



obra: $\underbrace{6\ell^2}_{\text{área de una cara}}$ obra: $6\,\underbrace{(3\ell)^2}_{\text{área de una cara}} = 54\ell^2$

Luego tenemos lo siguiente:

Obra	$6\ell^2$	$54\ell^2$
Tiempo	20 min	x min

Se observa que al aumentar la obra, también debe aumentar el número de minutos que se demora Verónica. Entonces

(obra) DP (tiempo)

$$\rightarrow \frac{\text{obra}}{\text{tiempo}} = \text{cte.}$$

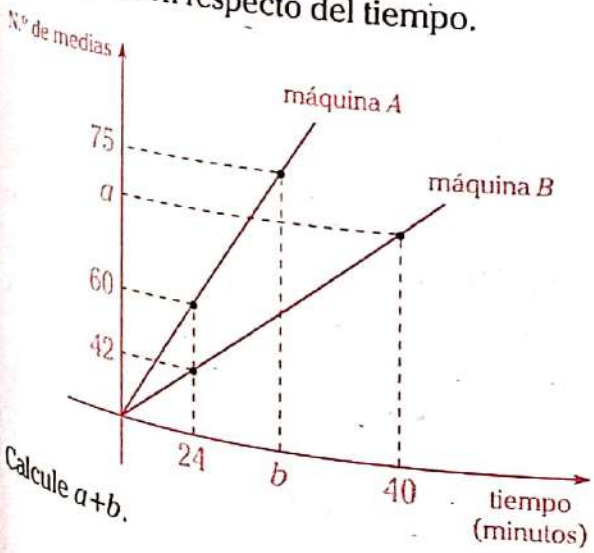
Reemplazamos.

$$\frac{6\ell^2}{20} = \frac{54\ell^2}{x} \rightarrow x = 180$$

Por lo tanto, el tiempo que ahora emplea es de 180 min, es decir, 3 horas.

Aplicación 5

A continuación se muestran las gráficas de producción de medias, para dos tipos de máquinas A y B, con respecto del tiempo.



Calcule $a+b$.

Resolución

Como se comparan el tiempo y el número de medias, y en la gráfica a mayor tiempo mayor número de medias, tenemos que

(tiempo) DP (n.° de medias)

Luego tenemos que

$$\frac{\text{tiempo}}{\text{n.° de medias}} = \text{cte.}$$

Pero debemos tener presente que hay dos gráficas.

- Para la máquina A (observe la gráfica)

  $$\frac{24}{60} = \frac{b}{75} \rightarrow b = 30$$

  Es decir, la máquina A produce 75 pares de medias en 30 minutos.

- Para la máquina B (observe la gráfica)

  $$\frac{24}{42} = \frac{40}{a} \rightarrow a = 70$$

  Es decir, la máquina B produce 70 pares de medias en 40 minutos.

$\therefore\ a+b=100$

Aplicación 6

Si $f(x)$ es una función de proporcionalidad directa y se sabe que $f(2)=3$, determine el valor de

$$E = \frac{f(3)\times f(5)}{f(7)}$$

Resolución

Como $f(x)$ es una función de proporcionalidad directa, se cumple que

$$\frac{f(x)}{x} = K$$

Así tenemos del dato $\frac{f(x)}{x} = K$, entonces $\frac{3}{2} = K$; es decir,

$$\frac{f(3)}{3} = \frac{f(5)}{5} = \frac{f(7)}{7} = \frac{3}{2}$$

De ahí se tiene que

$$\frac{f(3)}{3}=\frac{3}{2};\quad \frac{f(5)}{5}=\frac{3}{2};\quad \frac{f(7)}{7}=\frac{3}{2}$$

Luego,

$$f(3)=\frac{9}{2};\ f(5)=\frac{15}{2};\ f(7)=\frac{21}{2}$$

Reemplazamos.

$$E=\frac{\frac{9}{2}\times\frac{15}{2}}{\frac{21}{2}}=\frac{9\times15\times2}{21\times2\times2}=\frac{9\times5}{7\times2}=\frac{45}{14}$$

$$\therefore\ E=\frac{45}{14}$$

2.2. MAGNITUDES INVERSAMENTE PROPORCIONALES

Dos magnitudes son inversamente proporcionales (IP) si al aumentar o disminuir los valores de una de ellas, los valores correspondientes de la otra magnitud disminuyen o aumentan en la misma proporción.

Es decir, dos magnitudes son inversamente proporcionales si al multiplicar el valor de una de ellas por un número (racional positivo), el valor de la otra magnitud queda dividido por dicho número racional.

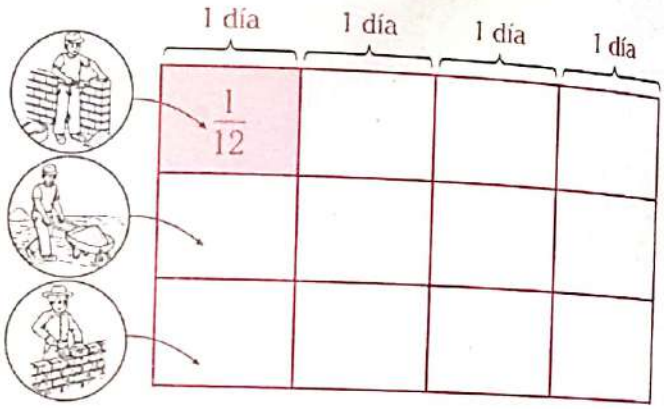
Así, cuando duplicamos el valor de uno de ellos, el otro se reduce a la mitad, o cuando triplicamos el valor de uno de ellos, el otro se reduce a su tercera parte.

Ejemplo

En una obra, tres obreros tienen igual rendimiento y estos pueden efectuarla en cuatro días. Comparemos las magnitudes.

N.° de obreros	Rendimiento	Obra	N.° de días
3	a	12	4
2	a	12	6
1	a	12	12
6	a	12	2

Gráficamente



Se observa que un obrero con rendimiento a puede hacer la doceava parte de la obra en un día, por ello es que la obra es como 12.

Luego, cada obrero hace en un día 1/12.

- Si trabajaran dos obreros, en un día realizarían juntos 1/6, con lo cual terminarían la obra en seis días.
- Si trabajara un solo obrero, todo lo haría en doce días.
- Si trabajaran seis obreros, en un día harían $\frac{6}{12}=\frac{1}{2}$, lo cual quiere decir que culminarían la obra en dos días.

Comparemos las magnitudes n.° de obreros y n.° de días, ya que son las únicas que están variando.

N.° de obreros	3	2	1	6
N.° de días	4	6	12	2

÷2 ×6

÷2 ×6

Cuando el valor de la magnitud n.° de obreros se reduce a la mitad, el valor de la magnitud n.° de días se duplica; además, si el valor de la magnitud n.° de obreros se sextuplica, el valor n.° de días queda reducido a su sexta parte. Se observa que el comportamiento de los valores es inverso, esto nos lleva a señalar que las magnitudes n.° de obreros y n.° de días son inversamente proporcionales, lo cual significa lo siguiente:

(n.° de obreros) IP (n.° de días)

Veamos los valores correspondientes de ambas magnitudes

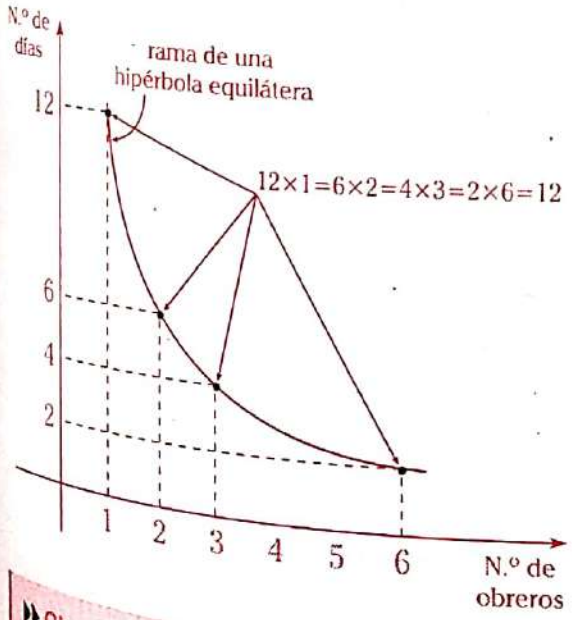
$$(3)(4)=(2)(6)=(1)(12)=(6)(2)$$

De esta manera, se puede afirmar que el producto de valores correspondientes del número de obreros y número de días es constante, con lo cual

$$\begin{pmatrix}\text{valor del}\\ \text{n.º de obreros}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\text{valor del}\\ \text{n.º de días}\end{pmatrix}=\text{constante}$$

2.2.1. Gráfica de dos magnitudes inversamente proporcionales

En el ejemplo anterior también notamos que se pueden representar los valores correspondientes de las dos magnitudes en el sistema de coordenadas rectangulares; para esto hacemos que en el eje x se ubique el número de obreros y que en el eje y se ubique el número de días, y procedemos a realizar la gráfica.



Observación

Cada sector rectangular que se genera al trazar perpendiculares a los ejes desde un punto que pertenece a esta hipérbola (área de cada rectángulo) siempre es el mismo; en este problema en particular, esta región representa la obra realizada.

En general, si C y D son dos magnitudes inversamente proporcionales, se debe cumplir que el producto de sus valores correspondientes es constante. Es decir:

$$C \text{ IP } D \leftrightarrow (\text{valor de } C)(\text{valor de } D)=\text{cte.}$$

Además, tenemos

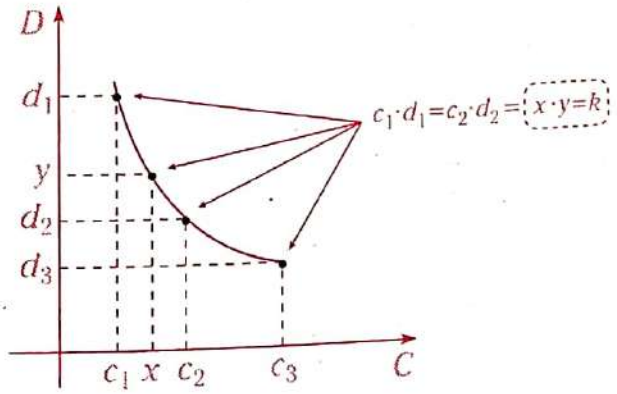
Magnitud	Cantidad
C	$c_1; c_2; c_3; ...; c_n$
D	$d_1; d_2; d_3; ...; d_n$

Entonces se cumplirá que

$$c_1 \times d_1 = c_2 \times d_2 = ... = c_n \times d_n = K$$

Función de proporcionalidad inversa

Si graficamos los valores anteriores en el eje de coordenadas (en forma conveniente), obtendremos puntos sobre la rama de una hipérbola equilátera.



Si x es el valor de la magnitud C, y es el valor de la magnitud D, además, K es la constante, se tiene

$$xy=K$$ Ecuación de la hipérbola equilátera

Pero como y está en función de x: $y=f(x)$, tenemos que

$$\boxed{xf(x)=K}$$

Es una función que tiene el comportamiento de dos magnitudes IP.

Entonces

$$\boxed{f(x)=\frac{K}{x}}$$

Función de proporcionalidad inversa

Aplicación 7

La magnitud A es IP a $\sqrt{B}$. Si cuando el valor de B es 12, el valor de A es 60. Determine el valor de A cuando el valor de B es 75.

Resolución

Del enunciado tenemos que

Valor de A	60	x
Valor de B	12	75

Como A IP $\sqrt{B}$, entonces

(valor de A)$\times$(valor de $\sqrt{B}$)=cte.

Reemplazamos los valores de A y B.

$60\times\sqrt{12}=x\sqrt{75}$

$60\times 2\sqrt{3}=x\,5\sqrt{3}$

$\rightarrow\ x=24$

Por lo tanto, A toma el valor de 24.

Aplicación 8

Un barco lleva víveres para alimentar durante 42 días a una tripulación formada por 40 personas. Si antes de partir acogen a 20 personas más de un barco averiado, ¿cuántos días durarán los víveres?

Resolución

Debemos identificar las magnitudes que se relacionan, que son tripulación (n.° de personas) y el tiempo que duran los víveres (n.° de días); al compararlas notamos que si la tripulación **aumenta**, entonces, el tiempo que durará los víveres **disminuye**. Con esto concluimos que el n.° de personas y el n.° de días son IP.

Del enunciado del problema tenemos lo siguiente:

aumenta en 20

N.° de personas	40	60
N.° de días	42	x

Luego,

(n.° de personas) IP (n.° de días)

$\rightarrow$ (n.° de personas)$\times$(n.° de días)=cte.

Reemplazamos.

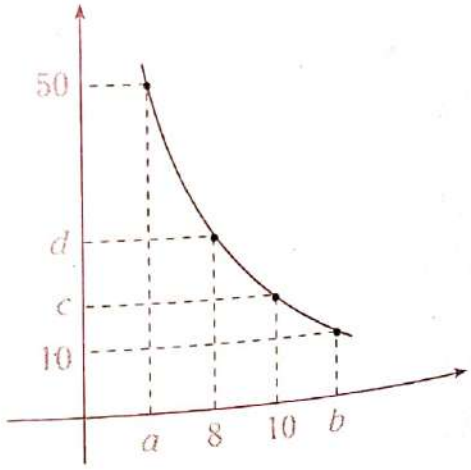
$40\times 42=60\cdot x$

$28=x$

Por lo tanto, el número de días que duran los víveres es 28 días.

Aplicación 9

Dado el siguiente gráfico, halle $a+b+c+d$. Considere que $\{a;b;c;d\}\subset\mathbb{Z}^+$.



Resolución

La gráfica nos muestra una rama de una hipérbola equilátera, la cual representa 2 magnitudes IP; entonces se cumple que (*)

$50\times a=d\times 8=c\times 10=10\times b$

Observe en la gráfica lo siguiente:

- $10<c<d<50$
- $a<8<10<b$

De (*) tenemos

$$c=b \ \wedge \ 50\times a=d\times 8$$

Entonces

$$\frac{a}{d}=\frac{4}{25}$$

De ahí, como $a<8 \ \wedge \ d<50$

se deduce que $a=4 \ \wedge \ d=25$

Reemplazando en

$$50\times a=c\times 10$$

obtenemos que

$$50\times 4=c\times 10$$

$$200=10c$$

$$c=20$$

En resumen,

$$a=4;\ b=20;\ c=20;\ d=25$$

$$\therefore\ a+b+c+d=69$$

Aplicación 10

Halle

$$E=f(25)\times f\left(\frac{3}{5}\right)+f(12)$$

si f es una función de proporcionalidad inversa de constante entera y positiva, además

$$f\left(\frac{12}{5}\right)\times f\left(\frac{20}{3}\right)=1$$

Resolución

Como f es una función de proporcionalidad inversa, se cumple que

$$f(x)\cdot x=K$$

Es decir,

$$f(x)=\frac{K}{x}$$

Del dato, hallaremos K.

$$\underbrace{f\left(\frac{12}{5}\right)}\times \underbrace{f\left(\frac{20}{3}\right)}=1$$

$$\frac{K}{12}\times 5\times \frac{K}{20}\times 3=1$$

$$\frac{K^2}{4^2}=1$$

Entonces $K=4$

Ahora hallemos $f(25)$; $f\left(\frac{3}{5}\right)$ y $f(12)$.

- $f(25)=\frac{4}{25}$
- $f\left(\frac{3}{5}\right)=\frac{4}{\frac{3}{5}}=\frac{20}{3}$
- $f(12)=\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$

Reemplazamos en E.

$$E=f(25)\times f\left(\frac{3}{5}\right)+f(12)$$

$$E=\frac{4}{25}\times\frac{20}{3}+\frac{1}{3}$$

$$E=\frac{16}{15}+\frac{1}{3}$$

$$\therefore\ E=\frac{21}{15}=\frac{7}{5}$$

Aplicación 11

Sean M y N dos magnitudes que guardan cierta relación de proporcionalidad. Si sus valores correspondientes se observan en la tabla mostrada, halle $a+b$.

M	8	a	24	48	16
N	36	144	4	b	9

Resolución

Para resolver el problema debemos buscar la relación con los valores de M y N conocidos.

$\div\left(\frac{3}{2}\right)$ disminuye

M	...	24	...	16
N	...	4	...	9

aumenta $\times\left(\frac{9}{4}\right)=\left(\frac{3}{2}\right)^2$

Se observa que M disminuye y N aumenta. Ahora busquemos que sea en la misma proporción. Es decir,

$$M \text{ IP } \sqrt{N}$$

Luego,

$$M \times \sqrt{N} = \text{cte.}$$

Entonces reemplazamos sus valores.

$$8 \times \sqrt{36} = a \times \sqrt{144} \rightarrow a = 4$$

$$8 \times \sqrt{36} = 48 \times \sqrt{b} \rightarrow b = 1$$

$$\therefore \quad a+b=5$$

Otra forma

Trabajamos con la tabla y sus datos.

$\div 2$ $\times 2$ $\div\left(\frac{3}{2}\right)$

M	8	$a=4$	24	48	16
N	36	144	4	$b=1$	9

$\times(2)^2$ $\div(2)^2$ $\times\left(\frac{3}{2}\right)^2$

$$\therefore \quad a+b=5$$

Aplicación 12

Se tienen dos magnitudes A y B, además

- Si $A \leq 12$, se cumple que A DP B.
- Si $12 \leq A \leq 32$, se cumple que A IP B.
- Si $32 \leq A$, se cumple que A IP B^2.

Calcule B cuando $A=72$ si cuando $A=3$, $B=10$.

Resolución

Tenemos los siguientes datos:

A DP B A IP B^2

A	3	12	32	72
B	10	b_1	b_2	x

A IP B

Además, A DP B, $A \leq 12$

Hallemos el valor de B para $A=12$, ya que con ello podemos trabajar en la segunda relación.

$$\frac{3}{10}=\frac{12}{b_1}$$

De ahí

$$3b_1=120 \rightarrow b_1=40$$

En la segunda relación, para $12 \leq A \leq 32$, tenemos que

A	12	32
B	40	b_2

A IP B

Hallemos el valor de B cuando A sea 32, ya que ello nos permitirá trabajar con la siguiente relación:

$$12 \times 40 = 32 \times b_2$$

Así

$$480=32b_2 \rightarrow b_2=15$$

Finalmente, en la última relación para $A \geq 32$ es cuando encontramos que $A=72$.

Tenemos

A	32	72
B	15	x

A IP B^2

Entonces

$$32(15)^2=72x^2$$

$$32 \times 225=72x^2$$

$$4 \times 25=x^2$$

$$100=x^2$$

$$\therefore \quad x=10$$

3› PROPIEDADES DE LAS MAGNITUDES PROPORCIONALES

Propiedad 1

Sean las magnitudes A, B, M y N, se cumple que

I. $A \text{ DP } B \leftrightarrow B \text{ DP } A$

II. $M \text{ IP } N \leftrightarrow N \text{ IP } M$

Demostración

I. $A \text{ DP } B \leftrightarrow \dfrac{\text{valor de } A}{\text{valor de } B}=K \text{ (cte.)}$

Si se invierte la relación, tenemos que

$$\frac{\text{valor de } B}{\text{valor de } A}=\frac{1}{K}=K' \text{ (cte.)}$$

Esto significa que $B \text{ DP } A$

$\therefore A \text{ DP } B \leftrightarrow B \text{ DP } A$

II. $M \text{ IP } N \leftrightarrow (\text{valor de } M)\times(\text{valor de } N)=K \text{ (cte.)}$

Si multiplicamos los valores, obtenemos un producto, el cual será el mismo si cambiamos el orden de los valores; es decir,

$$(\text{valor de } N)\times(\text{valor de } M)=K$$

Esto significa que $N \text{ IP } M$.

$\therefore M \text{ IP } N \leftrightarrow N \text{ IP } M$

Propiedad 2

Sean las magnitudes A, B, M y N, se cumple que

I. $A \text{ DP } B \leftrightarrow A^n \text{ DP } B^n;\ n \in \mathbb{Q} \text{ y } n \neq 0$

II. $M \text{ IP } N \leftrightarrow M^p \text{ DP } N^p;\ p \in \mathbb{Q} \text{ y } p \neq 0$

Demostración

I. $A \text{ DP } B \leftrightarrow \dfrac{\text{valor de } A}{\text{valor de } B}=K=\text{(cte.)}$

Ahora, si elevamos ambos miembros a la n, tendremos

$$\frac{(\text{valor de } A)^n}{(\text{valor de } B)^n}=K^n=K';\quad n \in \mathbb{Q};\ n \neq 0$$

Notamos una nueva constante K' y la proporcionalidad directa sigue existiendo.

Esto significa que $A^n \text{ DP } B^n$

$\therefore A \text{ DP } B \leftrightarrow A^n \text{ DP } B^n$

II. $M \text{ IP } N \leftrightarrow (\text{valor de } M)\times(\text{valor de } N)=K \text{ (cte.)}$

Análogamente, si elevamos ambos miembros a la P, tendremos

$$(\text{valor de } M)^p\times(\text{valor de } N)^p=K^p=K'$$

Notamos una nueva constante K' y la proporcionalidad inversa sigue existiendo.

Esto significa que $M^p \text{ IP } N^p$.

$\therefore M \text{ IP } N \leftrightarrow M^p \text{ IP } N^p$

Propiedad 3

Sean las magnitudes A, B, M y N, se cumple que

I. $A \text{ DP } B \leftrightarrow A \text{ IP } \dfrac{1}{B}$

II. $A \text{ IP } B \leftrightarrow A \text{ DP } \dfrac{1}{B}$

Demostración

I. $A \text{ DP } B \leftrightarrow \dfrac{\text{valor de } A}{\text{valor de } B}=K \text{ (cte.)}$

Ahora, la división entre los valores de las magnitudes A y B se puede expresar como una multiplicación.

$$(\text{valor de } A)\times\left(\frac{1}{\text{valor de } B}\right)=K$$

$$\rightarrow (\text{valor de } A)\times\left(\text{valor de } \frac{1}{B}\right)=K$$

Sabemos por proporcionalidad inversa que ello se cumple si y solo si

$$A \text{ IP } \frac{1}{B}$$

$$\therefore A \text{ DP } B \leftrightarrow A \text{ IP } \left(\frac{1}{B}\right)$$

II. $A \text{ IP } B \leftrightarrow (\text{valor de } A)\times(\text{valor de } B)=K\,(\text{cte.})$

A esa multiplicación la podemos expresar en una división

$$\frac{(\text{valor de } A)}{\dfrac{1}{(\text{valor de } B)}}=K \rightarrow \frac{\text{valor de } A}{\text{valor de}\left(\dfrac{1}{B}\right)}=K$$

Sabemos por proporcionalidad directa que ello se cumple si y solo si

$$A \text{ DP } \frac{1}{B}$$

$$\therefore\ A \text{ IP } B \leftrightarrow A \text{ DP } \left(\frac{1}{B}\right)$$

Propiedad 4

Dado un grupo de magnitudes, A, B, C, D y E, que guardan una relación de proporcionalidad, determinaremos la relación existente entre ellas 2 a 2, tomando a una como referencia. Por ejemplo, tomaremos como referencia a la magnitud A y luego resultará lo siguiente:

- A DP B, mientras que las demás (C, D y E) se mantienen constantes.
- A IP C, mientras que las demás (B, D y E) se mantienen constantes.
- A DP D, mientras que las demás (B, C y E) se mantienen constantes.
- A IP E, mientras que las demás (B, C y D) se mantienen constantes.

Entonces, diremos que la relación final será

$$\frac{(\text{valor de } A)(\text{valor de } C)(\text{valor de } E)}{(\text{valor de } B)(\text{valor de } D)}=\text{cte.}$$

Demostración

Veamos a continuación, solamente con tres magnitudes: A, B y C. Aquí tomaremos como referencia a la magnitud A y diremos que se cumple la siguiente tabla de valores:

A	a_1	a_2	a_3
B	b_1	b_2	b_2
C	c_1	c_1	c_2

También consideremos que

A DP B (cuando C constante)

A DP C (cuando B constante)

Por lo general, no será necesario anotar al costado de una comparación que el resto de magnitudes es constante; se entiende que al comparar un par de magnitudes las demás permanecen constantes.

Entonces, viendo la tabla diremos que la magnitud B, en un instante, se mantiene constante con el valor b_2.

A	a_2	a_3
B	$\boxed{b_2}$	$\boxed{b_2}$
C	c_1	c_2

Como A DP C

$$\frac{a_2}{c_1}=\frac{a_3}{c_2} \qquad \text{(I)}$$

De ahí, $a_2c_2=c_1a_3$

Del mismo modo, la magnitud C, en un instante, se mantiene constante con el valor c_1.

A	a_1	a_2
B	b_1	b_2
C	$\boxed{c_2}$	$\boxed{c_2}$

Como A DP B

$$\frac{a_1}{b_1}=\frac{a_2}{b_2} \qquad \text{(II)}$$

Entonces $a_1b_2=a_2b_1$

De (I) y (II), multiplicando cada miembro de (I) por b_1, y cada miembro de (II) por c_2, se tiene lo siguiente:

- $b_1 \times a_2 c_2 = c_1 a_3 \times b_1$
- $c_2 \times a_1 b_2 = a_2 b_1 \times c_2$

Luego, diremos que

$$c_2 \times a_1 \times b_2 = c_1 \times a_3 \times b_1$$

$$\frac{a_1}{b_1 \times c_1} = \frac{a_3}{b_2 \times c_2}$$

Viendo la tabla concluimos que

$$\frac{(\text{valor de } A)}{(\text{valor de } B)\times(\text{valor de } C)} = \text{cte.}$$

Aplicación 13

Sean A, B y C magnitudes que guardan la siguiente relación de proporcionalidad.

- C IP B (cuando A es constante)
- A DP $\sqrt{C}$ (cuando B es constante)

Calcule el valor de $x+y$, si se sabe lo siguiente:

Magnitudes	Cantidades		
A	8	x	8
B	3	3	6
C	32	18	y

Resolución

Sabemos que

- C IP B (A=cte.) $\leftrightarrow$ C IP B (A=cte.)
- A DP $\sqrt{C}$ (B=cte.) $\leftrightarrow$ $\underbrace{C \text{ DP } A^2 \ (B=\text{cte.})}$

$$\frac{C \times B}{A^2} = \text{cte.}$$

Reemplazamos los valores de la tabla.

$$\overbrace{\underbrace{\frac{32\cdot 3}{8^2} = \frac{18\cdot 3}{x^2}}_{(I)} = \frac{y\cdot 6}{8^2}}^{(II)}$$

Resolvemos (I).

$$\frac{32\cdot 3}{8^2} = \frac{18\cdot 3}{x^2} \rightarrow x = 6$$

Resolvemos (II).

$$\frac{32\cdot 3}{8^2} = \frac{y\cdot 6}{8^2} \rightarrow y = 16$$

$$\therefore \ x+y = 6+16 = 22$$

Aplicación 14

Sean A, B y C magnitudes que guardan cierta relación de proporcionalidad.

A	2	8	40	50	20	10	30
B	4	8	8	20	8	16	y
C	5	5	1	5	2	x	3

Calcule $x+y$.

Resolución

Cuando tengamos más de dos magnitudes, tomaremos a una como referencia y relacionaremos 2 a 2. Dado que existen tres magnitudes, al tomar dos magnitudes, la otra magnitud debe permanecer constante necesariamente.

Ahora nos fijaremos qué magnitudes, en algunos momentos, se mantienen constantes en la tabla (estas son las magnitudes B y C).

- Cuando B=8

A	8	40	20
B	$\boxed{8}$	$\boxed{8}$	$\boxed{8}$
C	5	1	2

Además, se observa que

$$8\times 5 = 40\times 1 = 20\times 2$$

De ahí, A IP C (cuando B no varía)

- Cuando $C=5$

A	2	8	50
B	4	8	20
C	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$	$\boxed{5}$

A	2	8	50
B	4	8	20

×4 ×25 ×2 ×5

Del cuadro se observa que

$$\frac{2}{4^2}=\frac{8}{8^2}=\frac{50}{20^2}$$

De ahí tenemos que

A DP B^2 (cuando C no varía)

Entonces tenemos lo siguiente:

- A IP C (cuando B es constante)
- A DP B^2 (cuando C es constante)

Por propiedad sabemos que

$$\frac{A\times C}{B^2}=\text{cte.}$$

Reemplazaremos los valores donde se encuentran las incógnitas.

$$\frac{2\times 5}{4^2}=\frac{10x}{16^2}=\frac{30\times 3}{y^2}$$

Luego,

$$\frac{2\cdot 5}{4^2}=\frac{10\cdot x}{16^2} \rightarrow x=16$$

$$\frac{2\cdot 5}{4^2}=\frac{30\cdot 3}{y^2} \rightarrow y=12$$

$\therefore\ x+y=28$

4 ▸ APLICACIONES DE LAS MAGNITUDES

4.1. REPARTO PROPORCIONAL

Procedimiento que consiste en repartir una determinada cantidad de manera DP o IP a ciertos números denominados índices o números repartidores. Veamos algunas aplicaciones:

Aplicación 15

Reparta S/6670 DP a 6; 8 y 9.

Resolución

Se sabe que (parte) DP (índice)

$$\rightarrow \frac{\text{(parte)}}{\text{(índice)}}=\text{cte.}$$

Supongamos que P_1, P_2 y P_3 son cada una de las partes, luego tendremos

$$\frac{P_1}{6}=\frac{P_2}{8}=\frac{P_3}{9}=K \ (K \text{ es constante})$$

$\rightarrow P_1=6K;\ P_2=8K;\ P_3=9K$

Además,

$$P_1+P_2+P_3=6670$$
$$6K+8K+9K=6670$$
$$23K=6670$$
$$K=290$$

$\therefore\ P_1=\text{S/}1740;\ P_2=\text{S/}2320;\ P_3=\text{S/}2610$

Otra forma

Como tenemos que

$$\frac{P_1}{6}=\frac{P_2}{8}=\frac{P_3}{9}$$

se puede utilizar algunas propiedades de las SRGE.

$$\frac{P_1}{6}=\frac{P_2}{8}=\frac{P_3}{9}=\frac{P_1+P_2+P_3}{23}=\frac{6670}{29}=290$$

Por lo tanto,

P_1=S/1740; P_2=S/2320; P_3=S/2610

Es conveniente utilizar esta forma porque evitamos utilizar alguna variable.

Aplicación 16

Reparta S/6670 IP a 6; 8 y 9.

Resolución

Se sabe que

(parte) IP (índice)

→ (parte)×(índice)=cte.

Supongamos que P_1, P_2 y P_3 son cada una de las partes, tendremos lo siguiente:

$$6\times P_1=8\times P_2=9\times P_3$$

Luego,

$$\frac{6\times P_1}{6\times 8\times 9}=\frac{8\times P_2}{6\times 8\times 9}=\frac{9\times P_3}{6\times 8\times 9}$$

$$\frac{P_1}{8\times 9}=\frac{P_2}{6\times 9}=\frac{P_3}{6\times 8}$$

$$\frac{P_1}{12}=\frac{P_2}{9}=\frac{P_3}{8}$$

$$\frac{P_1}{12}=\frac{P_2}{9}=\frac{P_3}{8}=\frac{P_1+P_2+P_3}{29}=\frac{6670}{29}=230$$

$\therefore$ P_1=S/2760; P_2=S/2070; P_3=S/1840

Otra forma

Como tenemos que

(parte) IP (índice) → (parte) DP $\frac{1}{\text{(índice)}}$

$$\frac{\text{(parte)}}{\frac{1}{\text{(índice)}}}=\text{cte.}$$

Luego,

$$\frac{P_1}{\frac{1}{6}}=\frac{P_2}{\frac{1}{8}}=\frac{P_3}{\frac{1}{9}}$$

A estas fracciones las podemos multiplicar por MCM(6; 8; 9)=72.

$$\frac{P_1}{\frac{1}{6}\times(72)}=\frac{P_2}{\frac{1}{8}\times(72)}=\frac{P_3}{\frac{1}{9}\times(72)}$$

$$\frac{P_1}{12}=\frac{P_2}{9}=\frac{P_3}{8}$$

Por propiedad de razones tenemos que

$$\frac{P_1}{12}=\frac{P_2}{9}=\frac{P_3}{8}=\frac{P_1+P_2+P_3}{29}=\frac{6670}{23}=230$$

De ahí

$P_1=12\times 230$

$P_2=9\times 230$

$P_3=8\times 230$

Finalmente obtenemos

P_1=S/2760; P_2=S/2070; P_3=S/1840

Observación

En las dos aplicaciones anteriores, al repartirse la misma cantidad de dinero (DP e IP) se observa que no resultan ser las mismas partes.

Aplicación 17

Un padre reparte un dinero a sus tres hijos, directamente proporcional a la edad que tienen e inversamente proporcional al peso de cada uno de ellos. Si el dinero que va a repartir es S/840, las edades son 12; 15 y 18, y los pesos respectivos son 40; 45 y 60 kg, halle la mayor cantidad recibida.

Resolución

Por dato tenemos

(reparto) DP (edad)

(reparto) IP (peso)

Por propiedad

$$\frac{\text{(reparto)}\times\text{(peso)}}{\text{(edad)}}=\text{cte.}$$

A partir del dato tenemos lo siguiente:

Edad	Peso	Cantidad a recibir
12	40	R_1
15	45	R_2
18	60	R_3

$$\frac{R_1\times 40}{12}=\frac{R_2\times 45}{15}=\frac{R_3\times 60}{18}$$

$$\frac{R_1\times 10}{3}=\frac{R_2\times 3}{1}=\frac{R_3\times 10}{3}$$

$$\frac{R_1\times 10}{3\times 30}=\frac{R_2\times 3}{1\times 30}=\frac{R_3\times 10}{3\times 30}$$

$$\frac{R_1\times 10}{90}=\frac{R_2\times 3}{30}=\frac{R_3\times 10}{90}$$

Simplificamos.

sumamos antecedentes

$$\frac{R_1}{9}=\frac{R_2}{10}=\frac{R_3}{9}=\frac{S/840}{28}=S/30$$

sumamos consecuentes

$\therefore\ R_2=10(30)=S/300$

Aplicación 18

Tres personas deciden repartirse cierta cantidad de dinero en forma directamente proporcional a sus edades: 20; 25 y 30 años, pero luego cambian de opinión y hacen el reparto directamente proporcional a sus estaturas, que son 1,2; 1,6 y 2 m, respectivamente. Si ahora el primero recibe S/32 menos, calcule dicha cantidad de dinero y dé como respuesta la suma de sus cifras.

Resolución

Sea el reparto

- $\frac{P_1}{20}=\frac{P_2}{25}=\frac{P_3}{30}\ \rightarrow\ \frac{P_1}{4}=\frac{P_2}{5}=\frac{P_3}{6}$
- $\frac{P_1'}{12}=\frac{P_2'}{16}=\frac{P_3'}{20}\ \rightarrow\ \frac{P_1'}{3}=\frac{P_2'}{4}=\frac{P_3'}{5}$

Se observa que

$$P_1+P_2+P_3=P_1'+P_2'+P_3'$$

$$15\times\underbrace{\square}_{4n}=12\times\underbrace{\square}_{5n}$$

Reemplazamos en lo anterior.

- $\frac{P_1}{4(4n)}=\frac{P_2}{5(4n)}=\frac{P_3}{6(4n)}$
- $\frac{P_1'}{3\times(5n)}=\frac{P_2'}{4\times(5n)}=\frac{P_3'}{5\times(5n)}$

Dato: $P_1'-P_1=32\ \rightarrow\ n=32$

Luego,

cantidad total$=60(32)=S/1920$

Por lo tanto, la suma de cifras es igual a 12.

Aplicación 19

Una herencia consta de dos partes que deben repartirse proporcionalmente a las edades de tres hermanos. Se reparte la primera parte y se observa que a los dos mayores les corresponden S/300 y S/240, respectivamente. Se reparte la segunda parte y a los dos menores les corresponden S/360 y S/240. ¿A cuánto asciende la herencia total?

Resolución

Sean las edades a, b y c, tales que $a>b>c$.

- Al repartir la primera parte de la herencia (S/P)

$$\frac{300}{a}=\frac{240}{b}\ \rightarrow\ \frac{a}{5}=\frac{b}{4}$$

- Al repartir la segunda parte de la herencia (S/Q)

$$\frac{360}{b}=\frac{240}{c} \rightarrow \frac{b}{3}=\frac{c}{2}$$

Entonces

$$\frac{a}{15}=\frac{b}{12}=\frac{c}{8}$$

En el segundo reparto, al mayor le tocó S/450.

$Q=450+360+240=1050$

En el primer reparto, al menor le tocó S/160.

$P=300+240+160=700$

Por lo tanto, la herencia total sería

$P+Q=$S/1750

Aplicación 20

Se reparte una gratificación de S/5850 entre tres secretarias, en forma proporcional al número de hojas tipeadas, y en forma inversamente proporcional al número de minutos de tardanza acumulados en un mes, de acuerdo con la información del siguiente cuadro:

Secretaria	N.° de hojas tipeadas	N.° de minutos de tardanza
A	180	60
B	240	150
C	200	160

Calcule la diferencia entre las gratificaciones obtenidas por la más y por la menos beneficiada.

Resolución

Se sabe que

(gratificación) DP (n.° de hojas)

(gratificación) IP (n.° de minutos de tardanza)

Luego,

$$\frac{(\text{gratificación})\times(\text{n.° de minutos})}{(\text{n.° de hojas})}=\text{cte.}$$

$$\frac{g_A\times 60}{180}=\frac{g_B\times 150}{240}=\frac{g_C\times 160}{200}$$

$$\frac{g_A}{3}=\frac{g_B\times 5}{8}=\frac{g_C\times 4}{5}$$

$$\frac{g_A}{60}\overset{(+)}{=}\frac{g_B}{32}\underset{(+)}{=}\frac{g_C}{25}=\frac{5850}{117}=50$$

Se observa lo siguiente:

- $\frac{g_A}{60}=50 \rightarrow g_A=50\times 60=3000$
- $\frac{g_B}{32}=50 \rightarrow g_B=50\times 32=1600$
- $\frac{g_C}{25}=50 \rightarrow g_C=50\times 25=1250$

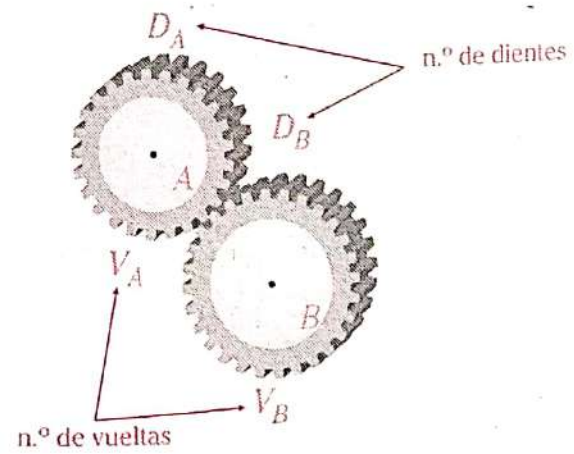
Por lo tanto,

S/3000 − S/1250 = S/1750

4.2. SISTEMAS DE ENGRANAJE

En un sistema de engranaje, por lo general, analizamos las ruedas dentadas y su relación con su número de vueltas. Para lo cual planteamos diversos casos.

4.2.1. Ruedas engranadas



Luego se cumple lo siguiente:

- A mayor número de dientes, menor número de vueltas.
- A menor número de dientes, mayor numero de vueltas.

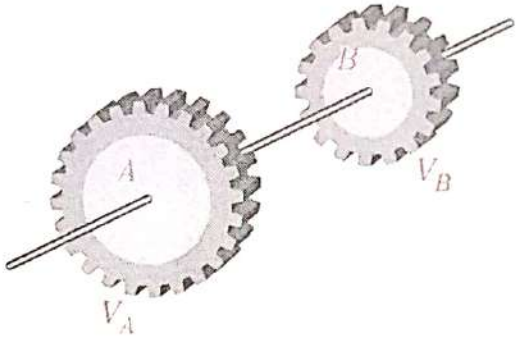
Además se cumple que

(n.º de dientes) IP (n.º de vueltas)

Es decir,

$$D_A \times V_A = D_B \times V_B$$

4.2.2. Ruedas unidas mediante un eje común



Se cumple que

(n.º de vueltas A)=(n.º de vueltas de B)

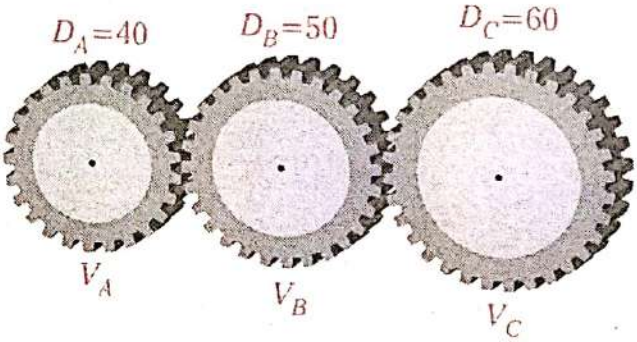
Esta igualdad no depende del número de dientes que tengan las ruedas.

Aplicación 21

Se tienen tres ruedas engranadas de 40; 50 y 60 dientes. Si en cierto momento han dado 740 vueltas en total, ¿cuántas vueltas ha dado la rueda de mayor cantidad de dientes?

Resolución

Del enunciado, tenemos



Como (n.º de vueltas) IP (n.º de dientes)

$\rightarrow \; V_A=40=V_B\times 50=V_C\times 60$

Luego,

$$\frac{V_A\times 4}{60}=\frac{V_B\times 5}{60}=\frac{V_C\times 6}{60}$$

$$\frac{V_A}{15}=\frac{V_B}{12}=\frac{V_C}{10}$$

$$\frac{V_A}{15}=\frac{V_B}{12}=\frac{V_C}{10}=\frac{\overbrace{V_A+V_B+V_C}^{740}}{\underbrace{15+12+10}_{37}}=\frac{740}{37}=20$$

Entonces

$V_A=15(20)=300$

$V_B=12(20)=240$

$V_C=10(20)=200$

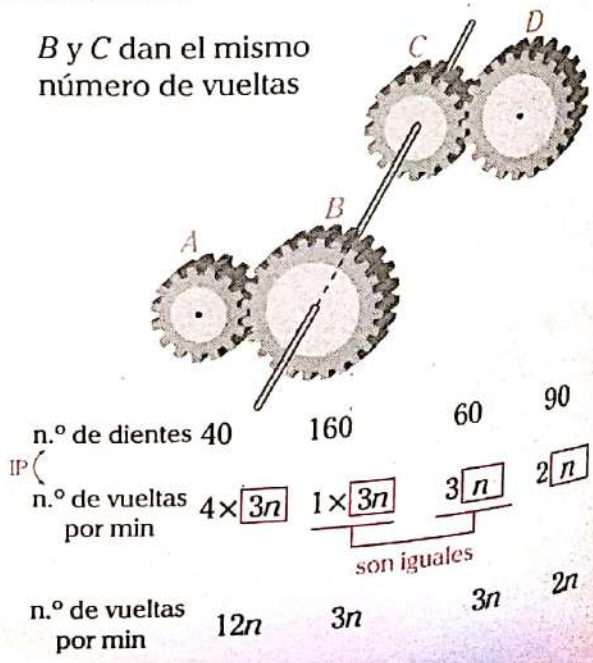
Por lo tanto, la rueda con mayor cantidad de dientes da 200 vueltas.

Aplicación 22

Las ruedas A, B, C y D tienen 40; 160; 60 y 90 dientes, respectivamente. A y B están engranadas, B y C están sujetas al mismo eje, además, C y D están engranadas. Si A da 120 rpm, ¿en qué tiempo D dará 120 vueltas?

Resolución

Gráficamente



Por dato, si en 1 minuto la rueda A da 120 vueltas, entonces

$$12n=120$$

$$n=10$$

Como la rueda D da $2n$ vueltas en un minuto, entonces

$$2n=20 \text{ vueltas}$$

Luego, en 1 minuto la rueda D da 20 vueltas.

Por lo tanto, para que D gire 120 vueltas tendrán que pasar

$$\frac{120}{20}=6 \text{ min}$$

4.3. REGLA DE COMPAÑÍA

Una compañía es un conjunto de personas organizadas con fines lucrativos y bajo una razón social. Las personas que la conforman se denominan socios de la compañía.

Para formar la compañía, o durante su ejercicio, los socios aportan capitales, que pueden ser en dinero, en bienes (máquinas, muebles, enseres, etc.) o servicios.

Cada cierto periodo comercial (generalmente anual), la compañía obtiene una utilidad o beneficio (aunque también puede producirse pérdidas), el cual es repartido entre los socios de la compañía, de manera proporcional a los capitales aportados y a los tiempos que han permanecido estos capitales en la compañía.

Relacionando las magnitudes que intervienen, se tiene lo siguiente:

- (ganancia) DP (capital) (tiempo es constante)
- (ganancia) DP (tiempo) (capital es constante)

Entonces

$$\boxed{\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=K}$$

donde K es una constante

Aplicación 23

Tres amigos se asociaron y formaron una empresa. El primero aportó S/60 000 soles durante 6 meses; el segundo, S/30 000 soles durante 8 meses; y el tercero, S/90 000 soles durante 12 meses. Si obtuvieron una ganancia total de S/70 000 soles, ¿cuánto le correspondió al tercero?

Resolución

Se cuenta con las siguientes cantidades:

	Capital	Tiempo	Ganancia
1.er socio	60000	6	G_1
2.° socio	30000	8	G_2
3.er socio	90000	12	G_3

Se sabe que

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=K$$

Reemplazamos valores.

$$\frac{G_1}{60\,000\times6}=\frac{G_2}{30000\times8}=\frac{G_3}{90\,000\times12}$$

Simplificamos.

$$\frac{G_1}{3}=\frac{G_2}{2}=\frac{G_3}{9}$$

Luego,

$$\frac{G_1}{3}=\frac{G_2}{2}=\frac{G_3}{9}=\frac{G_1+G_2+G_3}{3+2+9}$$

Por dato tenemos que

$$G_1+G_2+G_3=\text{S/}70\,000$$

$$\frac{G_1}{3}=\frac{G_2}{2}=\frac{G_3}{9}=\frac{\text{S/}70\,000}{14}=\text{S/}5000$$

$$G_3=9(\text{S/}5000)$$

$$\therefore\ G_3=\text{S/}45\,000$$

Aplicación 24

Carmen, Óscar y César obtienen S/7400 de utilidad luego de haber trabajado en una empresa que formaron aportando S/2000, S/4500 y S/5000; además, permanecieron en el negocio 2 años, 4 años y t años, respectivamente. Halle t si se sabe que la diferencia de las ganancias de Carmen y Óscar es S/2800.

Resolución

De los datos se tiene lo siguiente:

	Capital	Tiempo	Ganancia
Carmen	2000	2	G_1
Óscar	4500	4	G_2
César	5000	t	G_3

Además, se considera la relación

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=K$$

Reemplazamos valores.

$$\frac{G_1}{2000\times 2}=\frac{G_2}{4500\times 4}=\frac{G_3}{5000\times t}$$

Luego de simplificar, operamos.

$$\frac{G_1}{4}=\frac{G_2}{18}=\frac{G_3}{5t}=\frac{G_2-G_1}{18-4}=\frac{G_1+G_2+G_3}{4+18+5t}$$

Del dato, $G_2-G_1=2800$ y $G_1+G_2+G_3=7400$.

$$\rightarrow \frac{2800}{18-4}=\frac{7400}{4+18+5t}$$

$$\frac{2800}{14}=\frac{7400}{22+5t}$$

$$\frac{7400}{22+5t}=200$$

$$22+5t=37$$

$\therefore\ t=3$ años

Aplicación 25

Cuatro socios reúnen \$2 000 000: el primero coloca \$400 000; el segundo, los 3/4 del capital del primero; el tercero, los 5/3 de lo que el segundo; y el cuarto, lo restante. Juntos forman un negocio durante 5 años y luego se reparten una ganancia de \$1 500 000. ¿Cuánto más recibe el tercero con respecto al segundo?

Resolución

Como todos los socios han permanecido en el negocio durante los 5 años, los tiempos son iguales, por lo que el reparto se hace proporcionalmente a los capitales.

	Capital	Ganancia
1.er socio	400 000	G_1
2.do socio	300 000	G_2
3.er socio	500 000	G_3
4.to socio	800 000	G_3

Luego, $\dfrac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})}=K$

Tenemos

$$\frac{G_1}{400\,000}=\frac{G_2}{300\,000}=\frac{G_3}{500\,000}=\frac{G_4}{800\,000}$$

Luego de simplificar, tenemos

$$\frac{G_1}{4}=\frac{G_2}{3}=\frac{G_3}{5}=\frac{G_4}{8}$$

Del dato, $G_1+G_2+G_3+G_4=1\,500\,000$

Operamos

$$\frac{G_1}{4}=\frac{G_2}{3}=\frac{G_3}{5}=\frac{G_4}{8}=\frac{G_1+G_2+G_3+G_4}{4+3+5+8}$$

$$=\frac{1\,500\,000}{20}=75\,000$$

Entonces

$$G_3=5\times 75\,000=375\,000$$

$$G_2=3\times 75\,000=225\,000$$

$\therefore\ G_3-G_2=$ S/150 000

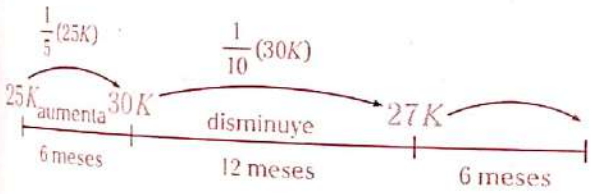
Aplicación 26

Dos comerciantes forman una empresa con capitales que están en la relación de 25 a 36. Pasados 6 meses incrementan sus capitales en 1/5 y 1/6, respectivamente, y 1 año después disminuyen sus nuevos capitales en 1/10 y 1/7 de sus valores respectivos. Halle la ganancia total luego de 2 años si se sabe que las ganancias obtenidas se diferencian en S/4180.

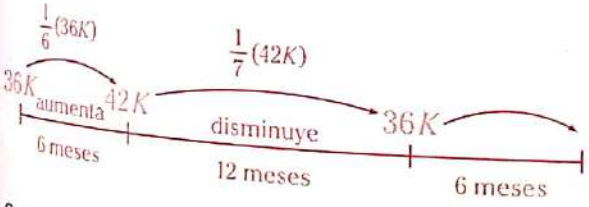
Resolución

Consideremos los datos en un diagrama para cada socio.

- Primer socio



- Segundo socio



Según la relación

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=K$$

se obtiene

$$\frac{G_1}{25K\times6+30K\times12+27K\times6}=\frac{G_2}{36K\times6+42K\times12+36K\times6}$$

$$\rightarrow \frac{G_1}{672}=\frac{G_2}{936}$$

Simplificamos.

$$\frac{G_1}{28}=\frac{G_2}{39}$$

Del dato, $G_2-G_1=$S/4180

$$\rightarrow \frac{G_1}{28}=\frac{G_2}{39}=\frac{G_2-G_1}{39-28}=\frac{\text{S/4180}}{39-28}=\text{S/380}$$

Luego,

$$\frac{G_1+G_2}{28+39}=\text{S/380}$$

Por lo tanto, la ganancia total es

$$G_1+G_2=\text{S/25 460}$$

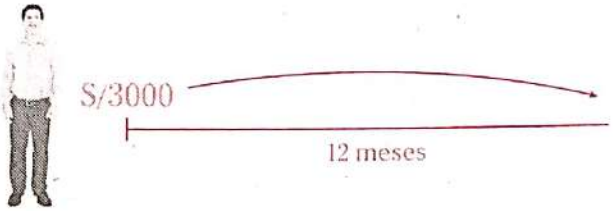
Aplicación 27

Rodrigo forma un negocio con S/3000; después de 2 meses ingresa Carolina y aporta S/4000; y luego de 5 meses más es aceptada Rocío con una inversión de S/6000. Al final de un año de funcionamiento del negocio se obtuvo S/10 600 de utilidades. ¿Cuál es la menor ganancia?

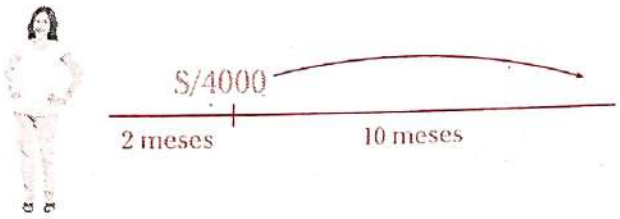
Resolución

Se hace un diagrama de tiempo y capital para cada socio.

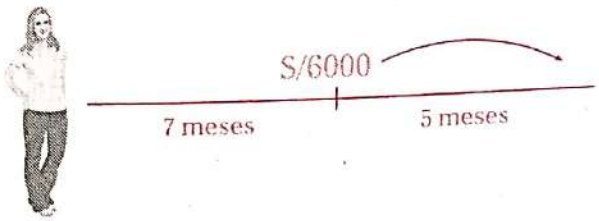
- Rodrigo



- Carolina



- Rocío



Se sabe que

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=K$$

Reemplazamos valores.

$$\frac{G_1}{3000\times 12}=\frac{G_2}{4000\times 10}=\frac{G_3}{6000\times 5}$$

$$\frac{G_1}{3\times 12}=\frac{G_2}{4\times 10}=\frac{G_3}{6\times 5}$$

$$\frac{G_1}{36}=\frac{G_2}{40}=\frac{G_3}{30}$$

Luego de simplificar, tenemos

$$\frac{G_1}{18}=\frac{G_2}{20}=\frac{G_3}{15}$$

Entonces

$$\frac{G_1}{18}=\frac{G_2}{20}=\frac{G_3}{15}=\frac{G_1+G_2+G_3}{18+20+15}$$

Del dato tenemos que

$$G_1+G_2+G_3=\text{S/}10\,600$$

$$\frac{G_1}{18}=\frac{G_2}{20}=\frac{G_3}{15}=\frac{\text{S/}10\,600}{53}=\text{S/}200$$

La menor ganancia es

$$G_3=15(\text{S/}200)$$

$$\therefore\ G_3=\text{S/}3000$$

4.4. PROBLEMAS RELACIONADOS CON OBRAS

En los problemas relacionados con obras aparecen más de dos magnitudes, en estos casos se debe tomar una magnitud como referencia y, a partir de ella, se analiza qué relación cumple con las demás magnitudes, asumiendo que las otras magnitudes no varían, por ejemplo:

(n.° de obreros) IP (n.° de días)

(n.° de obreros) DP (obra)

(n.° de obreros) IP (horas por día-h/d)

(n.° de obreros) IP (eficiencia)

(n.° de obreros) DP (dificultad)

Entonces

$$\frac{\left(\begin{matrix}\text{n.° de}\\ \text{obreros}\end{matrix}\right)\times\left(\begin{matrix}\text{n.° de}\\ \text{días}\end{matrix}\right)\times(\text{h/d})\times(\text{eficiencia})}{(\text{obra})\times(\text{dificultad})}=\text{cte.}$$

Aplicación 28

Se contratan 12 costureras para confeccionar 200 camisas en 6 días. ¿Cuántos días se demorarán 27 costureras en confeccionar 300 camisas?

Resolución

Tenemos que

N.° de costureras	12	27
N.° de camisas	200	300
N.° de días	6	x

Luego,

$$\left(\begin{matrix}\text{n.° de costureras}\\ \text{(obreros)}\end{matrix}\right)\begin{cases}\xrightarrow{\text{DP}}\left(\begin{matrix}\text{n.° de camisas}\\ \text{(obra)}\end{matrix}\right)\\ \xrightarrow{\text{IP}}\text{(n.° de días)}\end{cases}$$

$$\frac{(\text{n.° de costureras})\times(\text{n.° de días})}{(\text{n.° de camisas})}=\text{cte.}$$

Reemplazamos.

$$\frac{12\times 6}{200}=\frac{27\cdot x}{300}$$

$$x=4$$

Por lo tanto, se demoran cuatro días.

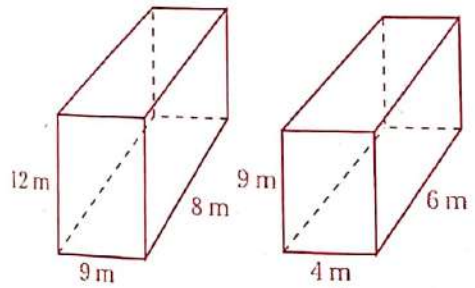
Aplicación 29

Dieciocho obreros cavan una zanja de 12 metros de profundidad, 9 m de ancho y 8 m de largo, trabajando 6 horas diarias. ¿Cuántos obreros se necesitan para cavar una zanja de 9 m de profundidad, 4 m de ancho y 6 m de largo, trabajando 4 horas diarias?

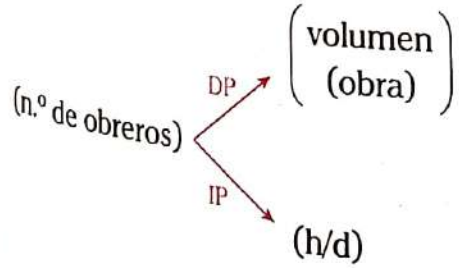
Resolución

Debemos tener en cuenta que para realizar la zanja tenemos que considerar el volumen y no solo las aristas (lados).

Gráficamente



(volumen)	$12\times9\times8$	$9\times4\times6$
(n.º de obreros)	18	x
(h/d)	6	4



$$\frac{(\text{n.º de obreros})(\text{h/d})}{(\text{volumen})}=\text{cte.}$$

Reemplazamos.

$$\frac{(12\times9\times8)\times6}{18}=\frac{(9\times4\times6)\times4}{x}$$

$$x=3$$

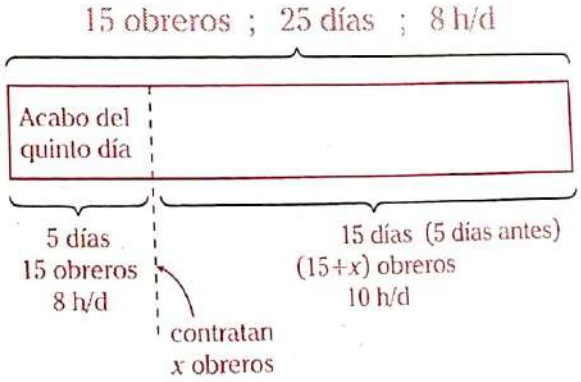
Por lo tanto, la cantidad necesaria de obreros es tres.

Aplicación 30

Quince obreros se comprometen a realizar una obra en 25 días, trabajando 8 h/d; al cabo del quinto día se les pidió que entreguen la obra 5 días antes de lo pactado, razón por la cual deben trabajar 10 h/d y contratar más obreros. ¿Cuántos obreros se contratarán?

Resolución

Para realizar la resolución del problema, realizamos el siguiente gráfico referencial.



Como la relación entre los obreros, días y h/d son IP, entonces se multiplican sus valores.

Luego,

$$5\times15\times8+15\times(15+x)\times10=15\times25\times8$$

$$x=1$$

Por lo tanto, se debe contratar a un obrero más para cumplir con lo pactado.

LECTURA

¿Qué es la magnitud?

La magnitud es algo cuantificable, es decir, medible, ponderable, también pueden ser directamente apreciables por nuestros sentidos, como los tamaños y pesos de las cosas, o más indirectas (aceleraciones, energías). Medir implica realizar un experimento de cuantificación, normalmente con un instrumento especial (reloj, balanza, termómetro).

Cuando se consigue que la cuantificación sea objetiva (no dependa del observador y todos coincidan en la medida) se llama magnitud física (tiempos, longitudes, masas, temperaturas aceleraciones, energías). Hay otras magnitudes que no resultan cuantificables universalmente: gustos, sabores, colores, ruidos, texturas, aunque puede existir alguna propiedad física relacionada, como la potencia sonora con el ruido, la longitud de onda de la luz con el color, etc.

Medir es relacionar una magnitud con otra u otras (de la misma especie o no) que se consideran patrones universalmente aceptados, estableciendo una comparación de igualdad, de orden y de número.

Los patrones básicos se llaman unidades de medida. Para especificar el valor de una magnitud hay que dar la unidad de medida y el número que relaciona ambos valores. Toda relación entre magnitudes físicas (ecuación física) ha de ser dimensionalmente homogénea (no como en el ejemplo de la tabla).

Ejemplo: relación sin sentido físico (la suma total)

(tiempo) mi fecha de nacimiento (año de la era presente)	1981
(longitud) mi altura (cm)	170
(masa) mi masa (kg)	85
(entidades individuales) mis hijos	2
Total	2238

Antiguamente se elegían muchas unidades de referencia para medir un mismo tipo de magnitud, una unidad pequeña para valores pequeños, una grande para valores grandes, tratando de que los números que resultan de comparar la magnitud a medir con su unidad sean números sencillos: números de dos o tres cifra y tal vez un decimal o dos.

El uso de más de una unidad casi nunca es bueno (la excepción es el tiempo: horas, minutos, segundos; días, meses, años); el uso de una unidad básica es lo mejor en el lenguaje científico general.

Las normas para la correcta utilización de magnitudes, unidades y símbolos científicos las proponen las asociaciones científicas internacionales.

Tomado de *Enciclopedia Marín Ilustrada. Tomo 5. El hombre y la ciencia.*

Problemas resueltos

Problema 1

En una empresa se observa que el sueldo de un empleado es directamente proporcional al cuadrado de su edad. Si Juan tiene 30 años y su sueldo es S/1200, halle el sueldo de Miguel, quien tiene 24 años.

Resolución

Se tiene los siguientes datos:

	Edad	Sueldo
Juan	30	S/1200
Miguel	24	x

Además se sabe que

$$(\text{sueldo}) \text{ DP } (\text{edad})^2$$

$$\rightarrow \frac{\text{sueldo}}{(\text{edad})^2} = \text{cte.}$$

Reemplazamos.

$$\frac{1200}{(30)^2} = \frac{x}{(24)^2}$$

$$x = 768$$

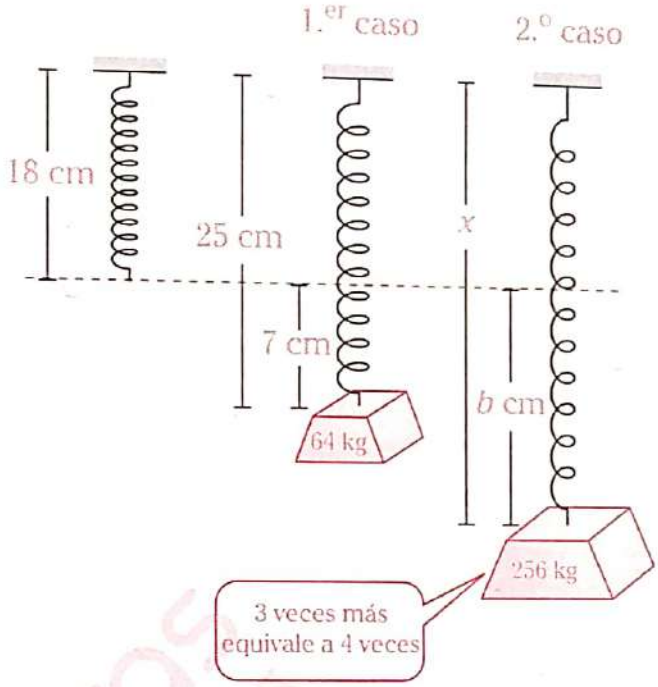
Por lo tanto, el sueldo de Miguel es S/768.

Problema 2

La longitud de un resorte es de 18 cm. Si soportara un peso de 64 g, su longitud sería de 25 cm. ¿Cuál sería su longitud si soportara un peso que es 3 veces más que el anterior? Considere que su elongación es DP a la raíz cuadrada del peso que soporta.

Resolución

Graficamos.



Por dato

$$(\text{elongación}) \text{ DP } \left(\sqrt{(\text{peso})}\right)$$

$$\rightarrow \frac{\text{elongación}}{\sqrt{\text{peso}}} = \text{cte.}$$

Luego,

$$\underbrace{\frac{7}{\sqrt{64}}}_{8} = \underbrace{\frac{b}{\sqrt{256}}}_{16}$$

$$b = 14$$

Por lo tanto, la elongación es 18+14=32 cm.

Problema 3

Un grupo de amigos se van de campamento; pero faltando 4 días para que se terminen los víveres, 3 de ellos se regresan, así los víveres alcanzaron para 3 días más. ¿Cuántas personas se quedaron hasta el final del campamento?

Resolución

Sea a la cantidad de personas que se quedaron hasta el final.

Dado que tres amigos regresan, los víveres que ellos no consumen durante cuatro días son consumidos por las tres personas que se quedaron durante los tres días adicionales.

	N.° de amigos	N.° de días
Se retiran	3	4
Quedan	a	3

A mayor número de amigos, los víveres durarán menos días. Por ello

(n.° de amigos) IP (n.° de días)

Entonces

$$3a = 4 \times 3$$

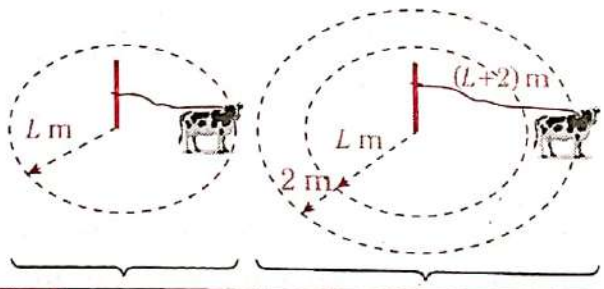
$$\therefore \quad a = 4$$

Problema 4

Una vaca atada a una cuerda de L m de longitud comió todo el pasto que está a su alcance en 18 horas. Luego de esto, la cuerda se extendió en 2 metros más y la vaca se demoró 14 horas en comer todo el nuevo pasto que estaba a su alcance. Halle L.

Resolución

Realizamos un gráfico de tal manera que se puedan observar las magnitudes que varían.



Área	L^2	$(L+2)^2$
N.° de horas	18	18+14=32

Luego,

(área) DP (n.° de horas)

$$\rightarrow \frac{\text{área}}{\text{n.° de horas}} = \text{cte.}$$

Reemplazamos.

$$\frac{L^2}{\underset{4}{\cancel{18}}} = \frac{(L+2)^2}{\underset{16}{\cancel{32}}}$$

$$\frac{9L^2}{9} = \frac{(L+2)^2}{16} \rightarrow L = 6$$

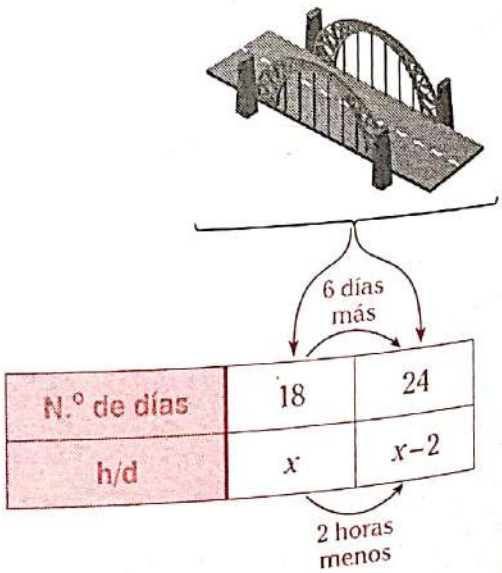
Por lo tanto, la longitud L es 6 m.

Problema 5

Un ingeniero calculó construir un puente en 18 días, pero tardó 6 días más por trabajar 2 horas menos cada día. ¿Cuántas horas trabajó cada día?

Resolución

Graficamos.



Luego,

(n.° de días) IP (h/d)

$\rightarrow$ (n.° de días)×(h/d)=cte.

Reemplazamos.

$18x=24(x-2)$

$x=8$

Por lo tanto, el ingeniero trabajó

$8-2=6$ días

Problema 6

Si A DP B^2 (C: constante)

C IP A (B: constante)

A	80	a	25
B	10	2	10
C	40	2	b

calcule $a+b$.

Resolución

Dado que

A DP B^2 (C es constante)

A IP C (B es constante)

se tendrá

$$\frac{A\times C}{B^2}=\text{cte.}$$

Reemplazamos valores.

$$\frac{80\times 40}{100}=\frac{a\times 2}{4}=\frac{25\times b}{100}$$

Luego,

$$\frac{80\times 40}{100}=\frac{a\times 2}{4}$$

$\rightarrow a=64$

Como

$$\frac{80\times 40}{100}=\frac{25\times b}{100}$$

$\rightarrow b=128$

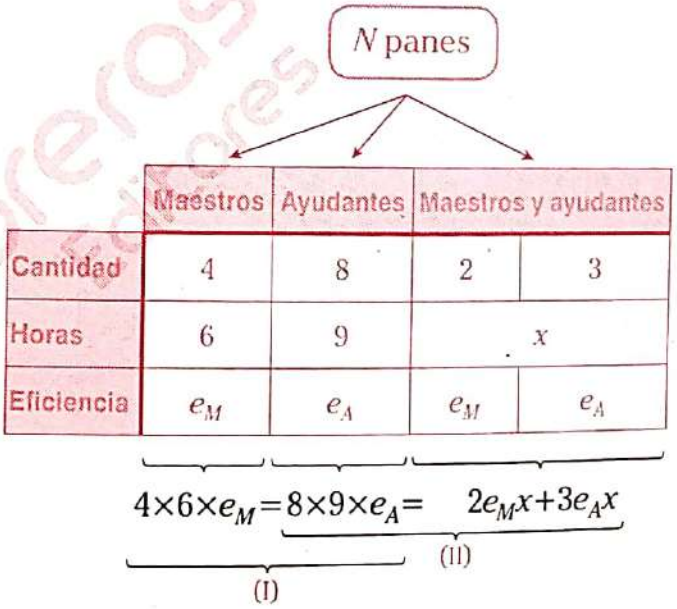
$\therefore\ a+b=192$

Problema 7

La elaboración de N panes puede ser realizada por 4 maestros en 6 horas, o por 8 ayudantes en 9 horas. ¿En cuántas horas podrán elaborar la misma cantidad de panes dos maestros y tres ayudantes?

Resolución

En el cuadro tenemos



De (I): $\dfrac{e_M}{e_A}=\dfrac{3}{2}$

De (II):

$8\times 9\times e_A=2e_Mx+3e_Ax$

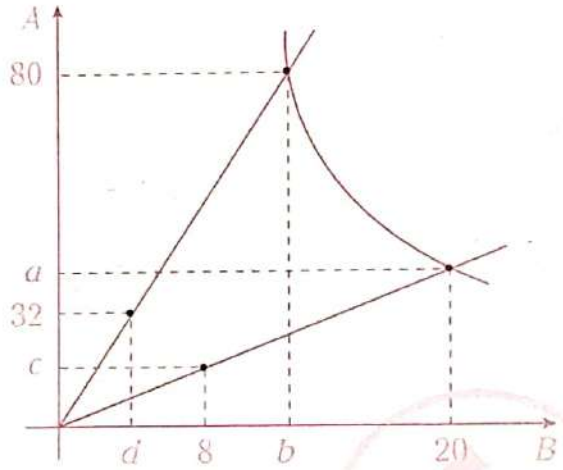
$8\times 9\times (2)=2(3)x+3(2)x$

$8\times 9\times (2)=12x \rightarrow x=12$

Por lo tanto, se demoran 12 días.

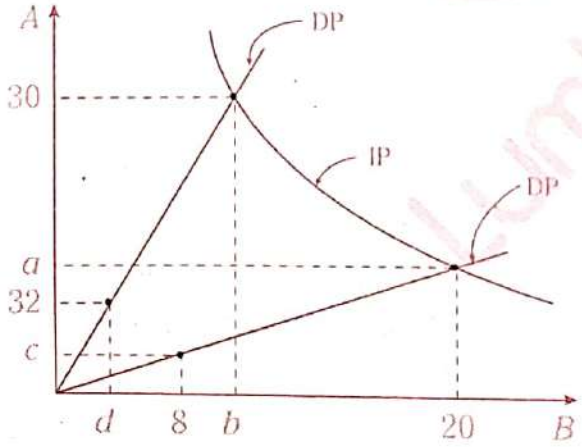
Problema 8

Sean A y B dos magnitudes cuya relación de proporcionalidad se muestra en la gráfica; además, $a+b+c+d=70$. Determine el valor de $a-b+c-d$.



Resolución

En el gráfico



$$\text{DP: } \frac{32}{d}=\frac{80}{b} \rightarrow \frac{d}{2}=\frac{b}{5}$$

$$\text{IP: } 80\times b=a\times 20 \rightarrow a=4b$$

$$\text{DP: } \frac{c}{8}=\frac{a}{20} \rightarrow \frac{c}{2}=\frac{a}{5}$$

Luego,

$$a=20k;\ b=5k;\ c=8k;\ d=2k$$

Por dato

$$a+b+c+d=70$$
$$20k+5k+8k+2k=70$$
$$k=2$$

Entonces

$$a-b+c-d=21k=21(2)=42$$

$$\therefore\ a-b+c-d=42$$

Problema 9

El tiempo de vida de una máquina es directamente proporcional al cuadrado del número de mantenimientos anuales e inversamente proporcional al número de horas anuales de trabajo. Si una máquina que trabaja 3600 horas anuales, recibiendo tres mantenimientos anuales, tiene un tiempo de vida de 12 años, ¿cuánto tiempo de vida tendrá una máquina que trabaja 4800 horas anuales y tiene cuatro mantenimientos al año?

Resolución

Sean

- T: tiempo de vida
- M: número de mantenimientos anuales
- H: número de horas anuales

Luego,

T	12	t
M	3	4
H	3600	4800

Además,

$$\left.\begin{array}{l} T \text{ DP } M^2 \\ T \text{ IP } H \end{array}\right\} \frac{T\times H}{M^2}=\text{cte.}$$

Reemplazamos valores y operamos.

$$\frac{12\times 3600}{3^2}=\frac{t\times 4800}{4^2}$$

$$\therefore\ t=16 \text{ años}$$

Problema 10

Se reparte una determinada cantidad de dinero entre cuatro personas. Lo que le toca al primero es a lo del segundo como 2 es a 3; lo del segundo es a lo del tercero como 4 es 5; y lo del tercero es a lo del último como 6 es a 7. Si el último recibió S/5600, ¿cuál es la cantidad repartida?

Resolución

Sean A, B, C y D las partes que reciben cada uno.

Del enunciado

$$\frac{A}{B}=\frac{2\times\mathbf{4}\times\mathbf{2}}{3\times\mathbf{4}\times\mathbf{2}}=\frac{16}{24}$$

iguales

$$\frac{B}{C}=\frac{4\times\mathbf{3}\times\mathbf{2}}{5\times\mathbf{3}\times\mathbf{2}}=\frac{24}{30}$$

iguales

$$\frac{C}{D}=\frac{6\times\mathbf{5}}{7\times\mathbf{5}}=\frac{30}{35}$$

Las cantidades proporcionales son

$A=16K$

$B=24K$

$C=30K$

$D=35K$

Como el último recibió S/5600.

$D=5600$

$35K=5600$

$\rightarrow K=160$

Por lo tanto, el total será

$A+B+C+D=105K=105(160)=$S/16 800

Problema 11

Un comerciante moribundo deja una herencia de S/10 080 a su esposa (la cual estaba embarazada) bajo la siguiente cláusula: "Si nace varón, se repartirá entre él y la madre en la relación de 2 a 3, respectivamente. Si nace mujer, se repartirá de tal modo que la hija obtenga 5 partes por cada 4 de la madre". Si llegado el alumbramiento, nacen mellizos: un varón y una mujer, ¿cuánto le corresponde a la madre?

Resolución

Caso 1		Caso 2	
hijo varón	2	hija mujer	5
madre	3	madre	4

Como en realidad se va a repartir entre los mellizos –varón y mujer– y la madre, el nuevo reparto se efectuará en función de las condiciones, sin contradecirlas. Tendremos entonces a los tres beneficiados y los índices de reparto.

hijo varón:	2	
madre:	3	4
hija mujer:		5

Como la cantidad que recibe la madre es constante, es necesario multiplicar por 4 y por 3, respectivamente.

$3\times4=4\times3$

Para que se mantenga la relación, también multiplicamos por el mismo factor en cada caso. Tendremos lo siguiente:

hijo varón:	$2\times4K$
madre:	$3\times4K$
hija mujer:	$5\times3K$

Por condición, el total es

$8K+12K+15K=$S/10 080

$35K=$S/10 080

$K=$S/288

Luego, la madre recibe

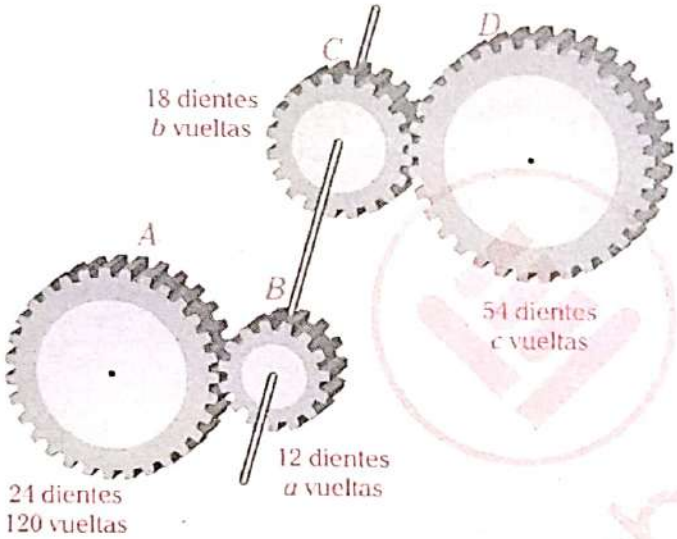
$12\times$S/288=S/3456.

Problema 12

Una rueda A de 24 dientes engrana con otra rueda B de 12 dientes, la cual está unida mediante un eje a la rueda C que tiene 18 dientes, esta última rueda engrana con la rueda D de 54 dientes. Si la rueda A da 120 rpm, ¿cuántas vueltas da la rueda D en 15 minutos?

Resolución

Del enunciado, sabemos que en un minuto



- Para las ruedas A y B

  $24\times120=12\times a$

  $\therefore\ a=240$ vueltas

- Para las ruedas B y C

  $a=b$

  $\therefore\ b=240$ vueltas

- Para las ruedas C y D

  $18\times240=54\times c$

  $\therefore\ c=80$ vueltas

Piden la cantidad de vueltas en 15 minutos.

$\therefore\ 80\times15=1200$ vueltas

Problema 13

Dos amigos reunieron un capital de S/1000 para hacer un negocio. El primero dejó su capital durante 3 meses; el otro lo dejó durante 2 meses. Si al terminar el negocio las ganancias fueron iguales, indique el menor capital impuesto por uno de ellos.

Resolución

Se sabe que

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=\text{cte.}$$

Sea a la ganancia de cada amigo.

$$\frac{a}{c_1\times3}=\frac{a}{c_2\times2}\ ;\ \text{además}\ c_1+c_2=1000$$

$$\frac{c_1}{2}=\frac{c_2}{3}=\frac{1000}{5}=200$$

$c_1=$S/400

$c_2=$S/600

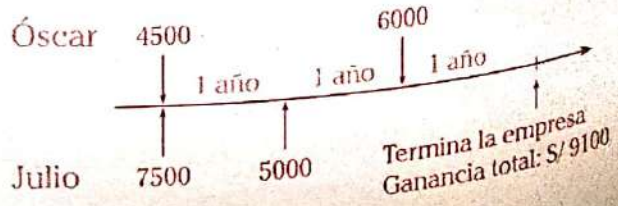
Por lo tanto, el menor capital es S/400.

Problema 14

Óscar y Julio forman una empresa que dura 3 años, quienes imponen S/4500 y S/7500, respectivamente. Al año, Julio retira S/2500; un año después Óscar aumenta su capital en S/1500. Si al terminar la empresa se obtiene una ganancia de S/9100, calcule la ganancia que le corresponde a Óscar.

Resolución

Del enunciado, tenemos



Pero $\dfrac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=\text{cte.}$

Reemplazamos.

$$\frac{G_{\text{Óscar}}}{4500\times2+6000\times1}=\frac{G_{\text{Julio}}}{7500\times1+5000\times2}$$

$$\frac{G_{\text{Óscar}}}{9\times2+12\times1}=\frac{G_{\text{Julio}}}{15\times1+10\times2}$$

Luego de simplificar, operamos

$$\frac{G_{\text{Óscar}}}{6}=\frac{G_{\text{Julio}}}{7}=\frac{9100}{13}=700$$

$\therefore\ G_{\text{Óscar}}=S/4200$

Problema 15

Pamela inicia un negocio con S/N y cada 4 meses acepta un socio que aporta el triple de lo anterior durante 2 años, al final de los cuales se liquida la empresa, y le corresponde S/$3N+6000$ de ganancia al tercer socio. Halle N si Pamela es la primera socia y las ganancias de los demás socios suman S/537 000.

Resolución

Se tienen las siguientes cantidades:

	Capital	Tiempo	Ganancia
1.er socio	N	24	G_1
2.º socio	$3N$	20 (−4)	G_2
3.er socio	$9N$	16 (−4)	$3N+6000$
4.º socio	$27N$	12 (−4)	G_4
5.º socio	$81N$	8 (−4)	G_5
6.º socio	$243N$	4 (−4)	G_6

Se sabe que

$$\frac{(\text{ganancia})}{(\text{capital})\times(\text{tiempo})}=K$$

Reemplazamos valores.

$$\frac{G_1}{N\times24}=\frac{G_2}{3N\times20}=\frac{3N+6000}{9N\times16}=\frac{G_4}{27N\times12}$$
$$=\frac{G_5}{81N\times8}=\frac{G_6}{243N\times4}$$

Luego de simplificar, ordenamos.

$$\frac{G_1}{2}=\frac{G_2}{5}=\frac{G_4}{27}=\frac{G_5}{54}=\frac{G_6}{81}=\frac{\overbrace{3N+6000}^{G_3}}{12}$$

Del dato: $G_2+G_3+G_4+G_5+G_6=537\ 000$

$$\frac{537\ 000}{5+12+27+54+81}=\frac{3N+6000}{12}$$

$$\frac{537\ 000}{179}=\frac{N+2000}{4}$$

$$3000=\frac{N+2000}{4}$$

$\therefore\ N=10\ 000$

Problema 16

Se contrata a 15 obreros para que a razón de 6 h/d techen un área de 270 m^2 en 20 días. Calcule cuántos obreros de doble eficiencia que los anteriores se necesitarán para techar 450 m^2, con un material que triplica la dificultad, en 30 días y a razón de 10 horas por cada día.

Resolución

Comparamos las magnitudes.

(n.º de obreros) IP (h/d)
(n.º de obreros) DP (obra)
(n.º de obreros) IP (n.º de días)
(n.º de obreros) IP (eficiencia)
(n.º de obreros) DP (dificultad)

Se concluye que

$$\frac{\left(\begin{matrix}\text{n.º de}\\\text{obreros}\end{matrix}\right)\times(\text{eficiencia})\times\left(\begin{matrix}\text{n.º de}\\\text{días}\end{matrix}\right)\times(\text{h/d})}{(\text{obra})\times(\text{dificultad})}=\text{cte.}$$

Reemplazamos los datos.

$$\frac{15\times1\times20\times6}{270\times1}=\frac{b\times2\times30\times10}{450\times3}$$

$\rightarrow\ b=15$

Por lo tanto, se necesitarán 15 obreros.

Problema 17

Para construir una piscina, 20 obreros pueden cavar una zanja de 12 m de diámetro, con 4 m de profundidad, en 15 días y a razón de 8 h/d. Si se desea aumentar en 3 m el radio y en 2 m la profundidad de la zanja, calcule en cuántos días otros 30 obreros, de doble rendimiento que los anteriores, podrían construir la piscina a razón de 9 h/d.

Resolución

Comparamos las magnitudes

(n.º de obreros) DP (obra)

(n.º de obreros) IP (n.º de días)

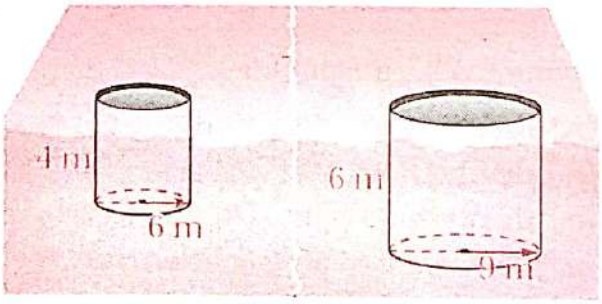
(n.º de obreros) IP (h/d)

(n.º de obreros) IP (rendimiento)

De lo anterior

$$\frac{(\text{n.º de obreros})(\text{n.º de días})(\text{rendimiento})}{(\text{obra})}=\text{cte.}$$

Por condición



20 obreros
rendimiento: 1
15 días
8 h/d

30 obreros
rendimiento: 2
c días
9 h/d

Reemplazamos valores y operamos.

$$\frac{20\times15\times8\times1}{\pi\times36\times4}=\frac{30\times c\times9\times2}{\pi\times81\times6}$$

$\rightarrow\ c=15$

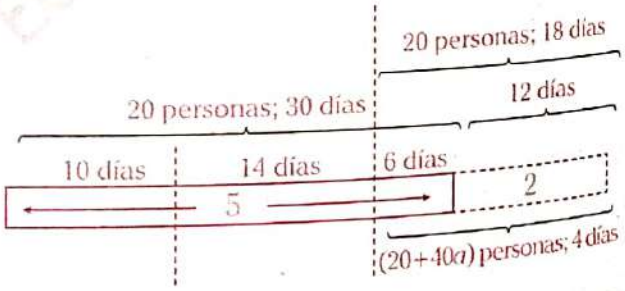
Por lo tanto, podrán construir la piscina en 15 días.

Problema 18

Veinte personas pueden hacer una obra en treinta días trabajando 8 h/d. A los 10 días de iniciada la obra se le comunica al contratista que la obra debe ser 2/5 mayor de lo acordado, y 14 días después de esto se le indica que todo el trabajo debe estar listo 2 días antes del plazo inicial. En ese momento se contratan 40 obreros para cumplir con esta última condición. Determine la relación entre las eficiencias de estos nuevos obreros con la de los anteriores.

Resolución

Se tiene que



Como (eficiencia) IP (tiempo) tenemos

$$20\times18=(20+40a)\times4$$

$$\frac{7}{4}=a$$

La eficiencia inicial fue considerada como 1, por lo tanto, la relación de eficiencias será $\frac{7}{4}$.

Test

1. Si A DP $\sqrt[3]{B}$, calcule el valor de A cuando $B=64$. Se sabe que cuando $A=120$, $B=216$.

A) 36 B) 56 C) 72
D) 80 E) 92

2. Se sabe que A es IP a B^2, además cuando $B=6$, el valor de $A=75$. Halle el valor de A cuando $B=15$.

A) 20 B) 12 C) 24
D) 15 E) 18

3. Un coche con velocidad constante ha dado 40 vueltas a un circuito en 92 minutos. Calcule el tiempo que tardará en recorrer 30 vueltas en el mismo circuito.

A) 80 min B) 60 min C) 69 min
D) 35 min E) 40 min

4. Un barco lleva víveres para alimentar durante 36 días a su tripulación formada por 40 personas. Si antes de partir acogen a 20 personas más de un barco averiado, ¿cuántos días durarán los víveres?

A) 24 B) 20 C) 36
D) 32 E) 30

5. Si A es inversamente proporcional a B y C es directamente proporcional a la raíz cuadrada de A, halle el valor de m en la siguiente tabla de valores.

A	18	15
B	m	48
C	6	3

A) 80 B) 90 C) 160
D) 140 E) 120

6. Reparta 750 en forma DP a los números 660; 770 y 1320. Dé como respuesta la menor parte.

A) 360
B) 270
C) 210
D) 180
E) 150

7. Reparta 594 en forma IP a los números 200; 300; 600 y 1000. Dé como respuesta la mayor parte.

A) 64 B) 90 C) 180
D) 360 E) 270

8. Percy inicia un negocio aportando S/630. Luego de 4 meses, acepta a Cristóbal como socio, quien aporta S/720. Si el negocio se termina en un año con una ganancia total de S/1480, calcule la ganancia de Percy.

A) S/640 B) S/920 C) S/820
D) S/800 E) S/840

9. Dos ruedas engranadas de 80 y 60 dientes están en contacto. En cierto momento, uno de ellos ha dado 36 vueltas más que el otro. ¿Cuántas vueltas dará el engranaje más pequeño?

A) 144 B) 320 C) 240
D) 148 E) 288

Claves

1 D 2 B 3 C 4 A 5 C 6 D 7 E 8 B 9 A

Problemas propuestos

Nivel básico

1. El siguiente cuadro muestra los valores de las magnitudes de A y B que guardan cierta relación de proporcionalidad. Calcule $x+y$.

A	2	x	8	98
B	3	24	y	21

A) 124 B) 128 C) 134
D) 160 E) 192

2. Nueve personas deciden ir de campamento y llevar víveres para ocho días. Si antes de partir, tres personas deciden también ir de campamento, pero no tienen víveres. ¿Para cuántos días menos alcanzarían los víveres si las tres personas van al campamento?

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

3. Dos personas alquilan una casa, una de ellas ocupa los 5/8 de la casa y paga S/600 de alquiler mensual. ¿Cuánto paga de alquiler mensual la otra persona?

A) S/300 B) S/350 C) S/360
D) S/400 E) S/420

4. Si Rosario es media vez más rápida que Lucía y esta última puede hacer una obra en 21 días, ¿en cuántos días Rosario realizará la mitad de dicha obra?

A) 14 B) 7 C) 16
D) 8 E) 9

5. Un pintor tarda 52 minutos en pintar una superficie cuadrada de 12 metros de lado. ¿En cuántos minutos dicho pintor pintaría las caras externas de 2 cubos compactos de 3 metros de arista?

A) 36 B) 42 C) 39
D) 26 E) 24

6. Sean A, B y C magnitudes. Se sabe lo siguiente:
- A DP $\sqrt{C}$ (B: cte.)
- A IP B (C: cte.)

Si cuando A aumenta en 60 %, C aumenta en 44 %, ¿qué pasa con B?

A) Disminuye en 75 %.
B) Aumenta en 25 %.
C) Disminuye en 25 %.
D) Aumenta en 75 %.
E) No aumenta ni disminuye.

7. Si se cumple lo siguiente:
- A DP B (C: cte.)
- $\sqrt{A}$ IP C (B: cte.)

además,

A	6	1	y
B	2	27	$8x$
C	1	x	y

calcule $(x+y)$. Considere que $x > 0$ e $y > 0$.

A) 18 B) 16 C) 10
D) 12 E) 15

8. Si se cumple que

A DP B^2 $(B \leq 20)$
A IP $\sqrt{B}$ $(B \geq 20)$

calcule A cuando B es 180 si A es 3 cuando B es 10.

A) 4 B) 6 C) 10
D) 8 E) 12

9. Si $f(6)=7$ y $f(x)$ es una función de proporcionalidad inversa, indique el valor de

$$E=\frac{f(5)\times f(10)}{f(8)}$$

A) 8,12 B) 7,68 C) 7,42
D) 6,72 E) 6,24

10. Luis, Juan y Pedro cosechan sus respectivas chacras. Luis termina su parte en 12 días, que es el triple de la del segundo y los 2/5 de la de Pedro. Calcule la diferencia del número de días que demorarían Pedro y Juan en cosechar sus respectivas chacras si todos tienen igual eficiencia.

A) 15 B) 12 C) 20
D) 26 E) 30

11. Por cada dos problemas que resuelve Juan, José resuelve tres problemas de la misma dificultad y en el mismo tiempo. Si Juan resuelve 20 problemas de igual dificultad en 90 minutos, ¿cuántos problemas de doble dificultad resolverá José en el mismo tiempo?

A) 25 B) 30 C) 35
D) 40 E) 15

12. Para valores de $B \leq 8$, las magnitudes A y B son DP; para valores de $8 \leq B \leq 15$, las magnitudes A y B son IP; para valores de $B \geq 15$, A es IP con B^2. Si cuando $B=4$, $A=15$; calcule el valor de A cuando $B=30$.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 7 E) 8

13. Por transportar 24 toneladas de mercadería a una distancia de 840 km, una empresa de transporte de carga cobra S/4200. ¿Cuánto cobrará la misma empresa para transportar 35 toneladas a una distancia de 480 km?

A) S/1000 B) S/2500 C) S/3800
D) S/3500 E) S/3200

14. Un cuartel de 400 soldados tiene provisiones para 10 días y se reparten 3 raciones por día a cada soldado. Producto de un enfrentamiento, mueren algunos y las provisiones alcanzaron para 8 días debido a que los soldados que sobrevivieron aumentaron a 4 raciones por día. ¿Cuántos soldados murieron en el enfrentamiento?

A) 32 B) 25 C) 40
D) 20 E) 30

15. Al pintar las caras de dos cubos iguales me sobraron 60 tarros de pintura. ¿Cuántos tarros me sobrarán o faltarán al pintar tres cubos iguales cuyos volúmenes sean $2\frac{3}{8}$ más que el anterior si al pintar un cubo de cada tipo me sobraron 45 tarros de pintura?

A) Sobrarán 15.
B) Faltarán 15.
C) Sobrarán 3.
D) Faltarán 12.
E) Faltarán 3.

16. Cuatro agricultores, A, B, C y D, deben sembrar chacras circulares de 3; 4; $3\sqrt{2}$ y 5 m de radio, respectivamente. Si el agricultor A cobra S/960 menos que el agricultor D, ¿cuánto más cobra el agricultor C que el agricultor B?

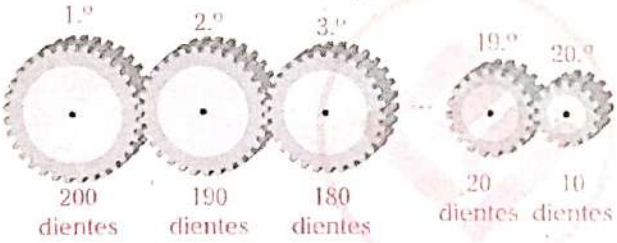
A) S/120 B) S/180 C) S/240
D) S/300 E) S/360

17. Se reparten N soles entre los hermanos Ángel, Beto y Carlos, en la misma relación que los números 2^m, 2^{m+2} y 2^{m+n}, respectivamente. Lo que recibieron Ángel y Beto juntos es S/1500, y la razón aritmética de lo recibido por Carlos y Beto es S/3600. Calcule N y dé como respuesta la suma de cifras.

A) 9 B) 8 C) 5
D) 6 E) 7

Nivel intermedio

18. El siguiente es un sistema de 20 ruedas engranadas cuyo número de dientes es como se indica a continuación:



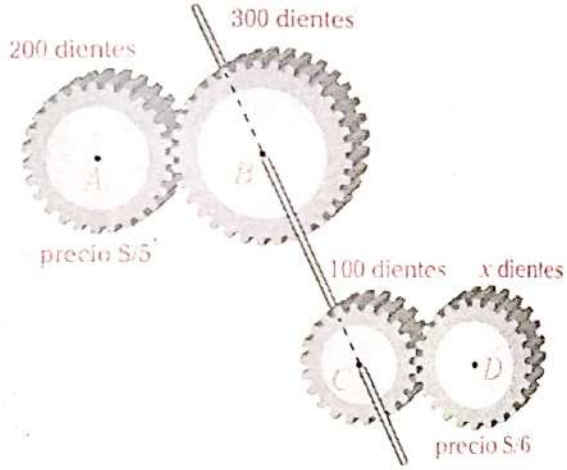
Si la cuarta rueda da 300 vueltas en 5 minutos, indique el número de vueltas por segundo que dará la vigésima rueda.

A) 17 B) 20 C) 13
D) 12 E) 14

19. Una rueda A de 20 dientes está unida a un mismo eje con una rueda B de 30 dientes que engrana con una rueda C de 60 dientes. Si cambiáramos las posiciones de B y C, para una misma cantidad de vueltas de A, en el segundo caso las vueltas de B exceden en 54 a las vueltas de C en el primer caso. ¿Cuál es esa misma cantidad de vueltas de A?

A) 27 B) 18 C) 36
D) 30 E) 45

20. El precio de cada engranaje se ha determinado con la condición de ser DP al producto del número de dientes y su peso. ¿Cuál será la relación de los precios de los engranajes A y D si cuando A da 6 vueltas, D da 8 vueltas?



A) 6/7 B) 8/9 C) 16/9
D) 5/24 E) 10/24

21. Tres obreros se reparten una bonificación en partes proporcionales a sus sueldos mensuales, que son de S/2400, S/3000 y S/4200; sin embargo, luego no les parece justo el reparto, por lo cual acuerdan que sea en partes iguales, y para ello, el tercero entrega S/12 000 al segundo y este entrega cierta cantidad al primero. ¿Cuál fue la dicha cantidad que el segundo entregó al primero?

A) S/4800 B) S/6000 C) S/7200
D) S/8400 E) S/9600

22. Pedro inicia un negocio con S/600. Luego de 3 meses, acepta a Luis como socio, quien aporta S/400; 4 meses después de ingresar Luis, acepta a Miguel como socio, quien aporta S/700. Si el negocio duró 1 año y medio, con un beneficio total de S/49 000, determine la diferencia entre el beneficio de Miguel y el beneficio de Luis.

A) S/3200 B) S/3400 C) S/3000
D) S/3600 E) S/3500

23. Dos socios forman una empresa aportando S/4000 y S/7000, respectivamente. El primero de ellos al cabo de 5 meses retiró S/1000, un mes después el segundo retiró S/2000 y después de 4 meses más el primero retiró S/1000 más. Si el negocio duró un año y se obtuvo una ganancia de S/2220, calcule cuánto ganó cada socio y dé como respuesta la diferencia de dichas cantidades.

A) S/380 B) S/480 C) S/660
D) S/680 E) S/780

24. Se sabe que 10 hombres y 10 mujeres pueden cosechar 20 hectáreas de trigo en 40 días. Después de 10 días de trabajo se retiran 2 hombres y 6 mujeres. Determine con cuántos días de retraso se terminará la cosecha, si el trabajo que hace un hombre equivale al de 2 mujeres.

A) 12 B) 13 C) 14
D) 15 E) 16

25. El sueldo de un obrero es directamente proporcional a los días trabajados e inversamente proporcional a la raíz cuadrada de las tardanzas. Se sabe que cuando trabajó 28 días y tuvo 4 tardanzas, recibió un sueldo de S/700. Halle de cuánto fue su sueldo cuando trabajó 24 días y tuvo 9 tardanzas.

A) S/350 B) S/400 C) S/450
D) S/500 E) S/550

26. Diez obreros pueden cavar una zanja de 20 metros de profundidad en 12 días. Después de cierto tiempo de trabajo se decide aumentar la profundidad en 10 metros, para lo cual contratan a 5 obreros más y acaban la obra a los 15 días de iniciado el trabajo. ¿A cuántos días se aumentó la profundidad de la obra?

A) 10 B) 11 C) 9
D) 15 E) 13

27. La eficiencia de una persona es IP al número de horas por día que labora, y también IP al número de días laborados. Si dicha persona hace una obra en 24 días laborando 6 horas por día, calcule en qué tiempo hará el cuádruple de la obra laborando 9 horas diarias.

A) 30 B) 32 C) 60
D) 64 E) 72

28. Se sabe que 300 pantalones de doble costura pueden ser cosidos por 24 varones o 32 mujeres en 20 días, laborando 9 horas por día. Calcule cuántas mujeres deben reforzar a 21 varones para coser 200 pantalones de triple costura en 18 días, laborando 8 h/d.

A) 10 B) 12 C) 13
D) 14 E) 15

Nivel avanzado

29. El costo de un cuaderno varía en forma DP al número de hojas que tiene, e IP al cuadrado del número de cuadernos que se producen; además, el precio de venta de cada uno es los 17/12 de su costo. Si cuando se producen 15 cuadernos de 100 hojas su precio de venta es S/680, ¿cuántas hojas tienen los 30 cuadernos que se produjeron y que luego se vendieron en S/255?

A) 72 B) 75 C) 80
D) 85 E) 96

30. Cinco agricultores comparan sus terrenos observando que sus áreas son proporcionales a cinco números pares consecutivos. Para cultivarlos contratan a dos peones y trabajan todos en partes iguales. La relación entre lo que aportan para el pago de los peones al de mayor y menor terreno es de 8 a 7. ¿Qué parte del aporte total representa el aporte del agricultor del menor terreno?

A) 24/125
B) 7/40
C) 18/125
D) 14/75
E) 30/125

31. Ana, Bety y Carla forman una sociedad. Los capitales de Ana y Bety están en la relación de 8 a 16, y los de Bety y Carla están en la relación de 51 a 17. A los 5 meses de iniciada, Ana se retira; 3 meses después, Bety también lo hace, y 4 meses más tarde, Carla liquidó la sociedad para luego repartir las utilidades. ¿Cuál fue la utilidad total si Bety recibió S/600 más que Carla?

A) S/2175 B) S/2751 C) S/2157
D) S/2517 E) S/2400

32. Un grupo de obreros en 12 días han avanzado los 2/5 de una obra. Si a partir de ese momento trabajan 5 obreros menos, por lo que la obra se culmina con 2 días de retraso, ¿cuántos obreros trabajaban inicialmente?

A) 32 B) 45 C) 50
D) 36 E) 40

33. Se sabe que 6 hornos consumen 60 toneladas de carbón, trabajando 10 h/d durante 18 días. Calcule cuántas toneladas serán necesarias para mantener trabajando 5 hornos más durante 90 días a razón de 7 h/d.

A) 15,4 ton B) 305 ton C) 345 ton
D) 12,5 ton E) 385 ton

34. Una obra puede ser realizada por n máquinas en 30 días; con $n+4$ máquinas, la misma obra, con el doble de dificultad, se puede realizar en 40 días. Calcule en cuántos días $n+2$ máquinas harán la obra con la dificultad inicial.

A) 20 B) 21 C) 24
D) 25 E) 28

35. Para hacer una obra en 10 días se procedió de la siguiente forma: el primer día 2 obreros, el segundo día 4 obreros, el tercer día 6 obreros, y así sucesivamente hasta el décimo día en que laboran 20 obreros. Si se hubiera laborado con 22 obreros, calcule en cuántos días acabarían la misma obra.

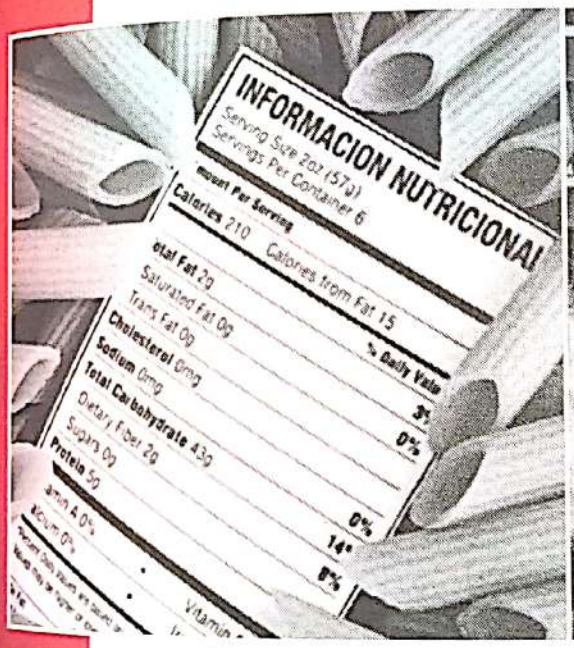
A) 3 B) 3,5 C) 4
D) 4,5 E) 5

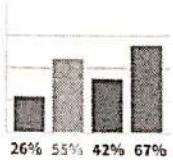
36. La tercera parte de una obra fue realizada por un grupo de 10 obreros que laboran 3 horas diarias con otro grupo de 15 obreros que laboran 2 horas y la realizaron durante 20 días. Calcule cuántos obreros del grupo que laboran 3 horas diarias se deben unir con 10 obreros que laboran 2 horas diarias para terminar la obra restante en 30 días si todos los obreros tienen la misma eficiencia.

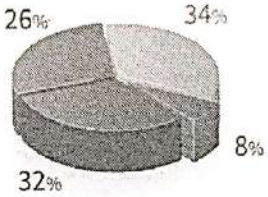
A) 12 B) 15 C) 18
D) 20 E) 24

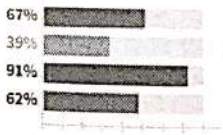
Capítulo

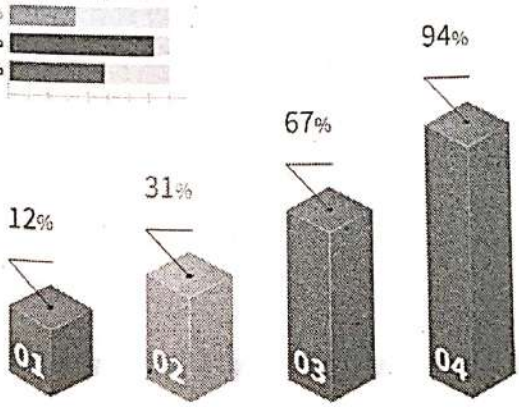
XIV











Tanto por cuanto

Juan Esqueche Paiconcial

CAPÍTULO XIV

TANTO POR CUANTO

Objetivos

- Aprender a utilizar la relación de dos cantidades como un tanto por ciento y aplicar el tanto por ciento a una cantidad.
- Realizar operaciones con el tanto por ciento; además, determinar e interpretar las variaciones porcentuales.
- Reconocer la utilidad del tanto por ciento en situaciones de la vida cotidiana, así como en las aplicaciones comerciales.

Introducción

El tanto por ciento es una de las expresiones matemáticas que se utiliza en muchos ámbitos de nuestra vida cotidiana, así como en la estadística, el comercio y las finanzas. Las informaciones de lo que sucede en nuestro país o en el mundo utilizan el tanto por ciento, por ejemplo, "La producción nacional ha tenido una variación del 7,8 %", "la cobertura de salud alcanzó el 61,9 %", "los hogares con internet representan el 20,2 %", "la población que se encuentra en situación de pobreza representa el 21,7 %", "el presupuesto para educación representa el 4,41 % del PBI", etc.

Como observamos las aplicaciones del tanto por ciento son diversos; hoy en día en los centros comerciales o tiendas por departamentos ofrecen rebajas sobre rebajas, pero no debemos sorprendernos con un 30 % +20 %, que no es 50 %, sino que equivale a una rebaja única del 44 %, ya que la segunda rebaja se efectúa sobre lo que ya está rebajado. Por lo tanto, es importante conocer los procedimientos para calcular el tanto por ciento de una cantidad.

En este capítulo, aprenderemos a usar el tanto por ciento y conoceremos sus aplicaciones no solo en su forma matemática, sino también en el ámbito de la vida cotidiana y lo comercial, como se mencionó anteriormente, a la vez que lograremos adquirir una base para los capítulos posteriores, como la regla de mezcla, regla de interés, regla de descuento y estadística.

1 ▸ DEFINICIÓN

Es una aplicación de la proporcionalidad, en la cual, la razón geométrica $\frac{a}{b}$ se lee como "a por b".

Calcular el a (tanto) por b (cuanto) de una cantidad N consiste en encontrar una cantidad x, tal que x y N estén en la misma proporción de a y b. Es decir,

$$\frac{x}{N}=\frac{a}{b}$$

$$\therefore \quad x=\frac{a}{b}(N)$$

Ejemplos

- Se tiene una canasta con 12 frutas, de las cuales 4 son manzanas.

La razón geométrica entre la cantidad de manzanas y la cantidad total de frutas es

$$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$$

Podemos decir que una de cada tres frutas son manzanas. También que hay una manzana por cada tres frutas.
Además, podemos despejar el número de manzanas.

$$\frac{4}{12}=\frac{1}{3} \rightarrow \underbrace{4=\frac{1}{3}(12)}_{\text{El número de manzanas es el 1 por 3 del total de frutas.}}$$

- El 2 por 7 de 42 lo podemos calcular así

$$\frac{x}{42}=\frac{2}{7} \rightarrow x=\frac{2}{7}(42)$$

$$\therefore \quad x=12$$

En general,

$$\boxed{\text{El } a \text{ por } b \text{ de } N <> \frac{a}{b}\times N}$$

Aplicación 1

Un recipiente tiene 200 litros entre agua y vino. Si la cantidad de agua es el 2 por 5 del total, ¿cuántos litros de vino hay?

Resolución

La cantidad de agua es

$$\frac{2}{5}\times 200=80 \text{ L}$$

Por lo tanto, la cantidad de vino es

$$200-80=120 \text{ L}$$

Aplicación 2

En un salón de clases hay 60 estudiantes, de los cuales las mujeres representan el 2 por 5 del total. Si de los varones el 5 por 9 usan lentes, ¿cuántos varones no usan lentes?

Resolución

Total: 60

mujeres	varones: 60−24=36	
$\frac{2}{5}\times 60=24$	Usan lentes $\frac{5}{9}\times 36=20$	No usan lentes $36-20=16$

Del gráfico anterior, primero calculamos el número de mujeres que resulta 24, luego calculamos el número de varones mediante una resta, y estos resultan 36. Seguidamente, calculamos el número de varones que usan lentes, los cuales son 20, y por último, calculamos los varones que no usan lentes mediante una resta, los cuales son 16.

2 CASOS PARTICULARES

2.1. TANTO POR MIL (‰)

En época del Virreinato era bastante común utilizar el tanto por mil; esto se dio como resultado de la influencia europea, donde el tanto por mil era aplicado comercialmente. Actualmente se utiliza en los índices demográficos como la tasa de mortandad, la tasa de natalidad, etc.

Ejemplo

El 5 por mil de 400 lo podemos calcular así:

$$\frac{x}{400}=\frac{5}{1000} \rightarrow x=\frac{5}{1000}(400)$$

$\rightarrow x=2$

En general,

El a por mil de N <> a‰ de N <> $\frac{a}{1000}\times N$

Aplicación 3

A un concierto de rock asisten 4500 personas, de las cuales el 24‰ tiene de 60 años a más. ¿Cuántas personas menores de 60 años asistieron?

Resolución

Las personas de 60 años a más son

$$\frac{24}{1000}\times 4500=108$$

Por lo tanto, las personas menores de 60 años son en total

$$4500-108=4392$$

Aplicación 4

En cierto año, la población de un país era de 32 millones; los nacimientos para dicho año fueron de 345 600. ¿Cuál fue el índice de natalidad, en tanto por mil, en dicho año?

Resolución

Sea el índice x‰.

$\rightarrow x‰(32\,000\,000)=345\,600$

$$\frac{x}{1000}(32\,000\,000)=345\,600$$

$x=10{,}8$

Por lo tanto, el índice de natalidad fue de 10,8‰.

2.2. PARTES POR MILLÓN (ppm)

Actualmente, las partes por millón se utilizan en concentraciones de contaminantes de agua y aire. Además, 1 millón = 1 000 000 = 10^6.

Ejemplo

El 7 ppm de 20 millones lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$\frac{x}{20\times 10^6}=\frac{7}{10^6} \rightarrow x=\frac{7}{10^6}(20\times 10^6)$$

$\rightarrow x=140$

En general,

El a ppm de N <> $\frac{a}{100}\times N$

Aplicación 5

Una muestra de 4 toneladas de suelo contiene 3,6 g de fertilizante. Calcule la concentración en ppm.

Resolución

Debemos tener en cuenta que

1 tonelada = 1000 kilogramos = 1 000 000 gramos

Entonces

4 toneladas = 4 000 000 gramos

Sea la concentración x ppm.

$$\frac{x}{10^6}\times(4\,000\,000)\text{g}=3{,}6\text{g}$$

$\rightarrow x=0{,}9$

Por lo tanto, la concentración resulta 0,9 ppm.

2.3. TANTO POR CIENTO (%)

Actualmente se utiliza en operaciones financieras y aplicaciones comerciales.

Ejemplos

- El 15 por ciento de 200 lo podemos calcular de la siguiente manera:

$$\frac{x}{200}=\frac{15}{100}$$

$$\rightarrow \quad x=\frac{15}{100}(200)$$

$$\therefore \quad x=30$$

- El 20 % de 300 lo podemos calcular de la siguiente forma:

$$\underset{\substack{\text{tanto}\\\text{por ciento}}}{20\%}\times \underset{\text{cantidad}}{300}=\frac{20}{100}\times 300=\underset{\text{porcentaje}}{60}$$

En general,

$$a \text{ por ciento de } N <> a\% \text{ de } N <> \frac{a}{100}\times N$$

Nota

El **porcentaje** es el resultado de aplicar el tanto por ciento a una determinada cantidad.

3 REGLA DEL TANTO POR CIENTO

Gráficamente, el tanto por ciento se puede expresar de la siguiente manera:

100 partes iguales

$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	...	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$	$\frac{1}{100}$

uno por ciento

Del gráfico

$$\frac{1}{100} <> 1\%$$

En general,

$$a \text{ por ciento} <> \frac{a}{100} <> a\%$$

Además,

$$100 \text{ por ciento} <> \frac{100}{100} <> 100\%$$

Nota

- Toda cantidad representa el 100% de sí misma, también se puede decir que el 100% de una cierta cantidad es la misma cantidad.

$$100\%N=\frac{100}{100}\times N=N$$

- Las palabras "de", "del" y "de los" nos indican en forma práctica, multiplicación.
- Las palabras "es", "son" y "será" nos indican igualdad en forma práctica.
- Al calcular el tanto por ciento de una cantidad, el símbolo % se puede simplificar con dos ceros de dicha cantidad.

Ejemplo

El 20 % de 600 es 120 <> $20\% \times 6\cancel{00}=120$

$\times$ $=$

Aplicación 6

De un conjunto de 400 personas, el 75% son varones y el resto son mujeres. Si se sabe que el 80% de los varones y el 15% de las mujeres fuman, ¿cuántas personas no fuman?

Resolución

Sabemos que el total de personas es 400.

Dado que el total representa el 100% y el 75% son varones, entonces el 25% serán mujeres.

- número de varones: 75%400 = 300
- número de mujeres: 25%400 = 100

Ordenamos la información en un cuadro.

	Varones	Mujeres
Fuman	80%300=240	15%100=15
No fuman	300−240=60	100−15=85

Por lo tanto, el número de personas que no fuman es 60+85=145.

Aplicación 7

Al iniciar una reunión, el 75% de los varones es igual al 60% de las mujeres. Luego llegan 70 varones y la cantidad de mujeres representa el 40% del total. ¿Cuántas personas había al inicio de la reunión?

Resolución

Sea V el número de varones y M el número de mujeres.

$$75\%V=60\%M \rightarrow \frac{V}{M}=\frac{4}{5}$$

$$\rightarrow V=4k;\quad M=5k$$

Luego llegan 70 varones y las mujeres representan 40%, entonces los varones representaran el 60% ya que todo es el 100%. Además las cantidades finales se pueden relacionar de la siguiente manera:

$$\frac{4k+70}{5k}=\frac{60\%}{40\%}$$

$$\frac{4k+70}{5k}=\frac{3}{2}$$

$$\rightarrow k=20$$

Por lo tanto, el número de personas al inicio es $9k=9(20)=180$

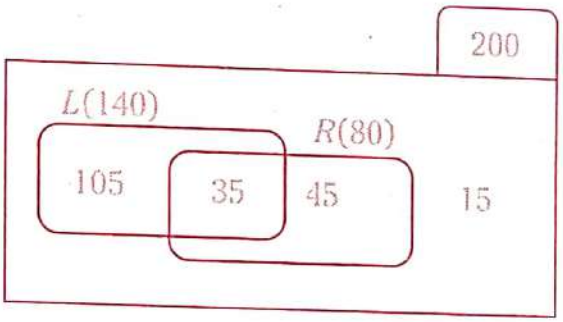
Aplicación 8

A una reunión asisten 200 personas, de las cuales el 70% usa lentes y el 40% usa reloj. Si el 25% de los que usan lentes también usa reloj, ¿cuántas personas no usan lentes ni reloj?

Resolución

Del enunciado tenemos que

- usan lentes (L): 70%200 = 140
- usan reloj (R): 40%200 = 80
- usan reloj y lentes: 25%140=35



Por lo tanto, las personas que no usan lentes ni reloj son 15.

3.1. EL TANTO POR CIENTO QUE REPRESENTA UNA CANTIDAD CON RESPECTO DE OTRA

En muchos problemas se pedirá qué tanto por ciento representa una cantidad de otra. Explicaremos con algunas aplicaciones para luego generalizar.

Aplicación 9

¿Qué tanto por ciento de 120 es 30?

Resolución

Usaremos las razones

120 es al 100% como 30 es al x%.

$$\rightarrow \frac{120}{100\%}=\frac{30}{x\%}$$

$$x\%=\frac{30\cdot 100\%}{120}$$

$$\therefore\ x\%=25\%$$

Otra forma

La forma algebraica de resolver el problema es la siguiente:

$$\underbrace{\text{¿Qué tanto por ciento}}_{x\%} \underset{\times}{\uparrow} \text{de 120 es} \underset{=}{\uparrow} \text{30?}$$

$$x\%120 = 30 \quad \rightarrow \quad x\% = \frac{30}{120}$$

Sabemos que $100\% = 1$

$$x\% = \frac{30}{120} \times 1 \quad \rightarrow \quad x\% = \frac{30}{120} \times 100\%$$

$$\therefore \quad x\% = 25\%$$

En general,

$$\boxed{x\%N = b \quad \rightarrow \quad x\% = \frac{b}{N} \times 100\%}$$

Ejemplo

Para averiguar qué tanto por ciento de 40 es 60 hacemos lo siguiente:

$$x\%40 = 60 \quad \rightarrow \quad x\% = \frac{60}{40} \times 100\%$$

$$\therefore \quad x\% = 150\%$$

Observación

Notamos que si la cantidad es mayor a la cantidad de referencia, el tanto por ciento que represente será mayor que el 100%.

Aplicación 10

Si el 20% de A es igual al 30% de B, ¿qué tanto por ciento de $(A+B)$ representa $(A-B)$?

Resolución

Según el enunciado, $20\%A = 30\%B$.

$$\frac{A}{B} = \frac{3}{2} \quad \rightarrow \quad A = 3k;\ B = 2k$$

Luego,

$$x\%(A+B) = (A-B)$$

$$x\% = \frac{(A-B)}{(A+B)} \times 100\%$$

$$x\% = \frac{k}{5k} \times 100\%$$

$$\therefore \quad x\% = 20\%$$

3.2. EQUIVALENCIAS DEL TANTO POR CIENTO EN FRACCIONES

En algunos casos conviene utilizar un equivalente del tanto por ciento expresado como fracción, con la finalidad de facilitar las operaciones o hacer posible una resolución mediante razones. Veamos algunas equivalencias:

$10\% <> \frac{10}{100} <> \frac{1}{10}$	$5\% <> \frac{5}{100} <> \frac{1}{20}$
$20\% <> \frac{20}{100} <> \frac{1}{5}$	$25\% <> \frac{25}{100} <> \frac{1}{4}$
$40\% <> \frac{40}{100} <> \frac{2}{5}$	$50\% <> \frac{50}{100} <> \frac{1}{2}$
$60\% <> \frac{60}{100} <> \frac{3}{5}$	$75\% <> \frac{75}{100} <> \frac{3}{4}$
$80\% <> \frac{80}{100} <> \frac{4}{5}$	$125\% <> \frac{125}{100} <> \frac{5}{4}$
$12{,}5\% <> \frac{1}{2}(25\%) <> \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right) <> \frac{1}{8}$	
$37{,}5\% <> 3(12{,}5\%) <> 3\left(\frac{1}{8}\right) <> \frac{3}{8}$	
$33{,}\widehat{3}\% <> \left(33 + \frac{3}{9}\right)\% <> \left(33 + \frac{1}{3}\right)\frac{1}{100} <> \frac{1}{3}$	
$66{,}\widehat{6}\% <> 2(33{,}\widehat{3}\%) <> \frac{2}{3}$	

Observe también que

$$200\% <> 2(100\%) <> 2$$

$$300\% <> 3(100\%) <> 3$$

Ejemplos

Calculemos mediante equivalencias.

- $33,\widehat{3}\%$ de 45

$$33,\widehat{3}\%(45) = \frac{1}{3}(45) = 15$$

- 12,5% de 16

$$12,5\%(16) = \frac{1}{8}(16) = 2$$

- 60% de 25

$$60\%(25) = \frac{3}{5}(25) = 15$$

Nota

Algunos equivalencias del tanto por ciento en fracción debemos conocer para poder desarrollar más rápido un problema.

- $25\% <> \frac{1}{4}$ cuarta parte
- $50\% <> \frac{1}{2}$ mitad
- $75\% <> \frac{3}{4}$ tres cuartas partes
- $33,\widehat{3}\% <> \frac{1}{3}$ tercera parte
- $66,\widehat{6}\% <> \frac{2}{3}$ dos terceras partes
- $12,5\% <> \frac{1}{8}$ octava parte

Aplicación 11

En una granja solo hay patos, gallinas y conejos. La cantidad de patos representa el 45% del total y la cantidad de conejos representa el $66,\widehat{6}\%$ de la cantidad de patos. ¿Qué tanto por ciento del total representa la cantidad de gallinas?

Resolución

Del enunciado tenemos que

- cantidad de patos: 45%
- cantidad de conejos:

$$66,\widehat{6}\%(45\%) = \frac{2}{3}(45\%) = 30\%$$

- cantidad de gallinas: $x\%$

Como el total representa el 100%,

$$\rightarrow \quad 45\% + 30\% + x\% = 100\%$$

$$\therefore \quad x\% = 25\%$$

3.3. OPERACIONES CON EL TANTO POR CIENTO

3.3.1. Adición

Para poder realizar la adición, los tantos por cientos se deben calcular de una misma cantidad, es decir

$$\boxed{a\%N + b\%N = (a+b)\%N}$$

Se deduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a\%N + b\%N &= (a\% + b\%)N \\ &= \left(\frac{a}{100} + \frac{b}{100}\right)N \\ &= \left(\frac{a+b}{100}\right)N \\ &= (a+b)\%N \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} 12\%(200) + 13\%(200) &= (12+13)\%(200) \\ &= 25\%(200) \\ &= \frac{1}{4}(200) = 50 \end{aligned}$$

Además,

$$N + x\%N = (100 + x)\%N$$

Demostración

Recuerde que $N = 100\%N$.

$$N + x\%N = 100\%N + x\%N$$

$$N + x\%N = (100 + x)\%N$$

Aplicación 12

El precio de un par de zapatos en el mes de noviembre era de P soles y para el mes de diciembre aumentó en 20%. Si el precio en diciembre es S/84, halle el valor de P.

Resolución

El precio en diciembre será

$$P + 20\%P = 84$$

$$100\%P + 20\%P = 84$$

$$120\%P = 84 \quad \rightarrow \quad \frac{120}{100}(P) = 84$$

$$\therefore \quad P = 70$$

3.3.2. Sustracción

Para poder realizar la sustracción, los tantos por cientos se deben calcular de una misma cantidad, es decir.

$$a\%N - b\%N = (a - b)\%N$$

Se deduce de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} a\%N - b\%N &= (a\% - b\%)N \\ &= \left(\frac{a}{100} - \frac{b}{100}\right)N \\ &= \left(\frac{a-b}{100}\right)N \\ &= (a - b)\%N \end{aligned}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} 27\%(200) - 7\%(200) &= (27 - 7)\%(200) \\ &= 20\%(200) \\ &= 40 \end{aligned}$$

Además,

$$N - y\%N = (100 - y)\%N$$

Demostración

Recuerde que $N = 100\%N$.

$$N - y\%N = 100\%N - y\%N$$

$$N - y\%N = (100 - y)\%N$$

Aplicación 13

El precio de un celular disminuye en 20% por lo cual se paga por él solo S/480. ¿Cuál era el precio del celular?

Resolución

Sea P el precio del celular.

$$P - 20\%P = 480$$

$$100\%P - 20\%P = 480$$

$$80\%P = 480$$

$$\rightarrow \quad \frac{80}{100}(P) = 480$$

$$\therefore \quad P = 600$$

3.3.3. Multiplicación

En la multiplicación de un tanto por ciento a un producto se cumple que

$$a\% \times (bN) = (a \times b)\%N$$

Se deduce de la siguiente manera:

$$a\% \times (bN) = \frac{a}{100} \times (bN)$$
$$= \frac{ab}{100} N$$
$$= (a \times b)\% N$$

Ejemplos

- $30\%(4N) = (4 \times 30)\% N = 120\% N$
- $3{,}5(2\% M) = (3{,}5 \times 2)\% M = 7\% M$

Caso particular

El $a\%$ del $b\%$ del $c\%$ de N es igual a $a\% \cdot b\% \cdot c\% \cdot N$

Ejemplos

- El 20% del 50% de 40 es

$$20\% \cdot 50\% \cdot (40) = \frac{1}{5} \times \frac{1}{2} \times 40 = 4$$

- El 5% del 25% del 10% de 2000 es

$$5\% \cdot 25\% \cdot 10\% \cdot 2000 = \frac{1}{20} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{10} \cdot 2000 = 2{,}5$$

Aplicación 14

Si al 15% del 20% de $5N$ le agregamos el 30% del 50% de $2N$, obtenemos 90. Calcule N.

Resolución

Según el enunciado tenemos

$$15\% 20\% (5N) + 30\% 50\% (2N) = 90$$
$$\rightarrow 15\% \frac{1}{5}(5N) + 30\% \frac{1}{2}(2N) = 90$$
$$15\% N + 30\% N = 90$$
$$45\% N = 90$$
$$\frac{45}{100} N = 90$$
$$\therefore N = 200$$

Aplicación 15

Marta invirtió S/2000 en un negocio, obteniendo una ganancia del 40%. Luego invirtió todo lo que tenía en un nuevo negocio y ganó el 20%. ¿Cuánto dinero tiene al final del segundo negocio?

Resolución

Después del primer negocio obtuvo

$$2000 + 40\%(2000) = (100+40)\%(2000)$$
$$= 140\%(2000)$$
$$= 2800$$

Luego del segundo negocio obtuvo

$$2800 + 20\% 2800 = (100+20)\%(2800)$$
$$= 120\%(2800)$$
$$= 3360$$

Por lo tanto, obtuvo 3360 soles.

Otra forma

Aumenta	Se obtiene
40% →	140%
20% →	120%

De ambos negocios se obtendrá

$$\overbrace{120\%}^{2.^{\circ}\text{ negocio}}\underbrace{140\%}_{1.^{er}\text{ negocio}}(2000) = 3360$$

A este proceso se le denomina aumentos sucesivos, el cual estudiaremos en detalle más adelante.

Aplicación 16

Carlos va de compras con S/600. Si gasta el 60% de su dinero en alimentos y el 20% del resto lo gasta en ropa, ¿cuánto le queda al final de ambas compras?

Resolución

Después de la primera compra le quedará

$$600-60\%(600)=(100-60)\%(600)$$
$$=40\%(600)$$
$$=240 \text{ soles}$$

Luego de la segunda compra le quedará

$$240-20\%240=80\%(240)=192$$

Por lo tanto, le quedará 192 soles.

Otra forma

Descuento	Queda
60% →	40%
20% →	80%

Luego de ambas compras le quedará

$$\overbrace{80\%}^{2.^{a}\text{ compra}}\underbrace{40\%}_{1.^{a}\text{ compra}}(600)=192$$

A este proceso se le denomina descuentos sucesivos, el cual estudiaremos en detalle más adelante.

3.4. PROBLEMAS SOBRE VARIACIÓN PORCENTUAL ($\Delta\%$)

La variación porcentual representa la diferencia entre una cantidad inicial y una cantidad final en términos de un tanto por ciento de la cantidad inicial.

$$\Delta\% = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{lo que aumenta o}\\ \text{lo que disminuye de}\\ \text{la cantidad inicial}\end{array}\right)}{(\text{cantidad inicial})}\times 100\%$$

Aplicación 17

Rosemary tiene 20 años. ¿En qué tanto por ciento se habrá incrementado dicha edad cuando cumple 32 años?

Resolución

Por dato, sabemos que

- edad inicial: 20
- edad final: 32
- lo que aumenta de la edad: $32-20=12$

Por lo tanto, la variación porcentual es

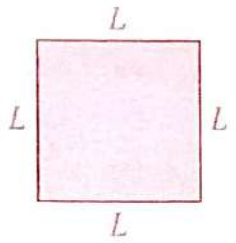
$$\Delta\% = \frac{12}{20}\times 100\% = 60\%$$

Aplicación 18

Si el lado de un cuadrado aumenta en 20%, ¿en qué tanto por ciento incrementa su área?

Resolución

Sea L el lado del cuadrado.

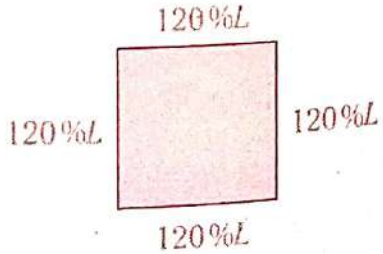


Área inicial

$L^2 = 100\%L^2$

El lado aumenta en 20%.

$$L+20\%L=120\%$$



El área final sería

$$120\%L\times 120\%L=144\%L^2$$

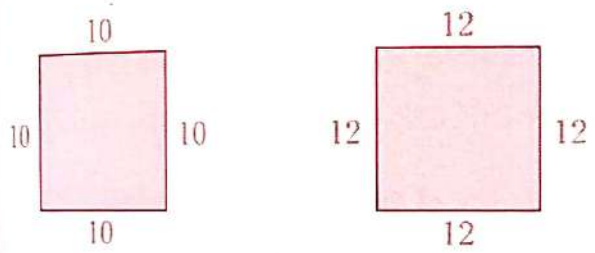
Por lo tanto, el incremento es

$$144\%L^2-100\%L^2=44\%L^2$$

Otra forma

Vamos a asumir un área inicial de 100, es decir, equivale al 100%; por ende, el lado del cuadrado será como 10.

Como el lado aumenta en 20%, el lado final será $10+20\%10=12$.



- Área inicial: $10^2=100<>100\%$
- Área final: $12^2=144<>144\%$

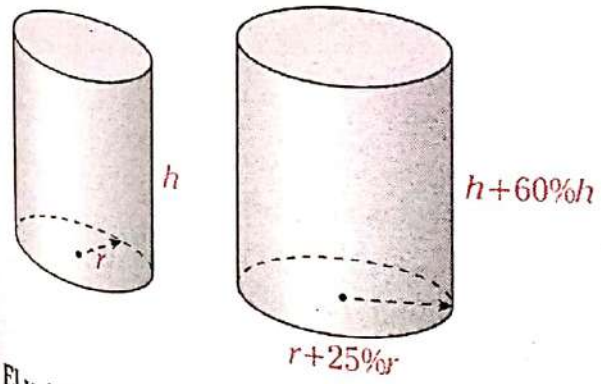
Por lo tanto, el incremento es del 44%.

Podemos observar que al asumir un total inicial como 100, es más fácil realizar la comparación para hallar el incremento.

Aplicación 19

Si el radio de un cilindro circular recto aumenta en 25% y su altura en 60%, ¿en qué tanto por ciento se incrementa su volumen?

Resolución



El volumen inicial es

$$\pi r^2 h=100\%(\pi r^2 h)$$

El volumen final es

$$\pi(125\%r)^2(160\%h)=\pi\left(\frac{5}{4}r\right)^2(160\%h)$$
$$=\pi\frac{25}{16}r^2(160\%h)$$
$$=250\%\pi r^2 h$$

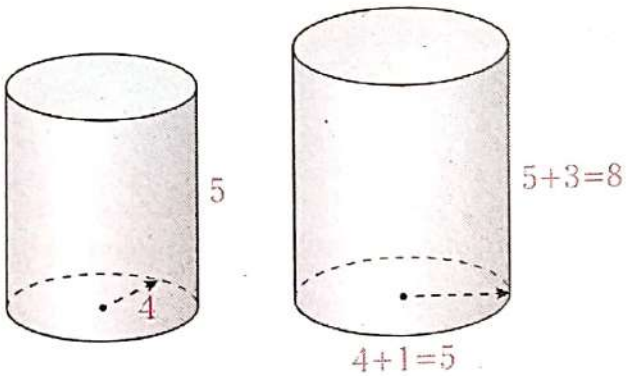
La diferencia de volúmenes será

$$250\%\pi r^2 h-100\%(\pi r^2 h)=150\%\pi r^2 h$$

Por lo tanto, el incremento es de 150%.

Otra forma

Como el radio aumentará en $25\%=\frac{1}{4}$, asumiremos un radio inicial de 4; para la altura, que aumentará en $60\%=\frac{3}{5}$, asumiremos una altura inicial de 5.



El volumen inicial es

$$\pi(4^2)(5)=80\pi$$

El volumen final es

$$\pi(5^2)(8)=200\pi$$

El volumen aumentó en

$$200\pi-80\pi=120\pi$$

Por lo tanto, el incremento es

$$\Delta\%=\frac{120\pi}{80\pi}\times 100\%$$

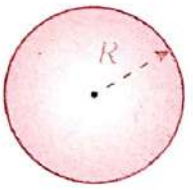
$$\Delta\%=150\%$$

Aplicación 20

¿Por cuánto se debe multiplicar el radio de un círculo para aumentar en un 125% su área?

Resolución

Sea R el radio del círculo.



El área inicial del círculo es πR^2.

Si al radio lo multiplicamos por k, el área final será $\pi(kR)^2$.

Sabemos que el área aumenta en 125%, es decir, su área final será el 100%+125%=225% del área inicial.

$$\rightarrow \ \pi(kR)^2 = 225\%\pi R^2$$

$$\pi k^2 R^2 = \frac{225}{100}\pi R^2$$

$$k = \frac{15}{10} = \frac{3}{2}$$

Por lo tanto, al radio se debe multiplicar por 3/2.

4 ▸ DESCUENTOS Y AUMENTOS SUCESIVOS

4.1. DESCUENTOS SUCESIVOS

Los descuentos sucesivos son aquellos que se van realizando sobre la cantidad que va quedando luego de realizar un descuento.

Aplicación 21

¿A qué descuento único equivalen dos descuentos sucesivos del 20% y 25% o del 20%+25%?

Resolución

Supongamos que la cantidad inicial es N.

Al realizar el primer descuento quedaría

$$N-20\%N=80\%N$$

El segundo descuento se realizará sobre el $80\%N$ que queda.

Entonces, tendremos

$$80\%N-25\%(80\%N)$$

que equivale a

$$100\%(80\%N)-25\%(80\%N)$$

Al final queda

$$75\%(80\%N)=60\%N$$

Por lo tanto, el descuento único sería

$$N-60\%N=40\%N$$

> ▸▸ Observación
> Note que no se pueden sumar los tanto por ciento de descuento, ya que no afectan a una misma cantidad.

En resumen podemos hacer lo siguiente:

Descuento	Queda
20%	80%
25%	75%

Al final queda $75\%(80\%N)=60\%N$

Por lo tanto, el descuento único es

$$N-60\%N=40\%N$$

Aplicación 22

Una persona desea adquirir un artefacto cuyo precio es de S/800. En cierta tienda, logra un descuento de 10% por parte del vendedor; mas no contento con ello, se acerca donde el gerente, quien le hace un descuento del 15% sobre el precio que le dio el vendedor. Indique cuánto pagó dicha persona por el artefacto y cuál es el descuento único que se aplicó, expresado en tanto por ciento.

Resolución

Se puede observar que

Descuento	Queda
10%	90%
15%	85%

Al final pagó $85\%90\%(800)$

$\rightarrow$ $76{,}5\%(800)=612$ soles

El descuento único será

$$100\%(800)-76{,}5\%(800)=23{,}5\%(800)$$

Por lo tanto, pagó 612 soles y el descuento único es 23,5%.

Corolario

Para dos descuentos sucesivos del $a\%$ y $b\%$, el descuento único se calcula así:

$$\text{descuento único}=\left[a+b-\frac{ab}{100}\right]\%$$

Demostración

Asumimos que inicialmente tenemos 100% y aplicamos los descuentos.

Descuento	Queda
$a\%$	$(100-a)\%$
$b\%$	$(100-b)\%$

Al final pagó $(100-b)\%(100-a)\%$

$$\begin{pmatrix}\text{descuento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=100\%-(100-b)\%(100-a)\%$$

$$=[100-(100-b)(100-a)\%]\%$$

$$=\left[100-\frac{(100-b)(100-a)}{100}\right]\%$$

$$=\left[\frac{(100)^2-(100^2-100b-100a+ab)}{100}\right]\%$$

$$=\left[\frac{100a+100b-ab}{100}\right]\%$$

$$\therefore\ \begin{pmatrix}\text{descuento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=\left[a+b-\frac{ab}{100}\right]\%$$

De la aplicación 21 se tendría $a=20\%$ y $b=25\%$

$$\begin{pmatrix}\text{descuento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=\left[20+25-\frac{20\times 25}{100}\right]\%$$

$$\begin{pmatrix}\text{descuento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=40\%$$

Luego, si fueran tres descuentos sucesivos del $a\%$, $b\%$ y $c\%$, tendríamos

$$\begin{pmatrix}\text{descuento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=100\%-(100-a)\%(100-b)\%(100-c)\%$$

$$\begin{pmatrix}\text{descuento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=\left[100-\frac{(100-a)(100-b)(100-c)}{(100)^2}\right]\%$$

En general, podríamos deducir que si fueran n descuentos sucesivos, el descuento único sería

$$\left[100-\frac{(100-a)(100-b)(100-c)\ldots(100-p)}{(100)^{n-1}}\right]\%$$

4.2. AUMENTOS SUCESIVOS

Los aumentos sucesivos son aquellos que se van realizando respecto a la cantidad que se tiene luego de realizar un aumento.

Aplicación 23

¿A qué aumento único equivalen dos aumentos sucesivos del 20% y 30%?

Resolución

Supongamos que la cantidad inicial es N.

Al realizar el primer aumento se tendrá

$$N+20\%N=120\%N$$

Luego se realiza el segundo aumento, que es sobre el $120\%N$.

$$120\%N+30\%(120\%N)$$

$$100\%(120\%N)+30\%(120\%N)$$

Al final

$$130\%(120\%N)=156\%N$$

Por lo tanto, el aumento único sería

$$156\%N-N=56\%N$$

Observación

Al igual que en el descuento único, los tantos por ciento de aumento no se pueden sumar, ya que no afectan a una misma cantidad.

En resumen,

Aumento	Se tiene
20%	120%
30%	130%

Al final pagó $130\%(120\%N)=156\%N$

Al final se tiene que

$$130\%(120\%N) = 156\%N$$

$\therefore$ aumento único$=156\%N-N=56\%N$

Aplicación 24

Al inicio de un año, un empleado recibe un aumento del 20% de su sueldo y, en el mes de abril del mismo año, recibe un nuevo aumento del 10%, respecto del nuevo sueldo que percibe. ¿En qué tanto por ciento aumentó su sueldo en relación con el que recibió el año pasado?

Resolución

Sea N el sueldo hasta fines del año pasado.

Se observa que

Aumento	Se tiene
20%	120%
30%	110%

Se tendrá al final $110\%(120\%N)=132\%N$

Luego se tendrá que

$$\text{aumento único}=132\%N-100\%N=32\%N$$

Corolario

Para dos aumentos sucesivos del $a\%$ y $b\%$, el descuento único se calcula así:

$$\text{aumento único} = \left[a+b+\frac{ab}{100}\right]\%$$

Demostración

Asumimos que inicialmente tenemos 100%; aplicamos los aumentos.

Descuento	Queda
$a\%$	$(100+a)\%$
$b\%$	$(100+b)\%$

Al final se tendrá $(100+b)\%(100+a)\%$

$$\begin{pmatrix}\text{aumento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=(100+b)\%(100+a)\%-100\%$$

$$\left[\frac{(100+b)(100+a)}{100}-100\right]\%$$

$$\left[\frac{100^2+100b+100a+ba-100^2}{100}\right]\%$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{aumento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=\left[a+b+\frac{ab}{100}\right]\%$$

Otra forma de resolver la aplicación 23 utilizando la fórmula anterior sería la siguiente:

Tendríamos que $a=20\%$ y $b=30\%$

$$\begin{pmatrix}\text{aumento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=\left[20+30+\frac{20\times 30}{100}\right]\%$$

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{aumento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=56\%$$

Si fueran tres aumentos sucesivos de $a\%$, $b\%$ y $c\%$ tendríamos

$$\begin{pmatrix}\text{aumento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=(100+a)\%(100+b)\%(100+c)\%-100\%$$

$$\begin{pmatrix}\text{aumento}\\ \text{único}\end{pmatrix}=\left[\frac{(100+a)(100+b)(100+c)}{(100)^2}-100\right]\%$$

En general, podríamos deducir que si fueran n aumentos sucesivos, el aumento único sería

$$\boxed{\left[\frac{(100+a)(100+b)(100+c)...(100+p)}{(100)^{n-1}}-100\right]\%}$$

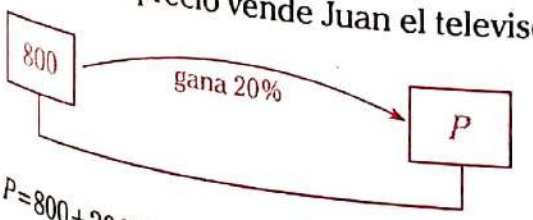
Aplicación 25

Juan compra un televisor en S/800 y se lo vende a Pedro con el 20% de ganancia; luego de un año, Pedro le vende el mismo televisor a Juan con una rebaja del 20%. Determine si Juan ganó o perdió.

Resolución

Aparentemente se podría pensar que no se gana ni se pierde, pero tengamos presente que la ganancia y el descuento se aplican sobre cantidades diferentes.

Hallemos a qué precio vende Juan el televisor.



$P=800+20\%(800)$

$P=960$

Pedro compró el televisor a S/960. Al vendérselo a Juan le realizará un descuento del 20%.

$M=960-20\%(960)$

$M=80\%\ (960)$

$M=768$

Por lo tanto, Juan ganó $960-768=192$ soles.

5 ▸ APLICACIONES COMERCIALES DEL TANTO POR CIENTO

En toda actividad comercial, en la cual se involucra la compra y venta de artículos, se dan relaciones entre los elementos más comunes que surgen en la actividad misma.

Caso 1

Cuando el precio de venta (P_V) está por debajo del precio de costo (P_C).

Esto significa que estamos perdiendo. Si bien es cierto que en un negocio la finalidad es obtener ganancia, hay sucesos fortuitos que muchas veces van a determinar que se venda por debajo del precio de costo. Esto sucede muy a menudo con los pequeños agricultores, los cuales, muchas veces por el deterioro que sufren sus comestibles, los venden a un precio menor al precio de costo.

Gráficamente tendríamos lo siguiente:

Entonces

$$\boxed{\text{Si } P_V<P_C \rightarrow P_V=P_C-(\text{pérdida})}$$

Caso 2

Cuando el precio de venta y el precio de costo son iguales.

Muchas veces se tienen artículos para vender, pero luego de cierto tiempo se observa que dicho artículo no tiene aceptación en el mercado, así que, por lo menos, se puede vender a costo para recuperar la inversión.

Entonces

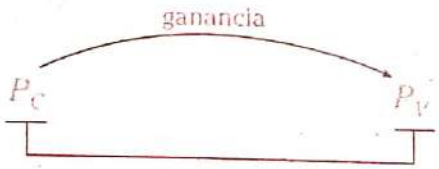
Si $P_V = P_C$, no hay ganancia ni pérdida.

Caso 3

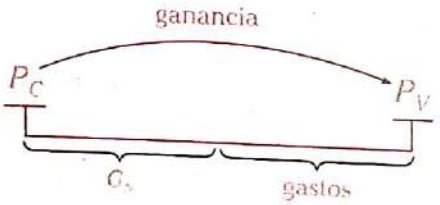
Cuando el precio de venta es mayor que el precio de costo.

Es el caso más común, por el mismo sentido que tiene una actividad comercial, que es el de percibir una determinada ganancia, la cual en muchos casos (ganancia bruta: G_B) es solo aparente, ya que muchas veces se han tenido gastos, que al ser deducidos nos dará una ganancia real (ganancia neta: G_N).

Gráficamente tendríamos lo siguiente:



Luego, para la ganancia o ganancia bruta tendremos



Cuando $P_V > P_C$, se cumple que

$$G_N = G_B - \text{gastos}$$
$$P_V = P_C + \text{ganancia}$$

donde

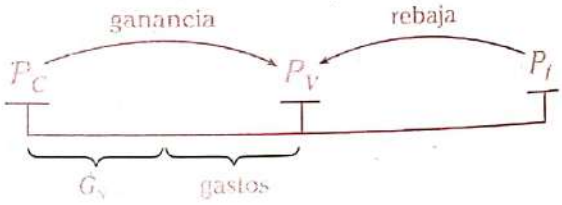
- G_B: ganancia o ganancia bruta
- G_N: ganancia neta

También debemos tener presente que muchas veces el comerciante pondrá un precio a su producto (precio fijado: P_f), al cual, generalmente, el cliente no compra, sino que previamente pide una rebaja.

$$P_V = P_f - (\text{rebaja})$$

donde P_f es el precio fijado o precio de lista (P_L).

Finalmente, toda esta parte se podría representar en un solo gráfico.



Nota

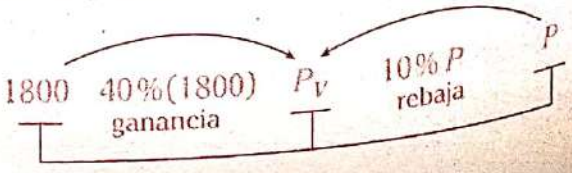
- Las ganancias se representan, generalmente, como un tanto por ciento del precio de costo.
- Las rebajas se representan, generalmente, como un tanto por ciento del precio fijado.

Aplicación 26

Iván compró un equipo de sonido en S/1800. ¿A cuánto debe ofrecerlo si al momento de la venta efectúa una rebaja del 10% y aún así gana el 40% del costo?

Resolución

Sea P el precio a ofrecer.



En el gráfico, se observa que

$$P_V=1800+40\%(1800)=P-10\%(P)$$

$$140\%(1800)=90\%P$$

$$P=2800$$

Por lo tanto, se debe ofrecer a S/2800.

Aplicación 27

Para fijar el precio de un artículo se aumentó su costo en 40%, pero al venderse se hizo una rebaja del 25%. ¿Qué tanto por ciento del costo se ganó de manera real si sus gastos fueron del 2% del precio de costo?

Resolución

Sea P_C el precio de costo.

Hallemos el precio fijado.

$$P_f=P_C+40\%P_C$$

$$P_f=140\%P_C$$

Hallemos el precio de venta.

$$P_V=P_f-\text{rebaja}$$

Reemplazamos.

$$P_V=140\%P_C-25\%(140\%P_C)$$

$$P_V=75\%140\%P_C$$

$$P_V=105\%P_C$$

Luego,

$$G_B=P_V-P_C=105\%P_C-P_C$$

$$G_B=5\%P_C$$

Pero

$$G_N+\text{gastos}=G_B$$

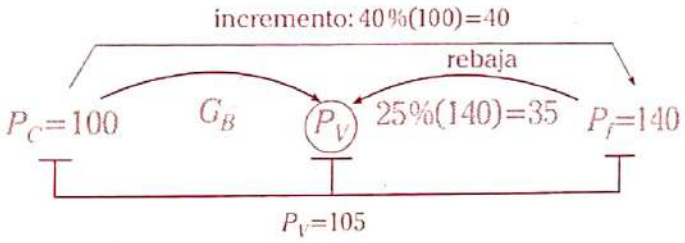
$$G_N+2\%P_C=5\%P_C$$

$$\therefore\ G_N=3\%P_C$$

Por lo tanto, se ganó el $3\%P_C$.

Otra forma

Asumimos que el $P_C=100$.



Entonces obtenemos que $G_B=5$.

Pero

$$G_B=G_N+\text{gastos}$$

$$5=G_N+2\%(100)$$

$$5=G_N+2$$

$$G_N=3$$

Observamos que esta cantidad representa el 3% del precio de costo.

$$\therefore\ G_N=3\%P_C$$

LECTURA

¿Cuánta agua hay en el planeta?

Desde el espacio, cualquier imagen de nuestro planeta muestra que la Tierra es un planeta azul, y es que el 70% de su superficie está cubierta por agua y solo 30% es tierra firme. Pero en realidad el agua que se ve es una delgadísima película con respecto al tamaño del planeta; para darnos una idea, si mojamos una naranja, la capa que permanece en la cáscara equivale a la toda el agua que existe en la Tierra. El nuestro no es un planeta de agua, es apenas un planeta mojado. No obstante, esta poca agua es la que ha hecho posible la vida como hoy la conocemos.

EL AGUA EN EL MUNDO

70%
de su superficie
está cubierta de agua

97,5%
es agua salada

2,5%
es agua dulce

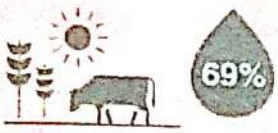
Del total de **agua dulce** en el mundo

70%
son glaciares, nieve o hielo

casi el **30%**
son aguas subterráneas de difícil acceso

menos del **1%**
es agua disponible para consumo humano y los ecosistemas

Su extracción por **uso** es



Sector agropecuario

Sector industrial

Sector municipal

Adaptado de "¿Cuánta agua hay en el planeta?". En <https://agua.org.mx/>.

Problemas resueltos

Problema 1

Si el 20% del 30% de N es igual al 40% del 45% de M, ¿qué tanto por ciento de $N+M$ es $N-M$?

Resolución

Aplicamos el tanto por ciento.

$$20\%30\%N = 40\%45\%M$$

$$\frac{N}{M} = \frac{40\%45\%}{20\%30\%} \rightarrow \frac{N}{M} = \frac{3}{1}$$

$\rightarrow N = 3k;\ M = k$

Sea $x\%$ el tanto por ciento que nos piden.

$$x\% = \left(\frac{N-M}{N+M}\right) \times 100\% \quad \rightarrow x\% = \frac{2k}{4k} \times 100\%$$

$\therefore\ x\% = 50\%$

Problema 2

De un grupo de estudiantes, el 40% postula a Medicina, y de estos el 30% son mujeres. De los que no postulan a Medicina, el 70% son varones. ¿Qué tanto por ciento del total de estudiantes son mujeres?

Resolución

Ordenamos los datos del problema en una tabla. Debemos tener en cuenta que el total de estudiantes es el 100%.

	Varones	Mujeres	
Medicina	28%	$\overbrace{30\%}^{\text{dato}}(40\%) = 12\%$	40% (dato)
No Medicina	$\overbrace{70\%}^{\text{dato}}(60\%) = 42\%$	18%	60%

Por lo tanto, las mujeres son 12%+18%=30%.

Problema 3

En una reunión hay 20 varones y 12 mujeres. ¿Cuántos varones deben llegar para que estos representen el 75% del total?

Resolución

Sea x la cantidad de varones que deben llegar. Si los varones al final representan el 75%, entonces las mujeres representarán el 25%; además, la relación de las cantidades de varones y mujeres al final será de la siguiente manera:

$$\frac{20+x}{12} = \frac{75\%}{25\%}$$

$$\frac{20+x}{12} = \frac{3}{1}$$

$$20 + x = 36$$

$\therefore\ x = 16$

Problema 4

Claudia va de compras a un centro comercial y gasta el 25% de su dinero en una blusa y el 20% del resto en un reloj. Si luego de dichas compras le queda S/144, ¿cuánto le costó la blusa?

Resolución

Sea N la cantidad de dinero que tiene al inicio; si gasta en la blusa el $25\%N$, le queda $75\%N$. Luego gasta el $20\%(75\%N)$, quedándose con $80\%(75\%N)$; por dato sabemos que

$$80\%(75\%N) = 144$$

$$\frac{80}{100} \times \frac{75}{100} \times N = 144$$

$\rightarrow\ N = 240$

Por lo tanto, la blusa le costó

$$25\%(240) = 60 \text{ soles}$$

Problema 5

¿Cuál es el precio que se debe fijar a un artículo, cuyo precio de costo es S/180, para que a pesar de rebajar un 20% aún se gane el 60% del costo?

Resolución

Teniendo en cuenta que, por lo general, la ganancia es un tanto por ciento del precio de costo.

$$P_V = P_C + \text{ganancia} \quad \rightarrow \quad P_V = 180 + 60\%180$$

$$\rightarrow \quad P_V = 288$$

Además, $P_F - \text{descuento} = P_V$

Reemplazamos el P_V.

$$P_F - 20\%P_F = 288$$

$$80\%P_F = 288$$

$$\therefore \quad P_F = 360 \text{ soles}$$

Problema 6

Se vendió un artículo con una ganancia de m. Halle el precio de venta de dicho artículo si se sabe que su costo representa el $m\%$ de su precio de venta.

Resolución

En la venta se cumple que

$$P_V = P_C + G$$

$$P_V = P_C + m \qquad (*)$$

Además, $P_C = m\%P_V$.

Luego reemplazamos en $(*)$.

$$P_V = m\%P_V + m$$

$$100\%P_V = m\%P_V + m$$

$$(100 - m)\%P_V = m$$

$$\frac{(100-m)}{100}P_V = m$$

$$\therefore \quad P_V = \frac{100m}{100-m}$$

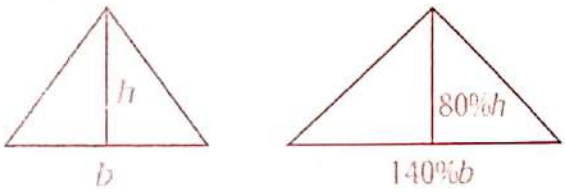
Problema 7

Si la base de un triángulo aumenta en 40% y la altura relativa a dicha base disminuye en 20%, entonces el área varía en 6 cm^2. ¿Cuál fue el área original del triángulo?

Resolución

El área de un triángulo se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Área} = \frac{\text{base} \times \text{altura}}{2}$$



El área inicial ($\mathbb{A}_i$) es

$$\mathbb{A}_i = \frac{bh}{2} = 100\%\left(\frac{bh}{2}\right)$$

El área final ($\mathbb{A}_f$) es

$$\mathbb{A}_f = \frac{140\%b \cdot 80\%h}{2} = 112\%\left(\frac{bh}{2}\right)$$

Sabemos que el área varía en 6 cm^2.

$$\mathbb{A}_f - \mathbb{A}_i = 6$$

$$112\%\left(\frac{bh}{2}\right) - 100\%\left(\frac{bh}{2}\right) = 6$$

$$12\%\left(\frac{bh}{2}\right) = 6 \quad \rightarrow \quad bh = 50$$

Por lo tanto, el área inicial es

$$\mathbb{A}_i = \frac{50}{2} = 25$$

Problema 8

En una conferencia de arte y cultura, el 60% son varones, de los cuales el 20% son extranjeros. De las mujeres, el 90% son peruanas. Si las cantidades de varones peruanos y mujeres extranjeras suman 234, ¿cuántas mujeres peruanas hay en dicha conferencia?

Resolución

Sea N el total de personas.

	Peruanos	Extranjeros	Total
Varones	$48\%N$	$20\%(60\%N)$ $=12\%N$	$60\%N$ (dato)
Mujeres	$90\%(40\%N)$ $=36\%N$	$4\%N$	$40\%N$

Además,

$$48\%N+4\%N=234$$

$$52\%N=234$$

$$\rightarrow N=450$$

Por lo tanto, la cantidad de mujeres peruanas es $36\%450=162$.

Problema 9

Si el 20% del 30% de N sumado al 80% del 40% de $2N$ es igual a N disminuido en el 60% de 240, calcule el valor de N.

Resolución

Aplicamos el tanto por ciento.

$$20\%30\%N+80\%40\%(2N)=N-60\%240$$

$$\rightarrow \frac{20}{100}\cdot 30\%N+\frac{80}{100}\cdot 40\%2N=N-\frac{60}{100}\cdot 240$$

$$6\%N+64\%N=N-144$$

$$70\%N=100\%N-144$$

$$144=30\%N$$

$$\therefore N=480$$

Problema 10

En una empresa donde solo se trabaja en turno mañana y tarde, se sabe que el 60% de la cantidad de varones es igual al 75% de la cantidad de mujeres. El 25% de las mujeres y el 20% de los varones trabajan en el turno tarde. ¿Qué tanto por ciento de las mujeres que trabajan en el turno mañana son los varones que trabajan en el turno tarde?

Resolución

Sean

- cantidad de varones: V
- cantidad de mujeres: M

$$\rightarrow 60\%V=75\%M$$

$$\frac{V}{M}=\frac{75}{60}$$

$$V=75k;\ M=60k$$

	Mañana	Tarde	Total
Varones	$60k$	$20\%(75k)=15k$	$75k$
Mujeres	$45k$	$25\%(60k)=15k$	$60k$

Sea x el tanto por ciento que necesitamos calcular.

$$\rightarrow x\%45k=15k$$

$$\therefore x=33,\widehat{3}$$

Problema 11

El ahorro de Fernando es el doble del ahorro de Alberto. Si el 40% del ahorro de Fernando, sumado al 60% del ahorro de Alberto, resulta S/420, ¿cuánto ahorró Fernando?

Resolución

Sean

- ahorro de Fernando: $2A$
- ahorro de Alberto: A

Además,

$$40\%(2A)+60\%A=420$$

$$80\%A+60\%A=420$$

$$140\%A=420$$

$$\rightarrow A=300$$

Por tanto, el ahorro de Fernando es

$$2\times 300=600 \text{ soles}$$

Problema 12

El 2 por 7 de N es igual al 5 por 9 del 4 por 5 de $(N-20)$. Calcule el valor de N.

Resolución

Aplicamos el tanto por cuanto.

$$\rightarrow \frac{2}{7}\times N=\frac{5}{9}\times\frac{4}{5}\times(N-20)$$

$$\frac{1}{7}\times N=\frac{2}{9}\times(N-20)$$

$$9N=14(N-20)$$

$$\therefore \quad N=56$$

Problema 13

Un padre de familia distribuye su sueldo de la siguiente manera: 40 % para alimentos, 60 % del resto para educación, 25 % del nuevo resto para ropa y lo que queda lo ahorra. Si lo que corresponde a los alimentos excede a lo que ahorra en S/352, ¿cuánto corresponde a educación?

Resolución

Sea $100k$ el sueldo.

	Total=100k	Resto
Alimento	$40\%(100k)=40k$	$60\%k$
Educación	$60\%(60k)=36k$	$24k$
Ropa	$25\%(24k)=6k$	$18k$
Ahorro	$18k$	

Por dato

$$40k-18k=352$$

$$\rightarrow k=16$$

Por lo tanto, lo que corresponde a educación es

$$36\times16=576 \text{ soles}$$

Problema 14

Un concierto inicia con N personas; luego de unas horas, el 40 % del total más 200 personas se retiran. Pasadas unas horas más, el 80 % de las personas restantes más 40 personas se retiran, quedando 220 personas. Halle el valor de N.

Resolución

Al retirarse el $40\%N+200$, los que quedan son $60\%N-200$.

Luego se retira el $80\%(60\%N-200)+40$; los que quedan son $20\%(60\%N-200)-40$.

Pero sabemos que las personas que quedan al final son 220, entonces

$$20\%(60\%N-200)-40=220$$

$$\therefore \quad N=2500$$

Problema 15

Fabrizio es un comerciante y observa que si el precio de cada artículo disminuye en 20 %, sus ingresos aumentan 4 %. ¿En cuánto varía la cantidad de artículos vendidos?

Resolución

Sean

- ingresos: I
- precio de cada artículo: P
- cantidad de artículos vendidos: Q

Se cumple que $I=P\times Q$.

Por condición del problema tenemos que

$$104\%I=80\%P\times(100+x)\%Q$$

Reemplazamos el valor de $I=P\times Q$.

$$104\%P\times Q=80\%P\times(100+x)\%Q$$

$$\frac{104}{100}=\frac{80}{100}\times\frac{(100+x)}{100}$$

$$\rightarrow x=30$$

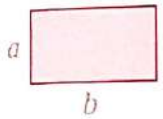
Por lo tanto, la cantidad de artículos vendidos aumenta en 30 %.

Problema 16

Si el largo de un rectángulo aumenta en 40% y su ancho disminuye en 30%, ¿cómo varía su área?

Resolución

Al inicio



Área$=ab=100\%ab$

El largo aumenta en 40% y el ancho disminuye en 30%.

Área$=70\%a\,140\%b$

Área$=98\%ab$

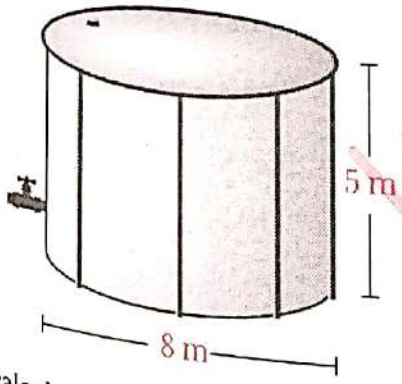
Comparamos el área inicial y final.

$100\%ab-98\%ab=2\%ab$

Por lo tanto, el área disminuye en 2%.

Problema 17

El siguiente reservorio de agua abastece a una pequeña población de habitantes.



Se ha calculado que luego de un tiempo la población aumentará y se requiere de un reservorio con un radio mayor en un 25% y una altura mayor en 20%. ¿Qué tanto por ciento más será el volumen del nuevo reservorio?

Resolución

Para calcular el volumen (V) de un cilindro se utiliza la siguiente fórmula: $V=\pi R^2h$.

El volumen del primer reservorio es

$V_1=\pi 4^2\cdot 5=80\pi$

Para el segundo reservorio se considera un radio mayor en 25%=1/4.

$\rightarrow\ R=4+1=5$

También se considere un altura mayor en 20%=1/5.

$\rightarrow\ h=5+1=6$

El volumen del segundo reservorio es

$V_2=\pi 5^2\cdot 6=150\pi$

El volumen del segundo es mayor que el primero en $150\pi-80\pi=70\pi$.

Por lo tanto, el tanto por ciento sería

$$\frac{70\pi}{80\pi}\times 100\%=87{,}5\%$$

Problema 18

En la construcción de una piscina olímpica, se presenta la obra como se muestra en el gráfico.

Sin embargo, las medidas oficiales de una piscina olímpica son 50 m de largo, 1,8 m de profundidad y 21 m de ancho como mínimo. Así que el contratista decide que se debe corregir la profundidad, el largo y que el ancho sea de 24 m. ¿Qué tanto por ciento de volumen aumentará la obra inicial para cumplir el pedido del contratista?

Resolución

Sabemos que

- volumen inicial: $40\times 20\times 1{,}6=1280\ \text{m}^3$
- volumen final: $50\times 24\times 1{,}8=2160\ \text{m}^3$

Entonces, el volumen de la piscina aumentó en

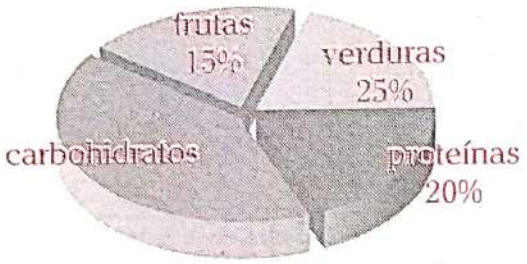
$2160\ \text{m}^3-1280\ \text{m}^3=880\ \text{m}^3$

Por lo tanto, la variación porcentual aumenta en

$$\frac{880}{1280}\times 100\%=68{,}75\%$$

Problema 19

La dieta diaria de Abigaíl se muestra en el siguiente gráfico:



Si la suma de las cantidades de carbohidratos y frutas excede a la cantidad de proteínas en 175 gramos, ¿cuántos gramos corresponde a verduras?

Resolución

Sea N la cantidad de gramos en total, entonces

- cantidad de gramos en frutas: $15\%N$
- cantidad de gramos en verduras: $25\%N$
- cantidad de gramos en proteínas: $20\%N$

Para completar el 100%, la cantidad de gramos en carbohidratos será $40\%N$.

Además,

$$40\%N + 15\%N - 20\%N = 175$$

$$35\%N = 175$$

$$\rightarrow \quad N = 500$$

Por lo tanto, la cantidad de gramos de verdura es $25\%500 = 125$.

Problema 20

De un recipiente lleno de vino se extrae el 20% y se reemplaza con agua; luego se extrae nuevamente el 20% y se reemplaza con agua. Si la cantidad de vino que queda al final es 32 litros, ¿cuántos litros de vino había al inicio?

Resolución

Sea V la capacidad del recipiente.

Como se extrae y solo se reemplaza con agua, entonces el vino pierde sucesivamente 20% y 20%.

Lo que queda de vino es

$$80\%80\%V = 32$$

$$\rightarrow \quad \frac{80}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot V = 32$$

$$\therefore \quad V = 50 \text{ L}$$

Problema 21

Una tienda A ofrece 3 descuentos sucesivos del 10%, 20% y 25%. Una tienda B ofrece 3 descuentos sucesivos del 15%, 20% y 20%. Halle la diferencia de los descuentos únicos.

Resolución

El primer descuento único es

$$D_{u(1)} = 100\% - (100-10)\%(100-20)\%(100-25)\%$$

$$D_{u(1)} = 100\% - \frac{90}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot 75\%$$

$$D_{u(1)} = 46\%$$

El segundo descuento único es

$$D_{u(2)} = 100\% - (100-15)\%(100-20)\%(100-20)\%$$

$$D_{u(2)} = 100\% - \frac{85}{100} \cdot \frac{80}{100} \cdot 80\%$$

$$D_{u(2)} = 45{,}6\%$$

Por lo tanto, la diferencia de los descuentos es

$$46\% - 45{,}6\% = 0{,}4\%$$

Problema 22

La cantidad de sal en el agua de cierto río es de 0,45‰ y la cantidad de sal en cierto mar es de 3‰. Se toma 40 litros de agua de río y 20 litros de agua de mar. ¿En cuántos gramos excede la cantidad de sal de agua de mar a la cantidad de sal de río en lo extraído?

Resolución

Debemos tener en cuenta que

- 1 litro = 1000 gramos
- 40 litros = 40 000 gramos
- 20 litros = 20 000 gramos

Luego, aplicamos el tanto por mil.

Calculamos la cantidad de sal en agua de río.

$$0{,}45‰\,40\,000=\frac{0{,}45}{1000}\times 40\,000=18$$

Calculamos la cantidad de sal en agua de mar.

$$3‰\,20000=\frac{3}{1000}\times 20\,000=60$$

Por lo tanto, $60-18=42$.

Problema 23

El límite máximo permisible de concentración del carbonato de calcio ($CaCO_3$) en agua potable es de 300 ppm; los rangos se muestran en la siguiente tabla:

Concentración de $CaCO_3$ (ppm)	Interpretación
0 - 75	agua suave
75 - 150	agua poco dura
150 - 300	agua dura
mayor de 300	agua muy dura

Se tiene una muestra de 25 mg de agua y se detecta 0,01 mg de $CaCO_3$. Calcule la concentración en ppm e indique si se permitiría usarla como agua potable.

Resolución

Aplicamos las partes por millón (ppm) y calculamos la concentración.

$$\frac{0{,}01}{25}\times 10^6 \text{ ppm} = 400 \text{ ppm}$$

Como el límite máximo permisible es 300 ppm, entonces no se permite usar como agua potable.

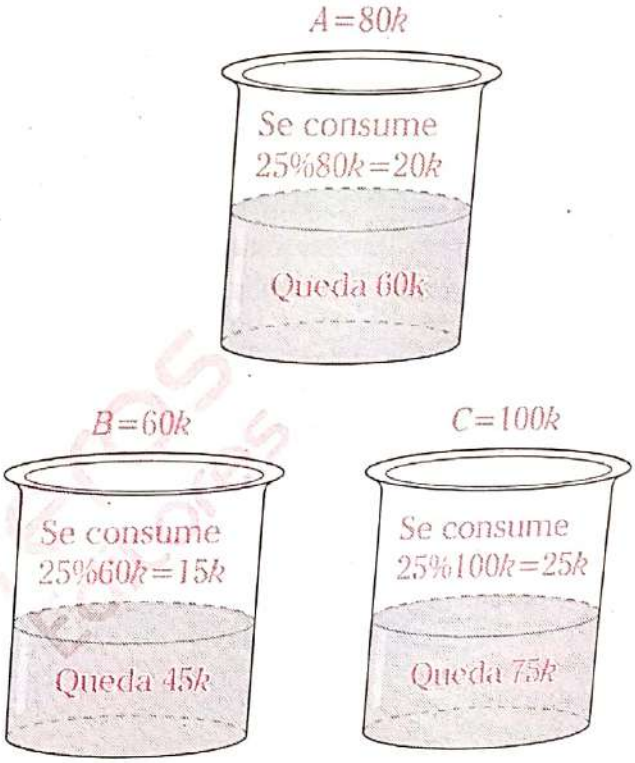
Problema 24

Se tienen los recipientes A, B y C llenos de agua. La capacidad de A es el 80% de la capacidad de C y la capacidad de B el 75% de la capacidad de A. Si se consume el 25% de agua en cada recipiente, ¿qué tanto por ciento de lo que queda en C es la diferencia de las cantidades de agua que queda en A y B?

Resolución

Sabemos que

- capacidad del recipiente C: $100k$
- capacidad del recipiente A: $80\%100k = 80k$
- capacidad del recipiente B: $75\%80k = 60k$



Sea x el tanto por ciento que necesitamos calcular.

$$\rightarrow\ x\%(75k)=60k-45k$$

$$\frac{x}{100}(75k)=15k$$

$$\therefore\ x=20$$

Problema 25

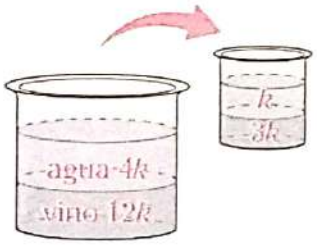
De un recipiente lleno de vino se extrae el 25% y se reemplaza con agua; luego se extrae nuevamente el 25% y se reemplaza con vino. Si la cantidad de vino que queda al final es 39 litros, ¿cuántos litros de vino había al inicio?

Resolución

Como se extraerá en cada caso el $25\% = \frac{1}{4}$, entonces a la capacidad del recipiente le asignaremos $16k$.

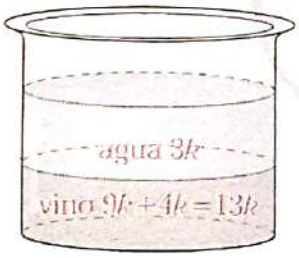
Se extrae 25%=1/4 y se reemplaza por agua.

Luego,



Al extraer 25%=1/4 de la mezcla, se extrae el 25%=1/4 de cada componente. Luego se reemplaza por vino.

Al final



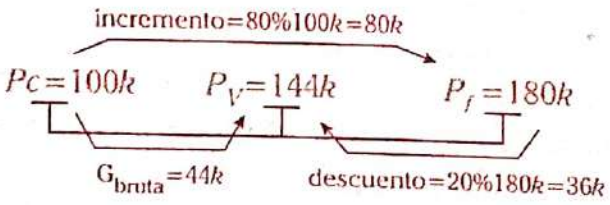
Por dato sabemos que $13k=39$, entonces $k=3$. Por lo tanto, el vino al inicio es $16\times3=48$.

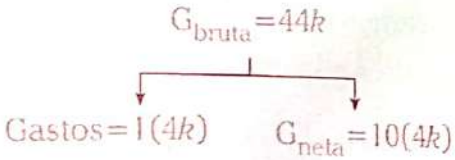
Problema 26

Se incrementa el precio de costo de un artículo en un 80%, pero al momento de su venta se descuenta el 20%. Si los gastos y la ganancia neta están en relación de 1 a 10, respectivamente, ¿qué tanto por ciento de la ganancia neta es el descuento?

Resolución

Sea el precio de costo $Pc = 100k$.





Sea x el tanto por ciento que necesitamos calcular.

$$x\%(40k) = 36k \rightarrow \frac{x\cdot 40k}{100} = 36k$$

$\therefore\ x=90$

Problema 27

Mijaíl recibe la siguiente boleta de venta con algunos datos incompletos.

LIBRERÍA "EL PEQUE"
LIMA-VILLA EL SALVADOR

RUC: 31415926535

BOLETA DE VENTA ELECTRÓNICA

F-Emisión: 06-06-2018

DESCRIPCIÓN	CANT	P.UNIT	MONTO
CUADERNOS	x	3,50	.....
LAPICEROS	48	2,00	96,00

OP. GRAVADA (S/)	200,00
IGV -18% (S/)	.....
TOTAL A PAGAR (S/)	.....

Luego de completar los datos, halle el valor de x.

Resolución

El IGV es el 18% de la op. gravada

$\rightarrow$ 18%200 = 36

Además,

total a pagar = op. grabada +IGV

$3{,}50(x)+96 = 200+36$

$\therefore\ x=40$

Test

1. Ángel tiene S/200 y Juan tiene el 20% de lo que tiene Ángel. ¿Cuántos soles tienen entre ambos?

A) 250 B) 240 C) 220
D) 300 E) 280

2. ¿Cuánto es el 20% del 30% del 60% de 10 000?

A) 200 B) 320 C) 280
D) 340 E) 360

3. ¿Qué tanto por ciento de 560 es 70?

A) 12,5% B) 14,5% C) 36%
D) 15% E) 27%

4. En una reunión hay 20 varones y 24 mujeres, ¿Cuántas mujeres deben llegar para que los varones representen el 40% del total?

A) 4 B) 12 C) 6
D) 15 E) 8

5. Si se tiene S/200 y se gasta el 20% y luego el 10% del resto, ¿cuánto quedaría?

A) S/160 B) S/144 C) S/136
D) S/156 E) S/180

6. De un recipiente con 20 litros de agua y 40 litros de vino se extrae el 25% y se reemplaza con agua. ¿Cuántos litros de vino quedan?

A) 30 B) 44 C) 36
D) 32 E) 27

7. De un recipiente con 30 litros de agua y 20 litros de vino se extrae el 20% y se reemplaza con agua. ¿Cuántos litros de agua quedan?

A) 36 B) 24 C) 34
D) 32 E) 27

8. Si el radio de un círculo aumenta en 40%, ¿en qué tanto por ciento aumenta su área?

A) 21% B) 44% C) 69%
D) 96% E) 36%

9. Si el ancho de un rectángulo aumenta en 10% y el largo disminuye en 10%, ¿en qué tanto por ciento varia su área?

A) 10% B) 4% C) 5%
D) 8% E) 1%

10. ¿A cómo se debe vender un pantalón que costó S/60 para ganar el 30%?

A) S/70 B) S/84 C) S/72
D) S/75 E) S/78

11. ¿A cómo se debe vender una camisa que costó S/28 para ganar el 30% del precio de venta?

A) S/40 B) S/42 C) S/35
D) S/45 E) S/38

12. ¿Qué precio se debe fijar a un reloj que costó S/100 para que en el momento de la venta se descuente el 10% y aún se gane el 8%?

A) S/110 B) S/120 C) S/136
D) S/125 E) S/130

Claves

1 B 2 E 3 A 4 C 5 B 6 A 7 C 8 D 9 E 10 E 11 A 12 B

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Karen tiene 200 caramelos, de los cuales 160 son de menta y el resto es de fresa. ¿Qué tanto por ciento de los caramelos de menta son los caramelos de fresa?

A) 25% B) 20% C) 75%
D) 15% E) 40%

2. En una reunión, el total de asistentes es 120 y el número de varones es el 40% del total. Si se retira el 25% de los varones y el 50% de las mujeres, ¿cuántas personas quedan?

A) 56 B) 72 C) 75
D) 60 E) 64

3. En una reunión, el 40% de los asistentes son varones y el 30% de las mujeres bailan. ¿Qué tanto por ciento de los reunidos son los varones que no bailan?

A) 42% B) 22% C) 32%
D) 45% E) 30%

4. Las medidas oficiales de un balón de fútbol son las siguientes:

balón con 70 cm de diámetro de circunferencia (máxima medida)

balón con 68 cm de diámetro de circunferencia (mínima medida)

Si al inicio un balón tenía la medida máxima y luego de cierto tiempo tenía una medida mínima, ¿en qué tanto por ciento varía aproximadamente el área de la superficie del balón?

A) 5,63% B) 5,72% C) 5,85%
D) 5,53% E) 5,92%

5. Cierto producto, por el mismo precio, se oferta de la siguiente manera:

producto sin oferta

producto con oferta

Además, $M+N=880$. Si Ricardo se come el 30% de la bolsa con oferta, ¿cuántos gramos quedaría en dicha bolsa?

A) 280 g B) 294 g C) 350 g
D) 322 g E) 336 g

6. En una reunión, el 60% son mujeres, de las cuales el 20% usa lentes. De los varones, el 90% no usa lentes. ¿Qué tanto por ciento de los reunidos usa lentes?

A) 16% B) 15% C) 18%
D) 12% E) 20%

7. En una reunión, el 60% usa reloj, de los cuales el 20% también usa lentes. Si los que no usan reloj ni lentes representan el 10% del total, ¿qué tanto por ciento usan lentes?

A) 46% B) 42% C) 58%
D) 32% E) 30%

8. Una tienda de artefactos ofrece un televisor de S/1600 con dos formas de venta. La primera tiene dos descuentos sucesivos del 20% y 30%; la segunda tiene dos descuentos sucesivos del 10% y 40%. Si una persona elige la mejor opción, ¿cuánto debe pagar por el televisor?

A) S/764 B) S/860 C) S/920
D) S/786 E) S/864

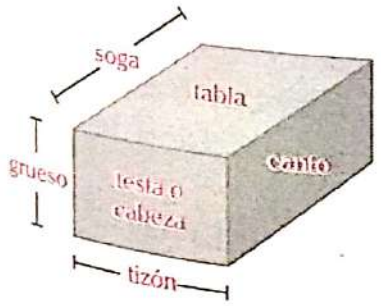
9. En la venta de un artículo se realizan dos descuentos sucesivos del 20% cada uno. De esa manera solo se paga S/320 por el artículo. ¿Cuánto se pagaría si solo se realiza un descuento del 20%?

A) S/380 B) S/500 C) S/400
D) S/480 E) S/350

10. Se venden 2 artículos en S/480 cada uno. En uno de ellos se gana el 20% de su costo y en el otro se pierde el 25% de su costo. ¿Cuánto se pierde o se gana?

A) Se gana S/80.
B) Se pierde S/80.
C) Se gana S/160.
D) Se pierde S/160.
E) No se gana ni se pierde.

11. Un ladrillo tiene la forma de un prisma rectangular. Los nombres que reciben sus aristas y sus caras se indican en el gráfico.



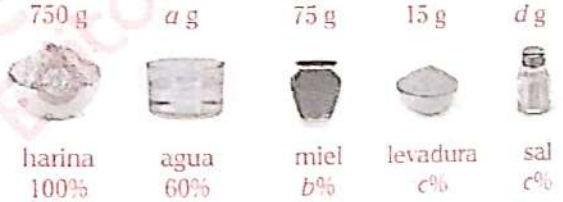
Si cada una de las 3 aristas del ladrillo disminuye en 10%, ¿en qué tanto por ciento disminuye su volumen?

A) 28,9% B) 27,1% C) 27,3%
D) 29,1% E) 30,3%

12. Un comerciante fija su precio de venta ganando el 60% del costo, para luego descontar el 20%. ¿Qué tanto por ciento del costo ganará?

A) 12% B) 24% C) 16%
D) 28% E) 32%

13. Al preparar una pizza, la harina es el ingrediente de mayor cantidad y se considera como el 100%; mientras que los otros ingredientes son un tanto por ciento de la cantidad de harina.



Calcule el valor de $a+b+c+d$.

A) 720 B) 657 C) 625
D) 475 E) 477

Nivel intermedio

14. Juana prepara un jugo surtido con papaya, piña y fresa, de tal manera que la papaya es el 50% y la piña es el $33,\widehat{3}$ %. Si las cantidades de papaya y fresa suman 500 gramos, ¿cuántos gramos suman las 3 frutas?

A) 720 B) 850 C) 625
D) 800 E) 750

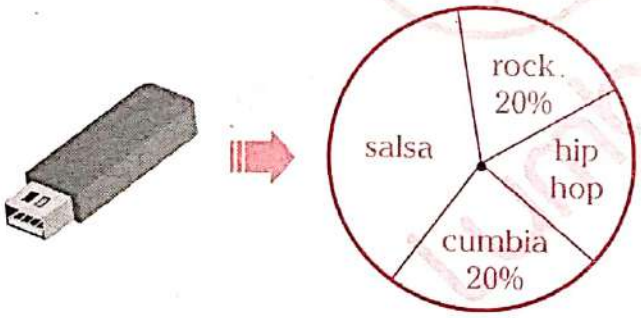
15. Carlos inicia un negocio con N soles y gana el 20%. Luego invierte el total que ahora tiene y pierde el 10%. Luego invierte por última vez el total que le queda y gana el 50%. Si el dinero que le queda al final es S/3240, calcule el valor de N.

A) 3000 B) 1500 C) 2500
D) 2400 E) 2000

16. Cuando se lava una tela, se encoge el 20% en el ancho y el 25% en el largo. Se sabe que la tela mide 2 m de ancho. ¿Qué longitud debe comprarse si se necesitan 24 m^2 de tela después del lavado?

A) 10 m B) 20 m C) 25 m
D) 30 m E) 35 m

17. Una memoria USB está llena de archivos musicales, como se muestra en el gráfico.



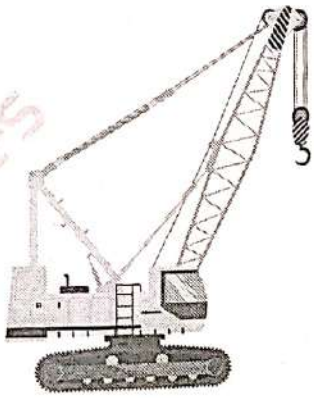
Si el 20% de los archivos de salsa es igual a la cantidad de archivos de hip hop, ¿qué tanto por ciento de los archivos de rock es el exceso de los archivos de salsa sobre los archivos de cumbia?

A) 120% B) 160% C) 180%
D) 150% E) 200%

18. A altas temperaturas, un compuesto N sufre dos aumentos sucesivos del 20% y 30% de su volumen; además, al enfriarse se reduce sucesivamente en 20% y 30%. Calcule la variación porcentual del volumen del compuesto.

A) No hay variación.
B) Aumenta en 12,64%.
C) Disminuye en 12,64%.
D) Disminuye en 10%.
E) Aumenta 10%.

19. El empuje del viento es de mucha importancia para las grúas que trabajan a la intemperie. Generalmente, estas grúas, como se muestran en el gráfico, están formadas por una estructura reticulada y el cálculo de la acción dinámica del viento se efectúa mediante la formula $F=KSV^2$, donde K es una constante, S es la superficie normal a la dirección del viento y V es la velocidad del viento.



Si S aumenta en 60%, ¿en qué tanto por ciento debe disminuir la velocidad del viento para que el empuje del viento disminuya en 10%?

A) 20% B) 25% C) 10%
D) 40% E) 15%

20. Si aumentamos en 20% la altura de un triángulo y disminuimos su base en un 10%, entonces su área aumenta en 24 m^2. Halle el área original del triángulo.

A) 250 m^2 B) 120 m^2 C) 160 m^2
D) 300 m^2 E) 240 m^2

21. Rosa inicia un negocio; el primer mes gana el 30% de su capital, el segundo mes pierde el 20% del capital que tenía hasta ese momento y el tercer mes gana el 50% del capital que tenía hasta ese momento. ¿Qué tanto por ciento de su capital inicial ganó al final?

A) 26% B) 52% C) 39%
D) 56% E) 36%

22. Si el radio de un cilindro aumenta en 20% y su altura disminuye en 25%, ¿en qué tanto por ciento varía su volumen?

A) 4% B) 8% C) 5%
D) 6% E) 2%

23. De un recipiente lleno de vino se extrae el 25% y se reemplaza con agua; luego se extrae el 20% y se reemplaza nuevamente con agua. Si al final quedan 48 litros de vino, ¿cuántos litros de vino tenía inicialmente el recipiente?

A) 60 B) 100 C) 80
D) 75 E) 90

24. ¿En qué tanto por ciento debe incrementarse el precio de un artículo para que, aun haciendo un descuento del 20%, se gane el 25% del precio de costo?

A) 50% B) 56,25% C) 54,25%
D) 40,25% E) 100%

25. El precio de costo de un artículo es S/120. ¿A cuánto debe fijarse su venta para que al hacerse un descuento del 20% aún se gane el 10% del precio de costo?

A) S/150 B) S/155 C) S/160
D) S/165 E) S/170

26. Un libro se vende recargándose el r por ciento del precio de costo; sin embargo, a un estudiante le rebajaron el p por ciento. Si el vendedor no ganó ni perdió, calcule el valor de p.

A) $\frac{100}{(100+r)}$ B) $\frac{100r}{(100+r)}$ C) $\frac{(100+r)}{100r}$

D) $\frac{(100+r)}{r}$ E) $\frac{(0{,}01+1)}{r}$

27. Para fijar el precio de un televisor se realiza un incremento de S/750. Pero al momento de la venta se descuenta el 10%; de esa manera, la ganancia neta es S/225, mientras que los gastos son el 20% del precio de costo. Calcule la suma de cifras del precio de costo.

A) 2 B) 4 C) 5
D) 6 E) 3

28. Claudia vendió la mitad de su mercadería ganando el 20% del costo; la otra mitad la vendió ganando el 20% de la venta. Si en la venta obtuvo en total S/980, ¿cuál es el precio total de la mercadería?

A) S/800
B) S/720
C) S/640
D) S/680
E) S/750

29. Se compran n pantalones a S/40 cada uno. El 20% se vende ganando el 50%; el 50% del resto se vende ganando el 25%; y en lo restante se pierde el 12,5%. Si en total se ha ganado S/240, halle el valor de n.

A) 20 B) 30 C) 36
D) 24 E) 40

Nivel avanzado

30. En un paseo de excursión, se encuentra que el 40% de los asistentes lo representan los varones y el 28% de los asistentes son menores de edad; además, las mujeres mayores de edad representan el 42% del total. Si asistieron 35 varones menores de edad, ¿cuántas personas fueron de paseo?

A) 250
B) 275
C) 300
D) 325
E) 350

31. Una persona quiere comprar un artículo. El minorista le ofrece un descuento del 10%; el mayorista le ofrece un descuento del 20% del precio que le ofrece el minorista. Cuando va a la fábrica le ofrecen un descuento del 20% del precio que le ofrece el mayorista. Si al final lo compra a S/576 en la fábrica, calcule el precio inicial del minorista.

A) S/518,4 B) S/624 C) S/728
D) S/888 E) S/1000

32. Determine la relación de a y b si a es igual al tanto por ciento que representa el área de un círculo inscrito en un cuadrado de lado $2R$, del área de dicho cuadrado. Además, b es igual al tanto por ciento que representa el área del cuadrado inscrito en una circunferencia de diámetro $2R$, del área circular de dicha circunferencia.

A) 3 a 4 B) 2π a 5 C) π^2 a 8
D) $2\pi^2$ a 7 E) π^2 a 16

33. Se han fabricado 1000 productos; el 60% de ellos se fabricaron por la máquina A y el resto por la máquina B. Si el 5% de lo fabricado por A es defectuoso y el 4% de lo fabricado por B también, ¿cuántos productos en total son defectuosos?

A) 40 B) 45 C) 46
D) 50 E) 90

34. El precio de costo de un celular es S/600. Para la venta se fija un precio tal que al realizar 2 descuentos sucesivos del 10% y 20%, se gane el 20% del costo. ¿Cuál es el precio fijado?

A) S/1400 B) S/1200 C) S/1000
D) S/900 E) S/800

35. El contenido de humedad (CH) es la cantidad de agua presente en la madera; se expresa como porcentaje de madera seca y se calcula mediante la siguiente fórmula:

$$CH(\%) = \left(\frac{|P_i - P_o|}{P_o}\right) \times 100\%$$

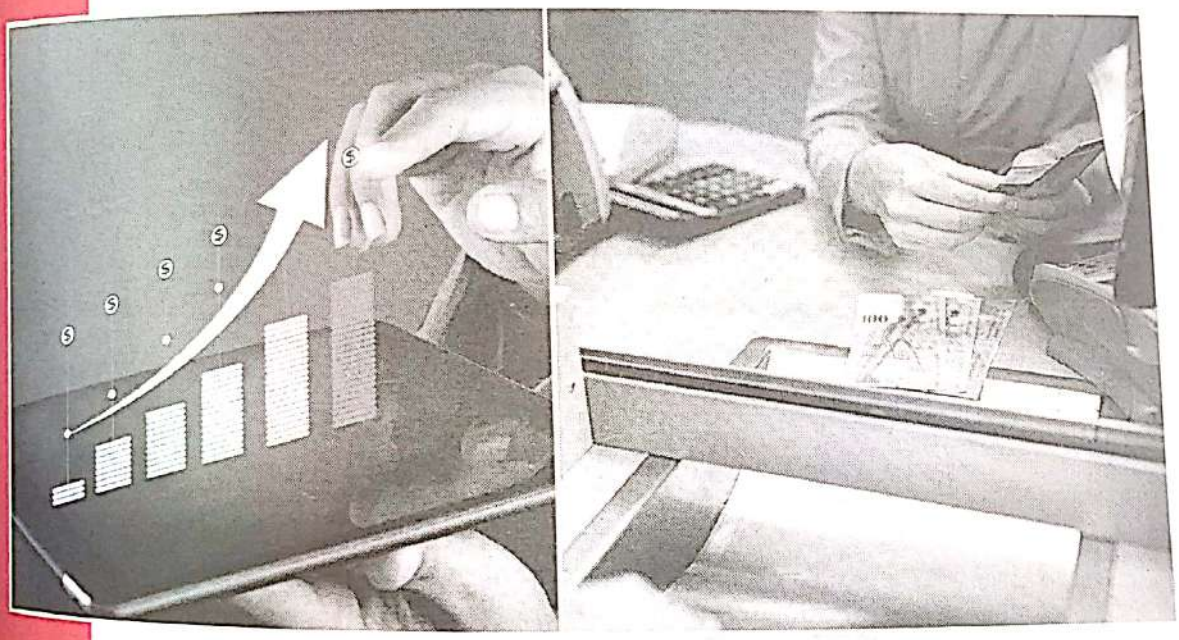
donde
- CH: contenido de humedad (%)
- P_i: peso inicial (g)
- P_o: peso en estado anhidro (g)

Además, el contenido de humedad en equilibrio (CHE) para un mueble interior debe ser de 6% a 10%. Si el peso de una madera es 5,4 kg, y seca tendría un peso de 5 kg, calcule el CH de dicha madera e indique si se puede usar para un mueble interior.

A) 6%; sí B) 8%; sí C) 12%; no
D) 10%; sí E) 15%; no

Capítulo

XV



Regla de interés

Arturo Sánchez Vásquez

CAPÍTULO XV

REGLA DE INTERÉS

Objetivos

- Reconocer los elementos que intervienen en el cálculo del interés simple, compuesto y continuo.
- Aprender a diferenciar las clases de interés (simple, compuesto y continuo).
- Inducir las fórmulas para el cálculo de interés y aplicarlas en la resolución de los problemas.

Introducción

Como sabemos, el dinero puede cambiar de valor con el tiempo, esto debido a diversos fenómenos económicos como la inflación y la devaluación; aquí radica la importancia de conocer los fundamentos básicos de las matemáticas financieras.

Entendemos que toda persona que recibe un préstamo debe pagar no solo la cantidad recibida, sino una cantidad de dinero adicional (ganancia para quien realizó el préstamo) por el uso de ese dinero. Asimismo, el mayor porcentaje de los ingresos de las entidades financieras se deriva de los intereses (ganancias) obtenidos por los préstamos que realizan, diferenciándose si son préstamos hipotecarios, vehiculares, de estudios, etc. En ese sentido, el negocio de las entidades financieras está en el pago de bajos intereses por los depósitos, pero en el cobro de altos intereses por los préstamos que realizan.

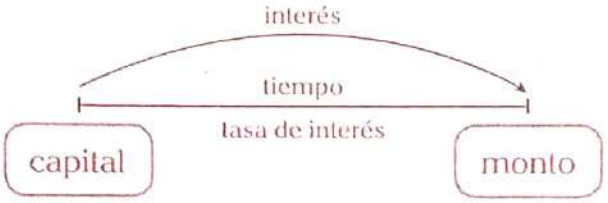
El contenido del presente capítulo está organizado de la siguiente manera: en la primera parte de la teoría, encontraremos los elementos que participan en la regla de interés, los cuales son los siguientes: el capital, el tiempo, la tasa de interés, el interés y el monto; en la segunda parte, veremos las clases de interés: simple, compuesto y continuo, cada uno de ellos desarrollados con diferentes enfoques, siempre reforzados con ejemplos y aplicaciones. Sigue una lectura relativa al tema, luego encontraremos los problemas resueltos, un test para autoevaluarnos y finalmente los problemas propuestos.

Para una mejor comprensión del presente capítulo es conveniente revisar los capítulos de razones y proporciones, y de tanto por ciento. Asimismo, este capítulo será de gran utilidad para comprender el siguiente capítulo de regla de descuento.

Recomendamos que se siga el orden indicado, ya que el capítulo está elaborado con una secuencia que va de lo sencillo a lo complejo.

1 ▸ ELEMENTOS DE LA REGLA DE INTERÉS

Lo elementos que intervienen son el capital, la tasa de interés, el tiempo, el interés y el monto.



1.1. CAPITAL (C)

Se denomina capital a toda cantidad de dinero, bien material, servicio o esfuerzo humano que se va a ceder para que produzca una ganancia luego de un periodo de tiempo.

En términos económicos, el capital es dinero, ya que todo bien material o servicio tiene un valor expresado en dinero.

Al capital también se le denomina principal.

1.2. TIEMPO (t)

Es el periodo durante el cual se va a ceder o imponer el capital.

Consideraciones

1. El conteo de los días comprendidos entre una fecha inicial y una fecha final se hallará al aplicar el método de los días terminales, el cual consiste en considerar todos los días posteriores a la fecha inicial, incluida la fecha final, es decir, se excluye el día correspondiente a la fecha inicial.

   Ejemplo

   Veamos cuántos días transcurren entre el 14 de junio y el 6 de septiembre del mismo año.

(30)	(31)	(31)	(30) días
junio	julio	agosto	septiembre

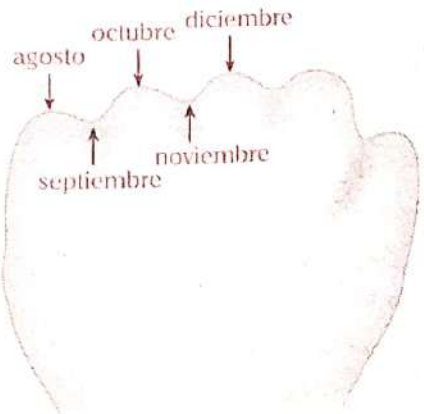
   (16) Tomamos la cantidad de días que quedan en el mes.

   (6) Se cuenta hasta el último día inclusive.

   Por lo tanto, transcurren

   $16+31+31+6=84$ días.

2. Una forma práctica de recordar cuántos días tiene cada uno de los meses de nuestro calendario es utilizar uno de nuestros puños. Empezamos contando a partir del nudillo del meñique hacia el índice (empezando en el mes de enero o agosto), considerando que cada mes que caiga en un nudillo tiene 31 días y los que caen en una hendidura tienen 30 días, a excepción de febrero que podrá tener 28 o 29 días (según sea año bisiesto o no bisiesto, respectivamente).



Se puede observar lo siguiente:

- Hay 7 meses que tienen 31 días.
- Hay 4 meses que tienen 30 días.
- Febrero tendrá
  - 28 días (año común)
  - 29 días (año bisiesto)

- Los únicos meses consecutivos en un mismo año que tienen 31 días son julio y agosto.
- Además, tenga en cuenta que
  - mes comercial: 30 días
  - año comercial: 360 días
  - año común: 365 días
  - año bisiesto: 366 días
  - un lustro: 5 años
  - una década: 10 años

Nota

En los problemas, si el tiempo está dado en meses y no especifican cuáles son, se consideran los meses comerciales (meses de 30 días cada uno). En caso contrario, se considerarán los días que tiene cada uno de los meses en nuestro calendario.

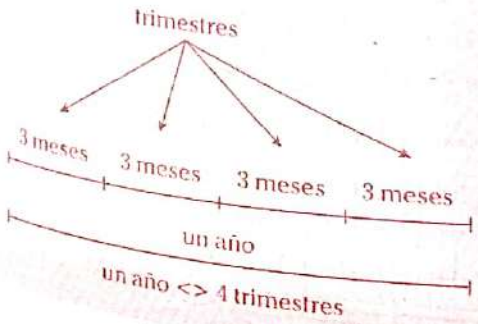
Considere lo siguiente:

bimestre <> 2 meses
trimestre <> 3 meses
cuatrimestre <> 4 meses
semestre <> 6 meses

Entonces

un año <> { 12 meses; 6 bimestres; 4 trimestres; 3 cuatrimestres; 2 semestres }

Además;



1.3. TASA DE INTERÉS (r%)

Es la ganancia que se obtiene por cada 100 unidades monetarias prestadas en la unidad de tiempo (generalmente es un año).

Ejemplos

- Una tasa del 10% anual implica que cada año se ganará S/10 por cada S/100 prestados.
- Una tasa del 2% semestral implica que cada semestre se ganará $2 por cada $100 prestados.

Observación

Tenga en cuenta lo siguiente:

- A la tasa de interés también se le denomina rédito.
- Cuando no se indique la unidad de tiempo en la que se encuentra la tasa de interés, se asumirá que es una tasa de interés anual.

  Ejemplo

  10%<>10% anual
- La **tasa nominal** es la tasa de interés convenida para una operación financiera. Esta tasa de interés se puede expresar de manera proporcional en otro tiempo.

  Ejemplo

  24% anual es proporcional a una tasa del 2% mensual.
- La **tasa efectiva** de interés es la que realmente actúa sobre el capital de la operación financiera.
- Dependiendo de las condiciones en que se dé la operación financiera, la tasa nominal puede ser igual o diferente de la tasa efectiva de interés.

1.3.1. Tasas equivalentes

Dos o más tasas de interés (tasa nominal) son equivalentes si, en condiciones diferentes (mensual, bimestral, trimestral, etc.), producen la misma tasa efectiva anual.

Ejemplo

Si conocemos que

- 5% bimestral <> 6(5%)=30% anual
- 15% semestral <> 2(15%)=30% anual

Entonces 5% bimestral y 15% semestral son tasas equivalentes.

Nota

En forma práctica, dos o más tasas de interes son equivalentes si al ser impuestas al mismo tiempo, producen la misma ganancia.

Ejemplos

- $2\%\ \text{mensual} <> \begin{cases} 2(2\%)=4\%\ \text{bimestral} \\ 3(2\%)=6\%\ \text{trimestral} \\ 4(2\%)=8\%\ \text{cuatrimestral} \\ 6(2\%)=12\%\ \text{semestral} \\ 12(2\%)=24\%\ \text{anual} \end{cases}$

  Además, podemos afirmar que
  - 6% trimestral <> 8% cuatrimestral
  - 4% bimestral <> 12% semestral

- $24\%\ \text{anual} <> \begin{cases} \frac{24\%}{2}=12\%\ \text{semestral} \\ \frac{24\%}{3}=8\%\ \text{cuatrimestral} \\ \frac{24\%}{4}=6\%\ \text{trimestral} \\ \frac{24\%}{6}=4\%\ \text{bimestral} \\ \frac{24\%}{12}=2\%\ \text{mensual} \end{cases}$

- Asumiendo el mes comercial, es decir, un mes de 30 días, tendremos que
  - 0,25% diario <> 30(0,25%)=7,5% mensual
  - $6\%\ \text{mensual} <> \frac{6\%}{30}=0{,}2\%\ \text{diario}$

Recuerde

Tenga en cuenta los siguientes significados obtenidos del Diccionario de la lengua española.

- **Bimensual**: Que se hace u ocurre dos veces al mes.
- **Bimestral**: Que sucede o se repite cada bimestre.
- **Bianual**: Que ocurre dos veces al año.
- **Bienio**: Periodo de dos años.
- **Bienal**: Que sucede o se repite cada bienio.

De lo anterior se puede señalar que

- Decir 4% bimensual no equivale a decir 4% bimestral.
- Decir 20% bianual no equivale a decir 20% bienal.

1.4. INTERÉS (*I*)

Es la ganancia o beneficio que produce el capital impuesto durante cierto tiempo y bajo determinadas condiciones.

1.5. MONTO (*M*)

Es la cantidad obtenida al sumar el capital y los intereses obtenidos en un determinado tiempo.

$$M = C + I$$

2 CLASES DE INTERÉS

2.1. INTERÉS SIMPLE

Es cuando el interés que produce el capital no se acumula al capital, sino hasta el final del préstamo o imposición; es decir, el capital permanece constante durante todo el tiempo que dura el préstamo o imposición.

Veamos el siguiente ejemplo deductivo:

Janeth le presta S/800 a su vecina durante tres meses con la condición de que ella le pague el 10% mensual. Hallemos la ganancia total de Janeth y cuánto recibirá, en total, al finalizar el préstamo.

La cantidad prestada es S/800.

C=S/800

El capital permanecerá constante durante los 3 meses.

El préstamo dura tres meses.

t=3 meses

Además, $r\%$=10% mensual

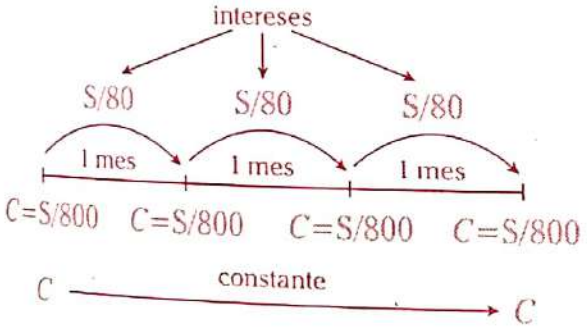
Cada mes, Janeth ganará el 10% del capital prestado (C).

Ahora vamos a deducir la fórmula del interés simple.

Sabemos que

ganancia de cada mes <> interés mensual

10%(800)=S/80



Además,

ganancia total <> interés total

3 (10% 800)=S/240

tiempo en meses

tasa mensual

En conclusión, la fórmula para el cálculo del interés simple es

$$I=t(r\%C)$$

Esto se da siempre que la tasa de interés ($r\%$) y el tiempo (t) se encuentren en las mismas unidades. Por ejemplo:

$r\%$	t
mensual	en meses
trimestral	en trimestres
anual	en años

Luego, del ejemplo anterior

total al final del préstamo <> monto

$$\text{Total} = \begin{pmatrix}\text{cantidad}\\ \text{que prestó}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\text{cantidad}\\ \text{que ganó}\end{pmatrix}$$

Total = S/800 + S/240 = S/1040

En general, la fórmula para el cálculo del monto es

$$M=C+I$$

Observación

Se debe empezar interpretando correctamente la tasa de interés. El 10% mensual quiere decir que cada mes se ganará el 10% del capital.

→ 10%C cada mes

Luego, el interés de los tres meses será

I=3(10%C) = 30%C

Además, sabemos que

$M=C+I$

→ M=100%C + 30%C

∴ M=130%C

2.1.1. Consideraciones importantes

- $I=t(r\%C)$, donde t y $r\%$ se encuentran en las mismas unidades.
- En interés simple el capital (C) debe permanecer constante.
- Si asumimos que la tasa de interés ($r\%$) es constante, tendremos que

$$\frac{I}{t}=r\%C=\text{constante}$$

Es decir, I DP t.

Ejemplo

Para un mismo capital impuesto a una tasa de interés constante.

Sea I el interés de un mes, entonces en 7 meses el interés será 7I. En un año, el interés será 12I.

- Sabemos que $I=t(r\%C)$

  Entonces para $t=1$ año y $r\%$ anual, tenemos

$$I_{\text{anual}}=1\ (r\%C)\ \rightarrow\ r\%\text{ anual}=\frac{I_{\text{anual}}}{C}$$

$$\boxed{r\%\text{ anual}=\frac{I_{\text{anual}}}{C}\times 100\%}$$

Entonces, la tasa de interés anual la podemos interpretar como la relación entre lo que ganó en un año y el capital. De igual manera, la podríamos analizar para cualquier tiempo; así, la tasa de interés bimestral será igual a la relación entre lo que ganó en un bimestre y el capital.

Ejemplo

Un capital de S/1040 produce en un año una ganancia de S/208.

$$\rightarrow\ r\%\text{ anual}=\frac{\overset{1}{\cancel{208}}}{\underset{5}{\cancel{1040}}}\times 100\%=20\%$$

Nota

- En los problemas, no siempre se utilizará la palabra "interés" para referirse a este, sino que en el contexto se interpretará como la ganancia que produce el capital en un determinado tiempo.

  Ejemplo

  El capital de Andrés produce cada tres meses S/120.

  Entonces el interés trimestral es S/120.

- En los problemas, no siempre se utilizará la palabra "monto" para referirse a este, sino que en el contexto se interpretará como el total que se obtiene al final del préstamo.

  Ejemplo

  Un capital de S/2000 se convierte al cabo de tres años en S/2600.

  Entonces, al cabo de tres años, el monto será S/2600.

- Cuando se indique "renta" equivale al interés de un año.

Aplicación 1

Halle el monto si se sabe lo siguiente:

- $C=$S/2400
- $t=7$ meses
- $r\%=15\%$ trimestral

Resolución

Sabemos que

Se ganará el 5% del capital cada trimestre.

$r\%=15\%$ trimestral <> 5% mensual

Ahora el tiempo y la tasa se encuentran en las mismas unidades.

Entonces

$$I=7(5\%C)=35\%C$$

Luego,

$$M=C+I$$

$$M=C+35\%C=135\%C$$

$$\rightarrow\ M=135\%(2400)=\text{S/}3240$$

Por lo tanto, el monto es S/3240.

Aplicación 2

Halle el monto si se sabe lo siguiente:

- $C=$S/1250
- $t=9$ meses
- $r\%=10\%$ trimestral

Resolución

Sabemos que

Se ganará el 10% del capital cada trimestre.

$r\%=10\%$ trimestral

$t=9$ meses <> 3 trimestres

Ahora el tiempo y la tasa se encuentran en las mismas unidades.

Entonces

$$I=3(10\%)=30\%C$$

Luego,

$$M=C+I$$

$$M=C+30\%C=130\%C$$

$$\rightarrow M=130\%(1250)=S/1625$$

Por lo tanto, el monto es S/1625.

Aplicación 3

Halle el monto si se sabe que

- $C=S/6000$
- $t=8$ meses
- $r\%=5\%$ trimestral

Resolución

En este caso, si expresamos el tiempo en trimestres o la tasa en meses, no obtenemos cantidades enteras como en las aplicaciones anteriores.

Podemos proceder como se muestra a continuación, empezando siempre por la tasa de interés.

interés de un trimestre

$$I=8\underbrace{\left(\frac{\boxed{5\%6000}}{3}\right)}_{\text{interés mensual}}=S/800$$

$$\rightarrow M=C+I$$

$$M=6000+800=S/6800$$

Por lo tanto, el monto es S/6800.

Otra forma

Sabemos que $t=8$ meses.

Se ganará el $\frac{5}{3}\%$ del capital cada mes.

$$r\%=5\% \text{ trimestral} <> \frac{5}{3}\% \text{ mensual}$$

Ahora el tiempo y la tasa se encuentran en las mismas unidades.

Entonces

$$I=8\left(\frac{5}{3}\%C\right)=\frac{40}{3}\%C$$

$$I=\frac{40}{3}\%(6000)=S/800$$

$$M=C+I$$

$$\therefore\ M=6000+800=S/6800$$

Aplicación 4

Si se prestó S/2450 y en cinco meses produjo una ganancia de S/490, ¿a qué tasa de interés se realizó el préstamo?

Resolución

Piden hallar la tasa de interés. Como no indica las unidades, se refiere a la tasa de interés anual.

Además, como la tasa de interés es constante, el interés es proporcional al tiempo.

Entonces

- interés en 5 meses= S/490
- interés en un mes= S/98

$\div 5$

Por fórmula sabemos que

$$I\% \text{ mensual}=\frac{I_{\text{mensual}}}{C}\times 100\%$$

$$\rightarrow r\% \text{ mensual}=\frac{98}{2450}\times 100\%=4\%$$

Luego,

$$r\% \text{ anual}=12(4\%)=48\%$$

Por lo tanto, se prestó al 48% anual.

Otra forma

Se tiene lo siguiente:

- C=S/2450
- t=5 meses
- interés en 5 meses=S/490
- r% anual=¿?

Entonces

interés de un año

$$5\times\underbrace{\left(\frac{\boxed{r\%2450}}{12}\right)}_{\text{interés de un mes}}=490$$

$$r\%=\frac{12}{25}$$

Luego,

$$r\%=\frac{12}{25}\times 100\%=48\%$$

Por lo tanto, se prestó al 48% anual.

Aplicación 5

Se impone un capital al 15% trimestral el 6 de mayo; hasta el 3 de septiembre del mismo año se obtuvo un interés de S/1240. ¿Cuál fue el capital depositado?

Resolución

Piden hallar el capital (C).

Contemos los días desde 6 de mayo hasta el 3 de septiembre del mismo año.

31	30	31	31	30
mayo	junio	julio	agosto	sept.

25 — Son los días que quedan de mayo.

3 — Hasta el último día inclusive.

(n.º de días)=25+30+31+31+3=120 <> 4 meses

Sabemos que

15% trimestral <> 5% mensual

Ahora el tiempo y la tasa se encuentran en las mismas unidades.

Por dato tenemos que

I=S/1240

Luego,

$4(5\%C)$=S/1240

C=6200

Por lo tanto, el capital depositado fue S/6200.

2.2. INTERÉS COMPUESTO

Es cuando el interés que se obtiene en cada intervalo de tiempo convenido (periodo de capitalización) se suma al capital, es decir, se capitaliza, formando un nuevo capital y repitiendo el proceso hasta finalizar el préstamo.

Veamos el siguiente ejemplo deductivo:

Andrés impone S/4000 durante un año en una financiera que paga el 30% capitalizable cuatrimestralmente. Hallemos el interés y el monto que obtendrá Andrés.

> **Recuerde**
>
> Para resolver un problema de interés compuesto, primero se debe ubicar el periodo de capitalización. Luego, la tasa de interés y el tiempo se deben colocar en las mismas unidades del periodo de capitalización.

El periodo de capitalización (PC) es cuatrimestral.

Sabemos que

Cada cuatrimestre se gana el 10% del nuevo capital.

r%=30% <> 10% cuatrimestral

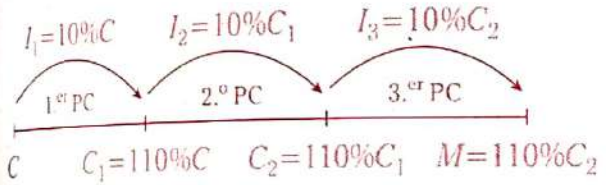
un año <> $\underbrace{\text{3 cuatrimestres}}_{\text{(3 periodos de capitalización)}}$

C=S/4000

Veamos diferentes formas de obtener el monto e interés compuesto.

Forma 1

Aplicando aumentos sucesivos



$M=110\%C_2$

$M=110\%110\%C_1$

$M=110\%110\%110\%C$

Tres aumentos sucesivos del 10%

$M=110\%110\%110\%4000=5324$

Entonces el monto a interés compuesto será S/5324.

Ahora hallaremos el interés compuesto.

$M=C+I_{comp}$

$I_{comp}=M-C$

$I_{comp}=5324-4000=1324$

Por lo tanto, el interés compuesto será S/1324.

> **Nota**
> Los nuevos capitales, C_1 y C_2, se consideran como el monto del primer periodo (M_1) y monto del segundo periodo (M_2), respectivamente.

Forma 2

Aplicando fórmula

De lo anterior

$M=110\%110\%110\%C$

$M=C\times(110\%)^3=C(100\%+10\%)^3$

$M=C(1+\underline{10\%})^3$

N.º de periodos de capitalización

En las unidades del PC

Entonces la fórmula para el cálculo del monto a interés compuesto es

$$\boxed{M=C(1+r\%)^T}$$

donde

- $r\%$: tasa en las unidades del PC
- T: número de PC

Como C=S/4000

$M=4000\times(1+10\%)^3 \rightarrow M$=S/5324

Luego,

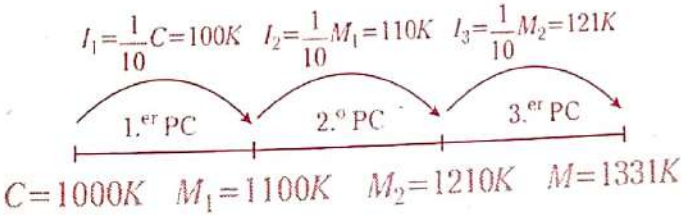
$I=5324-4000=1324$

> **Nota**
> En el ejemplo anterior
> - 30% anual es la tasa nominal.
> - $\frac{30\%}{3}=10\%$ cuatrimestral es la tasa efectiva en el periodo de capitalización y es la que se utiliza en la fórmula.

Forma 3

Aplicando proporcionalidad

Como en cada PC se ganará el $10\%=\frac{1}{10}$ del nuevo capital y hay 3 PC, asumimos un capital inicial igual a $10^3K=1000K$.



donde

$I_{comp}=I_1+I_2+I_3=331K$

También se puede obtener así

$I_{comp}=M-C=331K$

Como C=S/4000

$C=1000K=4000 \rightarrow K=4$

Por lo tanto,

$M=1331K=$ S/5324

$I_{comp}=331K=$ S/1324

¿Cómo hallar la tasa efectiva anual (TEA)?

La tasa efectiva anual (TEA) es la tasa que realmente actúa sobre el capital en un año.

Del último ejemplo

$$M=110\%110\%110\%C$$

$$\rightarrow\ M=133{,}1\%C$$

Luego,

$$M=C+I_{comp}$$

$$I_{comp}=M-C\ \rightarrow\ I_{comp}=33{,}1\%C$$

Se gana el 33,1 % del capital en un año.

$\therefore$ TEA=33,1 %

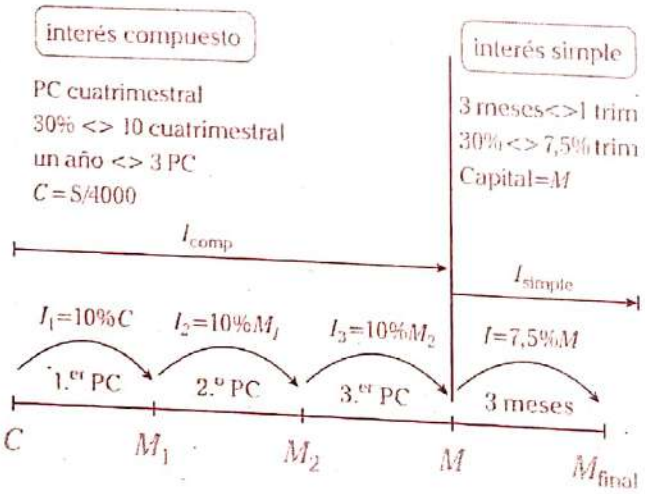
¿Qué sucede cuando el número de periodos de capitalización no es exacto?

En el último ejemplo, cambiamos el tiempo de un año a 15 meses.

En primer lugar, calculamos el monto a interés compuesto hasta el último periodo de capitalización.

Luego, para el tiempo que queda aplicamos interés simple, tomando como capital el monto calculado en el paso anterior.

Tendríamos lo siguiente:



$$C=S/4000$$

$$M=S/5324$$

$$I_1+I_2+I_3=M-C=S/1324$$

Luego,

$$I=7{,}5\%M=7{,}5\%(5324)=S/399{,}3$$

Entonces el monto final será

$$M_{final}=M+I=107{,}5\%M$$

$$M_{final}=107{,}5\%(5324)=S/5723{,}3$$

Además, el interés total será

$$I_{total}=I_1+I_2+I_3+I=S/1723{,}3$$

$$I_{total}=M_{final}-C=S/1723{,}3$$

Aplicación 6

¿Cuánto ganará Diana si impone S/2500 durante 2 años al 5% trimestral con capitalización anual?

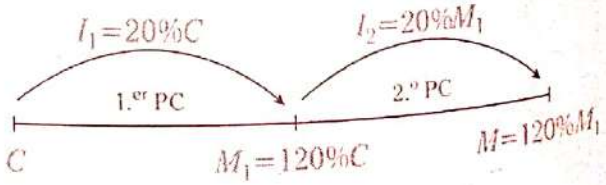
Resolución

Como nos piden lo que ganará Diana, entonces hay que hallar el interés compuesto.

El periodo de capitalización (PC) es anual, entonces, la tasa de interés y el tiempo deben estar en años. Entonces

- 5% trimestral <> 20% anual
- 2 años <> 2PC
- C=S/2500

Tenemos



Hallemos el monto (M).

$$M=120\%120\%C$$

$$M=120\%120\%2500=S/3600$$

Luego,

$$M=C+I$$
$$I_{comp}=M-C$$
$$I_{comp}=3600-2500=1100$$

Por lo tanto, Diana ganará S/1100.

Veamos otras formas de resolver.

Forma 1

Sabemos que

$$M=C(1+r\%)^T$$

donde

- C=S/2500
- $r\%$ y T están en las mismas unidades del periodo de capitalización que es anual
- $r\%=20\%$ anual
- $T=2$ años

Entonces

$$M=2500(1+20\%)^2$$
$$M=3600$$

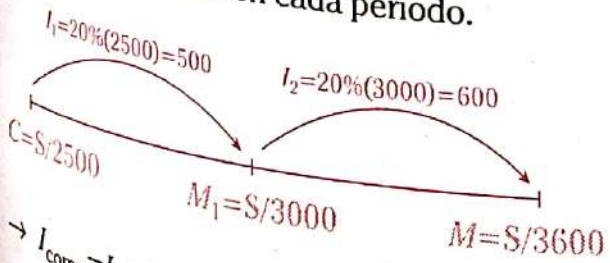
Luego,

$$M=C+I_{comp}$$
$$I_{comp}=M-C$$
$$I_{comp}=3600-2500=1100$$

Por lo tanto, Diana ganará S/1100.

Forma 2

Si son pocos periodos de capitalización, podemos hallar el interés en cada periodo.



$\rightarrow I_{comp}=I_1+I_2=$S/1100

Por lo tanto, Diana ganará S/1100.

Aplicación 7

Se deposita C soles durante un año y medio en una financiera, al 50% capitalizable semestralmente. Si la diferencia de los intereses obtenidos en el primer y tercer periodo de capitalización es S/216, halle el monto que se obtiene.

Resolución

Piden hallar el monto (M).

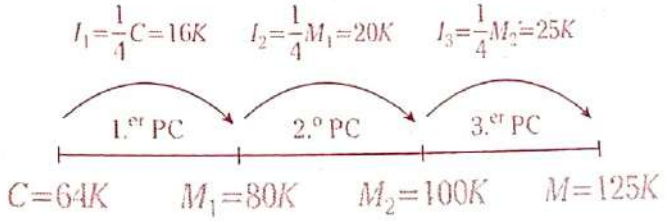
El periodo de capitalización es semestral, entonces, la tasa de interés y el tiempo deben estar en semestres.

- 50% <> 25% semestral
- un año y medio <> $\underbrace{\text{3 semestres}}_{(3PC)}$

Como en cada PC se ganará el $25\%=\frac{1}{4}$ del nuevo capital y hay 3PC, asumimos un capital inicial igual a 4^3K.

$\rightarrow\ C=64K$

Tenemos lo siguiente:



Sabemos que

$$I_3-I_1=\text{S/216}$$
$$25K-16K=216$$
$$9K=216\ \rightarrow\ K=24$$

Luego,

$$M=125K$$
$$M=125(24)=3000$$

Por lo tanto, el monto que se obtiene es S/3000.

Aplicación 8

Dino deposita S/2000 durante 8 meses al 10% mensual con capitalización trimestral. ¿Qué monto recibirá Dino al final de los 8 meses?

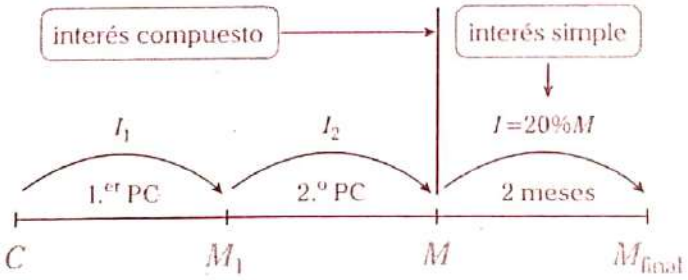
Resolución

Piden hallar el monto (M)

El periodo de capitalización es trimestral. Entonces la tasa de interés y el tiempo deben estar en trimestres.

- 10% mensual <> 30% trimestral
- C=S/2000

Como el tiempo es 8 meses, entonces, para los primeros 6 meses (2PC) aplicaremos interés compuesto y para los 2 meses restantes aplicaremos interés simple.



Entonces

$$M=130\%130\%C=169\%C$$

Luego,

$$M_{final}=M+I=120\%M$$

$$M_{final}=120\%169\%(2000)=4056$$

Por lo tanto, el monto que recibirá Dino es S/4056.

Aplicación 9

Daniel deposita S/5000 acumulable trimestralmente al r% y al cabo de un año se convierte en S/10 368. Halle r%.

Resolución

Piden hallar r%.

Como no se indica sus unidades, se asume que es anual.

Decir acumulable es equivalente a decir capitalizable, entonces el periodo de capitalización es trimestral.

Luego, la tasa de interés y el tiempo deben estar en trimestres.

- $r\% <> \left(\frac{r\%}{4}\right)$ trimestral
- un año <> $\underbrace{\text{4 trimestres}}_{\text{(4 PC)}}$

Además, sabemos que

- C=S/5000
- M=S/10 368

Entonces

$$5000\left(1+\frac{r\%}{4}\right)^4=10\,368$$

$$\left(1+\frac{r\%}{4}\right)^4=\frac{10\,368}{5000}$$

$$\left(1+\frac{r\%}{4}\right)^4=\frac{1296}{625}=\left(\frac{6}{5}\right)^4$$

$$1+\frac{r\%}{4}=\frac{6}{5} \rightarrow r\%=\frac{4}{5}$$

$$\therefore\ r\%=\frac{4}{5}\times 100\%=80\%$$

Veamos gráficamente la comparación de los montos correspondientes a un capital impuesto a una misma tasa de interés, para el interés simple y compuesto con capitalización anual.

Por ejemplo para

C=S/1000

r%=20%

t años

- Monto a interés simple

  $M_s(t)=1000+t(20\%1000)$

  $M_s(t)=1000(1+0{,}2t)$

- Monto a interés compuesto

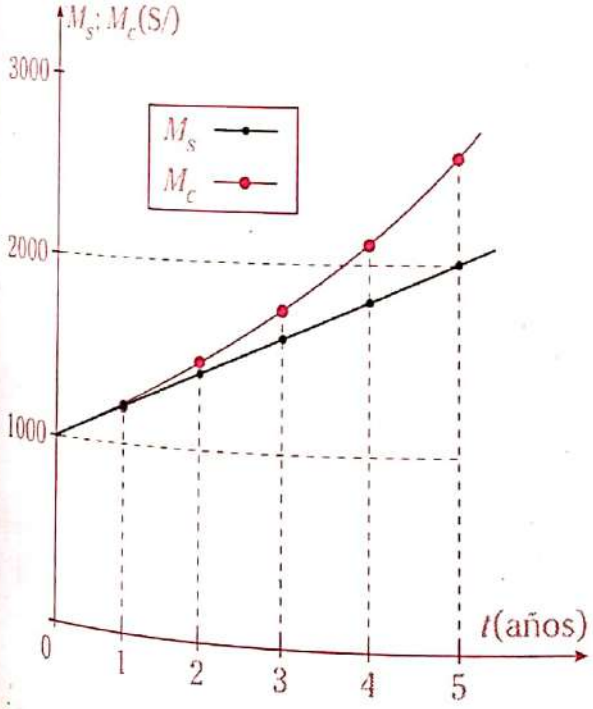
  $M_c(t)=1000(1+20\%)^t$

  $M_c(t)=1000(1{,}2)^t$

En la tabla se muestra $M_s(t)$ y $M_c(t)$ para algunos valores de t.

t(años)	M_s(S/)	M_c(S/)
0	1000	1000
1	1200	1200
2	1400	1440
3	1600	1728
4	1800	2073,6
5	2000	2488,32
⋮	⋮	⋮

Ahora veamos gráficamente.



2.3. INTERÉS CONTINUO

Es un caso particular del interés compuesto que se da cuando el periodo de capitalización es "instantáneo", es decir, cuando el número de periodos de capitalización tiende al infinito.

Veamos cómo obtener la fórmula para el cálculo del monto a interés continuo.

Sean

- C: capital
- t años
- $r\%$ anual

Ahora analicemos con diferentes periodos de capitalización.

Periodo de capitalización (PC)	Número de PC	Tasa efectiva en el periodo	Monto (M)
Anual	t	$r\%$	$C(1+r\%)^t$
Semestral	$2t$	$\frac{r\%}{2}$	$C\left(1+\frac{r\%}{2}\right)^{2t}$
Cuatrimestral	$3t$	$\frac{r\%}{3}$	$C\left(1+\frac{r\%}{3}\right)^{3t}$
Trimestral	$4t$	$\frac{r\%}{4}$	$C\left(1+\frac{r\%}{4}\right)^{4t}$
Bimestral	$6t$	$\frac{r\%}{6}$	$C\left(1+\frac{r\%}{6}\right)^{6t}$
Mensual	$12t$	$\frac{r\%}{12}$	$C\left(1+\frac{r\%}{12}\right)^{12t}$
⋮	⋮	⋮	⋮
	nt	$\frac{r\%}{n}$	$C\left(1+\frac{r\%}{n}\right)^{nt}$

Cuando en un año hay n periodos de capitalización.

$$M = C\left(1+\frac{r\%}{n}\right)^{nt}$$

Si $n \to \infty$

$$M_{\text{continuo}} = \lim_{n\to\infty} C\left(1+\frac{r\%}{n}\right)^{nt}$$

$$M_{\text{continuo}} = \lim_{n\to\infty} C\left[\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r\%}}\right)^{\frac{n}{r\%}}\right]^{r\%t}$$

Como C, $r\%$ y t son constantes

$$M_{\text{continuo}} = C\left[\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r\%}}\right)^{\frac{n}{r\%}}\right]^{r\%t}$$

Como el interés es continuo, el periodo de capitalización es instantáneo.

Entonces

$$n \to \infty$$

$$\frac{n}{r\%} \to \infty$$

Luego,

$$M_{\text{continuo}} = C\underbrace{\left[\lim_{\frac{n}{r\%}\to\infty}\left(1+\frac{1}{\frac{n}{r\%}}\right)^{\frac{n}{r\%}}\right]^{r\%t}}_{e}$$

Entonces la fórmula para el cálculo del monto a interés continuo es

$$\boxed{M_{\text{continuo}} = C \cdot e^{r\%t}}$$

donde $r\%$ y t están en las mismas unidades.

Veamos su representación gráfica para

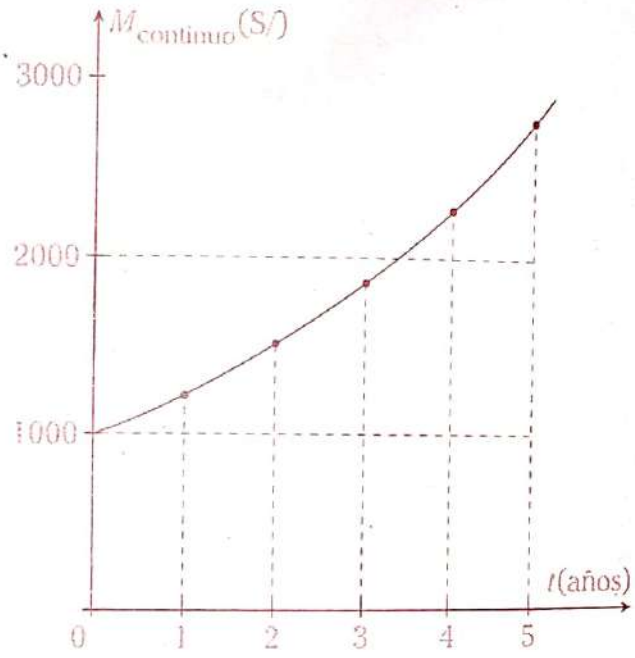
- C=S/1000
- $r\%=20\%$
- t años

  $M_{\text{continuo}}(t)=1000e^{0,2t}$

En la tabla se muestra el M_{continuo} para algunos valores de t.

t(años)	M_{continuo}(S/)
0	1000
1	1221,402...
2	1491,824...
3	1822,118...
4	2225,540...
5	2718,281...
⋮	⋮

Ahora veamos gráficamente.



Nota

Tenga en cuenta lo siguiente:

- Se debe tener presente que aunque el número de periodos de capitalización tienda al infinito, no ocurre lo mismo con el monto, pues este se va acercando a un valor determinado (tiende a un límite).
- El número e es la base de los logaritmos naturales o neperianos, y aparece en la función exponencial.

$$\boxed{e = \lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}}$$

donde el valor de e es 2,71828182845904...

Aplicación 10

Se depositan S/4000 en una cuenta de ahorros durante 5 años al 4% con capitalización continua. Halle el interés continuo que se obtendrá.

Considere $e^{0,2}=1,2214$

Resolución

Piden hallar el interés continuo.

Por dato tenemos que

- C=S/4000
- $r\%=4\%$
- t=5 años

Sabemos que

$$M_{\text{continuo}}=C\times e^{r\%t}$$

ambos en años

$$M_{\text{continuo}}=4000\times e^{4\%(5)}$$

$$M_{\text{continuo}}=4000\times \underbrace{e^{0,2}}_{1,221403}$$

$\rightarrow M_{\text{continuo}}=4885,6$

Luego,

$$M=C+I$$

$$I_{\text{continuo}}=M-C$$

$$I_{\text{continuo}}=4885,6-4000$$

$\rightarrow I_{\text{continuo}}=885,6$

Por lo tanto, se obtendrá S/885,612 de interés continuo.

Aplicación 11

Juan deposita C soles a interés continuo durante 3 años y al final retira un total de S/19 050. Halle C si la tasa de interés que se aplica es 2% trimestral. Considere $e^{0,24}=1,27$.

Resolución

Piden hallar C (capital).

Tenemos los siguientes datos:

- t=3 años
- $r\%$=2% trimestral <> 8% anual
- M_{continuo}=S/19 050

Luego,

$$M_{\text{continuo}}=C\cdot e^{r\%t}$$

ambos en años

$$19\,050=C\times e^{8\%(3)}$$

$$19\,050=C\times \underbrace{e^{0,24}}_{1,27}$$

$\therefore\ C$=S/15 000

Nota

Considere lo siguiente:

- En el sistema financiero peruano, los bancos y financieras aplican interés compuesto; además, cobran otras comisiones. Asimismo, ofrecen tasas de interés muy pequeñas para los depósitos.
- A diferencia de las tasas de interés para depósitos, en el sistema financiero peruano, las tasas de interés para prestamos y créditos son altas.
- El interés simple es utilizado por el sistema financiero informal, generalmente, por los prestamistas particulares.
- En los problemas se suele utilizar también interés simple para bancos y financieras, así como valores altos para las tasas de interés, esto por comodidad en los cálculos.
- Sabemos que

  $M=C+I$

  $\rightarrow I=M-C$

  Luego, según sea la clase de interés tenemos lo siguiente:

  $I_{\text{simple}}=M_{\text{simple}}-C$

  $I_{\text{compuesto}}=M_{\text{compuesto}}-C$

  $I_{\text{continuo}}=M_{\text{continuo}}-C$

LECTURA

Fondo de Seguro de Depósitos (FSD)

El Fondo de Seguro de Depósitos (FSD) fue creado mediante la Ley General de Instituciones Bancarias, Financieras y de Seguros, aprobada en 1991 mediante Decreto Legislativo N.° 637.

El monto máximo de cobertura para el periodo diciembre 2019-febrero 2020 es S/100 661. Este monto, de acuerdo a Ley, es actualizado trimestralmente según el índice de precios al por mayor (IPM). La cobertura del seguro respalda los depósitos nominativos, bajo cualquier modalidad, de las personas naturales y jurídicas privadas sin fines de lucro, así como los depósitos a la vista de las demás personas jurídicas. Dicho monto incluye todos los depósitos asegurados que un depositante tiene en una misma entidad financiera.

Los recursos del FSD para cumplir con sus objetivos son los siguientes:

- El aporte inicial efectuado por el BCR.
- Las primas que desembolsan sus miembros.
- Los ingresos provenientes por las multas impuestas por la SBS y el BCR.
- Los depósitos, títulos valores y otros bienes que permanezcan durante diez años en una entidad del sistema financiero y no hayan registrado ningún movimiento.
- El dinero, los valores y los demás activos depositados por las entidades en liquidación en el Banco de la Nación, en calidad de remanente de los procesos de liquidación y que no hayan sido sujeto de reclamos por un periodo de cinco años.
- El rendimiento de los activos propios del FSD.
- Las líneas de crédito del Tesoro Público aprobados mediante un Decreto de Urgencia.
- Las líneas de crédito obtenidas con garantía del Tesoro Publico aprobadas por Decreto de Urgencia.
- Demás recursos que el FSD obtenga con aprobación del Consejo de Administración.

La principal fuente de ingresos del FSD proviene de las primas que sus miembros desembolsan dentro de los diez días útiles luego de vencido cada trimestre.

Las primas que las empresas pagan trimestralmente al FSD están determinadas por la clasificación de riesgo asignada a dichas empresas por empresas especializadas y por el monto de los depósitos cubiertos. A cada categoría de clasificación de riesgo le corresponde una tasa anual de prima que varía en un rango de 0,45 % a 1,45 %.

Desde el inicio de sus actividades, el FSD ha cumplido con el mandato legal de proteger el ahorro, cubriendo las cuentas de aquellas personas afectadas por los procesos de resolución de Peruinvest, Banco Popular, Banco Hipotecario, Caja Rurales de Ahorro y Crédito Valle del Río Apurímac y Ene, Selva Central, Majes, Banco República, Banco Banex, Banco Orión, Serbanco, Banco Nuevo Mundo, NBK Bank, Banco Latino y la Financiera TFC S.A.

Adaptado de <www.fsd.org.pe>.

Problemas resueltos

Problema 1

Bertha calcula que si deposita su capital durante cierto tiempo a una determinada tasa de interés, su capital se cuadruplicaría; mientras que si lo deposita durante un tiempo igual a la tercera parte del anterior y a una tasa igual a la mitad de la anterior, obtendría un interés de S/1500. Halle el monto que recibirá si deposita su capital al 5% trimestral durante 2 años.

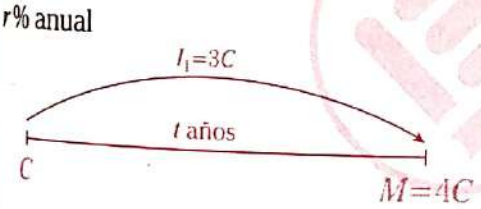
Resolución

Piden hallar el monto (M).

Opción 1

Asumimos t y $r\%$ en las mismas unidades.

Del enunciado tenemos que



Luego,

$I_1 = C \times t \times r\% = 3C$

$\rightarrow tr\% = 3$

Opción 2

$I_2 = S/1500$

$C\left(\frac{t}{3}\right)\left(\frac{r\%}{2}\right) = 1500 \rightarrow C = 2(1500) = 3000$

Entonces tenemos que

- $C = S/3000$
- 5% trimestral <> 20% anual

En 2 años

$I = 2(20\%C) = 40\%C$

Sabemos que

$M = C + I \rightarrow M = C + 40\%C = 140\%C$

$M = 140\%(3000) = 4200$

Por lo tanto, Bertha recibirá un monto de S/4200.

Problema 2

¿Cuál es el interés que genera S/4800 impuesto al 4% semestral durante 11 meses?

Resolución

Piden hallar el interés (I).

Por dato tenemos

- $C = S/4800$
- $r\% = 4\%$ semestral
- $t = 11$ meses

Entonces

$$I = 11 \times \underbrace{\left(\frac{\overbrace{\boxed{4\%4800}}^{I \text{ de un semestre}}}{6}\right)}_{I \text{ de un mes}} = 352$$

Por lo tanto, genera S/352 de interés.

Problema 3

Luz deposita en una financiera S/4500 al 10% trimestral durante 10 meses. ¿Cuánto retiró al final?

Resolución

Piden hallar el monto (M).

Del enunciado tenemos

- $C = S/4500$
- $r\% = 10\%$ trimestral
- $t = 10$ meses

Entonces

$$I = 10 \times \underbrace{\left(\frac{\overbrace{\boxed{10\%4500}}^{I \text{ de un trimestre}}}{3}\right)}_{I \text{ de un mes}} = 1500$$

Luego,

$M = C + I$

$M = 4500 + 1500 = 6000$

Por lo tanto, al final retiró S/6000.

Problema 4

¿A qué tasa de interés se deberá prestar S 2800 para obtener una ganancia de S/630 en 9 meses?

Resolución

Piden hallar la tasa de interés ($r\%$). Como no indican nada se asumirá que es anual.

Por dato tenemos

- C=S/2800
- t=9 meses
- I=S/630

Entonces

$$I = 9 \times \underbrace{\left(\frac{\overbrace{r\%2800}^{I \text{ de un año}}}{12} \right)}_{I \text{ de un mes}} = 630$$

$$r\% = \frac{630 \times 12}{9 \times 2800} \times 100\%$$

$$r\%=30\%$$

Por lo tanto, se debe prestar al 30% anual.

Otra forma

Dividimos entre tres.

I en 9 meses : S/630
I en 3 meses: S/210 $\Big) \div 3$

Sumamos.

I en un año: S/840

$$\therefore \quad r\% \text{ anual} = \frac{840}{2800} \times 100\% = 30\%$$

Problema 5

¿Cuánto debe depositar Janeth durante 3 años, en una financiera que paga 5% semestral capitalizable anualmente, para obtener un interés de S/794,4?

Resolución

Piden hallar el capital (C).

El periodo de capitalización es anual, entonces el tiempo y la tasa de interés deben estar en años.

5% semestral <> 10% anual

En 3 años

$$I_{comp}=S/794,4$$

El monto en 3 años será

$$M=110\%110\%110\%C$$

$$M=133,1\%C$$

Luego,

$$M=C+I_{comp} \rightarrow M-C=I_{comp}$$

$$133,1\%C-C=I_{comp}$$

$$33,1\%C=794,4$$

$$C=2400$$

Por lo tanto, se debe depositar S/2400.

Problema 6

La cantidad de dinero que prestó Juan durante 5 meses le ha producido un interés igual al 25% del monto. ¿A qué tasa de interés realizó el préstamo?

Resolución

Piden hallar la tasa de interés anual ($r\%$).

Sabemos que

- t=5 meses
- I=25%M

Entonces

$$I=25\%(C+I)$$

$$I=25\%C+25\%I$$

$$75\%I=25\%C$$

$$3I=C$$

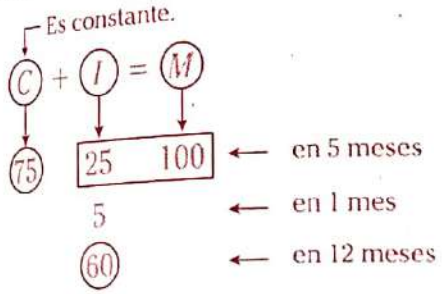
Luego,

$$3\left[5\underbrace{\left(\frac{\overbrace{r\%C}^{I \text{ de un año}}}{12}\right)}_{I \text{ de un mes}}\right]=C$$

$$r\% = \frac{4}{5}$$

$$\therefore \quad r\% = \frac{4}{5} \times 100\% = 80\%$$

Otra forma



$\rightarrow r\%\text{ anual}=\dfrac{60}{75}\times 100\% = 80\%$

Por lo tanto, se prestó al 80%.

Problema 7

Un capital impuesto al 32% cuatrimestral durante 10 meses produce S/424 más que si estuviera impuesto al 30% trimestral durante 7 meses. Halle dicho capital.

Resolución

Piden hallar el capital (C).

Opción 1

32% cuatrimestral <> 8% mensual
10 meses
$\rightarrow I_1=10(8\%C)=80\%C$

Opción 2

30% trimestral <> 10% mensual
7 meses
$\rightarrow I_2=7(10\%C)=70\%C$

Por dato

$I_1-I_2=424$

$10\%C=424 \rightarrow C=4240$

Por lo tanto, el capital es S/4240.

Problema 8

Dos capitales que están en la relación de 4 a 3 se imponen en diferentes financieras; el mayor capital se impone al 10% y el otro se impone al 5% cuatrimestral. Si al cabo de dos años, el monto total es S/17 400, halle la diferencia de dichos capitales.

Resolución

Piden hallar la diferencia de capitales.

Sean los capitales $C_1=4k$ y $C_2=3k$, ambos impuesto por 2 años.

Para el primer capital se tiene que

- $C_1=4k$
- 10%
- $I_1=2(10\%4k)=20\%4k$
- $M_1=C_1+I_1=4k+20\%4k$

  $M_1=120\%(4k)=480\%k$

Para el segundo capital se tiene que

- $C_2=3k$
- 5% cuatrimestral <> 15% anual
- $I_2=2(15\%3k)=30\%3k$
- $M_2=C_2+I_2=3k+30\%3k$

  $M_2=130\%(3k)=390\%k$

Del dato, $M_1+M_2=13\,400$

$480\%k+390\%k=17\,400$

$870\%k=17\,400$

$\rightarrow k=2000$

Piden $C_1-C_2=k=2000$.

Por lo tanto, la diferencia de dichos capitales es S/2000.

Problema 9

El interés que produce un capital impuesto al 4% bimestral, durante un semestre, es al interés que produce otro capital impuesto al 5% trimestral, durante un año, como 3 es a 7. Si la suma de dichos capitales es S/15 000, halle la diferencia de los mismos.

Resolución

Piden hallar la diferencia de los capitales.

Sea C_1 el primer capital, donde

- 4% bimestral
- 1 semestre <> 3 bimestres

Entonces

$$I_1=3(4\%C_1)=12\%C_1$$

Sea C_2 el segundo capital, donde

- 5% trimestral
- 1 año <> 4 trimestres

Entonces

$$I_2=4(5\%C_2)=20\%\,C_2$$

Sabemos que $\dfrac{I_1}{I_2}=\dfrac{3}{7}$.

$$\frac{12\%C_1}{20\%C_2}=\frac{3}{7}$$

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{5}{7}\begin{cases}C_1=5k\\C_2=7k\end{cases}$$

Por dato, $C_1+C_2=12k=$S/15 000

Nos piden $C_2-C_1=2k=$S/2500

Por lo tanto, la diferencia de los capitales es S/2500.

Problema 10

Diana deposita un capital en la financiera A, que paga 10% de interés. Al cabo de 2 años y 3 meses retira todo lo que tiene acumulado para depositarlo en la financiera B, que le pagará el 12% de interés. Si la renta anual que recibirá en B es S/882, halle el capital que depositó en la financiera A.

Resolución

Piden hallar el capital (C) depositado en la financiera A.

Para la financiera A tenemos lo siguiente:

- Capital: C
- 10% <>10% anual
- 2 años y 3 meses
- Interés: I

Luego,

En 2 años $\rightarrow$ $2(10\%C)=20\%C$

En 3 meses $\rightarrow$ $\dfrac{10\%C}{4}=2{,}5\%C$

$\rightarrow$ $I=20\%C+2{,}5\%C=22{,}5\%C$

Retira todo lo que tiene, es decir, el monto (M).

$$M=C+I$$

$$M=C+22{,}5\%C=122{,}5\%C$$

Para la financiera B tenemos lo siguiente:

- Capital: 122,5%C
- 12% <> 12% anual
- renta anual <> interés en un año

Luego,

$$12\%(122{,}5\%C)=882$$

$$C=6000$$

Por lo tanto, depositó S/6000 en la financiera A.

Problema 11

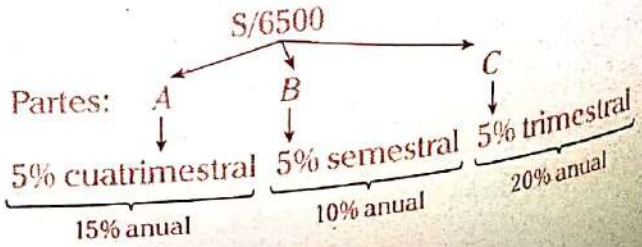
Mateo tiene un capital de S/6500 y lo divide en tres partes, las cuales impondrá al 5% cuatrimestral, al 5% semestral y al 5% trimestral, respectivamente. Si todas las partes producen el mismo interés bimestral, halle el interés que producirá la menor parte en 4 años.

Resolución

Piden hallar el interés de la menor parte en 4 años.

> **Recuerde**
> Si los intereses producidos en un bimestre son iguales, entonces los intereses producidos en cualquier tiempo también serán iguales.

Tenemos lo siguiente:



En un año,

$I_A = I_B = I_C$

$$15\%\underset{4k}{\underset{\downarrow}{A}} = 10\%\underset{6k}{\underset{\downarrow}{B}} = 20\%\underset{3k}{\underset{\downarrow}{C}}$$

Como $A+B+C=6500$

$13k=6500$

$\rightarrow k=500$

Piden el interés que producirá el menor capital en 4 años.

El menor capital es $3k=1500$.

Está impuesto al 20% anual.

En 4 años,

$I=4(20\%1500)=1200$

Por lo tanto, el interés que producirá será S/1200.

Problema 12

Se invierte un capital al 1% trimestral con capitalización continua. ¿Dentro de cuántos años se ganará el triple de la inversión? Considere que $\ln 2=0{,}7$.

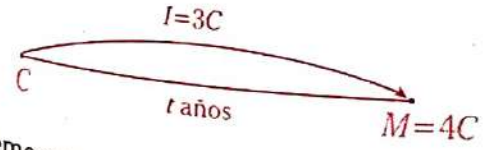
Resolución

Piden hallar el tiempo (t).

Sea C el Capital.

Además,

1% trimestral <> 4% anual



Sabemos que

$M_{\text{continuo}}=C\times e^{r\%t}$

donde t y $r\%$ están en las mismas unidades

Entonces

$4C=C\times e^{4\%t}$

$4=e^{0{,}04t}$

Tomamos logaritmo neperiano.

$\ln 4=\ln e^{0{,}04t}$

$\ln 4=(0{,}04t)\underbrace{\ln e}_{1}$

$\ln 4=0{,}04t$

$\ln 2^2=0{,}04t$

$2\underbrace{\ln 2}_{0{,}7}=0{,}04t$

$1{,}4=0{,}04t \rightarrow t=35$

Por lo tanto, será dentro de 35 años.

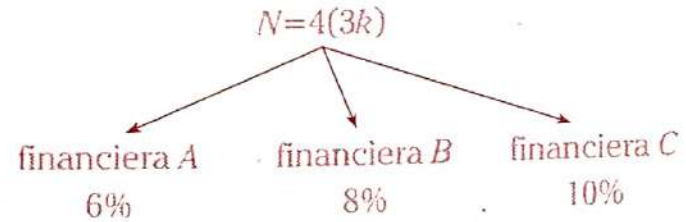
Problema 13

Rudy renuncia a su trabajo y recibe N soles. La cuarta parte de ese dinero lo impone en una financiera A, que paga el 6% de interés, y el resto lo divide en dos partes, colocándolas en otras dos financieras, B y C, que pagan 8% y 10%, respectivamente, obteniendo una renta total de S/6125. Halle N si se sabe que el interés en B y C es el mismo en 2 años.

Resolución

Piden hallar N.

Tenemos que



$C_A=1(3k)$ $\qquad$ $\underbrace{C_B+C_C=3(3k)}=9k$

Si los intereses en 2 años son los mismos, lo son también en un año.

$I_B=I_C$

$8\%\underbrace{C_B}_{5k}=10\%\underbrace{C_C}_{4k}$

Además, la renta (interés en un año) es S/6125.

$I_A+I_B+I_C=6125$

$6\%(3k)+8\%(5k)+10\%(4k)=6125$

$98\%k=6125$

$k=6250$

Entonces

$N=12k$

$N=12(6250)$

$\therefore\ N=75\ 000$ soles

Problema 14

Un capital es depositado al 10% mensual durante un año y con capitalización bimestral. Si se sabe que en el tercer periodo de capitalización se obtiene un interés de S/1440, halle dicho capital.

Resolución

Piden hallar el interés en el tercer periodo de capitalización.

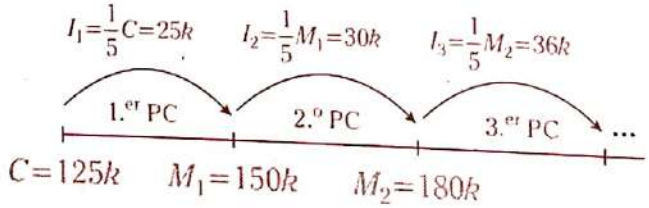
El periodo de capitalización (PC) es bimestral, entonces, el tiempo y la tasa de interés deben estar en bimestres.

10% mensual <> 20% bimestral

Cada PC gana 1/5 del nuevo capital.

un año <> 6 bimestres (6 PC)

Solo nos interesa hasta el tercer PC, entonces asumiremos un capital inicial igual a $5^3k=125k$.



Sabemos que

$I_3=$S/1440

$36k=1440$

$k=40$

$\rightarrow\ C=125k=125(40)=5000$

Por lo tanto, el capital es S/5000.

Problema 15

Un empresario deposita los 2/3 de su capital al 10% durante 3 años; el resto de su capital lo impone al 5% semestral, capitalizable anualmente, durante 2 años. Determine el capital del empresario si se sabe que el monto total que obtuvo por ambos depósitos fue S/5715.

Resolución

Piden hallar el capital (C).

Sea $C=3N$ soles

Divide su capital en dos partes y las impone a diferentes condiciones.

Condición 1

$\frac{2}{3}C=2N$ lo impone a interés simple

10% <> 10% anual

En 3 años, el interés será

$I=3(10\%2N)=30\%(2N)$

Luego el monto será

$M_1=2N+30\%(2N)=130\%(2N)$

$\rightarrow\ M_1=260\%N$

Condición 2

El resto de su capital es N y lo impone a interés compuesto.

El periodo de capitalización es anual, entonces el tiempo y la tasa de interés deben estar en años.

5% semestral <> 10% anual

En 2 años, el monto será

$M_2=110\%110\%N=121\%N$

Por dato, el monto total es S/5715.

$M_1+M_2=$S/5715

$260\%N+121\%N=5715$

$381\%N=5715$

$N=1500\ \rightarrow\ C=3N=4500$

Por lo tanto, el capital del empresario fue S/4500.

Problema 16

Karen presta S/5000 al 10% mensual sobre el saldo deudor de cada bimestre. El primer y segundo bimestre no se amortiza nada; el tercer y cuarto bimestre se amortiza A y $2A$ soles, respectivamente. Si la deuda se canceló al octavo mes, ¿cuánto se amortizó el cuarto bimestre?

Resolución

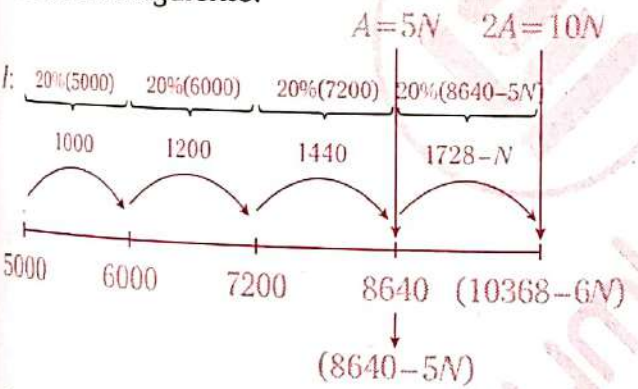
Piden hallar cuánto se amortizó el cuarto bimestre.

La condición indica que los intereses se pagan respecto al saldo deudor de cada bimestre.

10% mensual <> 20% bimestral

Entonces cada bimestre se cobrará un interés igual al 20% de lo que aún falta pagar (saldo deudor).

Tenemos lo siguiente:



Como se canceló al octavo mes

$10N=10\,368-6N$

$16N=10\,368$

$N=648 \rightarrow 2A=10N=6480$

Por lo tanto, el cuarto mes se amortizó S/6480.

Problema 17

Se deposita C soles durante 2 años al $r\%$ semestral en una entidad que paga interés continuo. Si el capital se cuadruplica, halle $r\%$.

Resolución

Piden hallar $r\%$.

Se impone a interés continuo

$M=C\times e^{r\%t}$

donde

- t y $r\%$ deben estar en las mismas unidades.
- $r\%$ semestral
- $t=2$ años <> 4 semestres
- $M=4C$

Entonces

$$C\times e^{r\%\times 4}=4C$$

$$e^{4r\%}=4$$

Tomamos logaritmo neperiano.

$$\ln e^{4r\%}=\ln 4$$

$$4r\%=\ln 4$$

$$\therefore\ r\%=\frac{\ln 4}{4}$$

Problema 18

Arturo tiene S/4800 y tiene que elegir entre las siguientes dos opciones:

I. Prestar S/2400 a Henry al 6% cuatrimestral, y prestar los otros S/2400 a Ramiro al 8% trimestral, ambos durante 3 años.

II. Depositar su dinero en una financiera que le paga el 5% trimestral capitalizable anualmente durante por 3 años.

Si Arturo elige la mejor opción, ¿cuánto más ganaría con respecto a la otra?

Resolución

Piden hallar la diferencia de los intereses entre ambas opciones.

Sea $4800=C$.

Opción I

- Para Henry

  6% cuatrimestral <> 18% anual

  En 3 años el interés sería

  $$3\left(18\%\frac{C}{2}\right)=27\%C$$

- Para Ramiro

  8% trimestral <> 32% anual

  En 3 años el interés sería

  $$3\left(32\%\frac{C}{2}\right)=48\%C$$

$\rightarrow I_1=27\%C+48\%C=75\%C$

Opción II

El periodo de capitalización es anual, entonces el tiempo y la tasa de interés deben estar en años.

- 5% trimestral <> 20% anual
- 3 años

$\rightarrow M=120\%120\%120\%C=172{,}8\%C$

$M=C+I_2$

$I_2=172{,}8\%C-C=72{,}8\%C$

Entonces debe elegir la opción I.

$I_1-I_2=2{,}2\%C$

$I_1-I_2=2{,}2\%(4800)=105{,}6$

Por lo tanto, con la opción I ganaría S/105,6 más.

Problema 19

Noemi deposita C soles durante 2 años al $r\%$ con capitalización anual y aumenta en 2 veces su valor. ¿Cuánto tiempo debió estar depositado el dinero para que se convierta en 9 veces su valor?

Resolución

Piden hallar el tiempo.

El periodo de capitalización (PC) es anual, entonces el tiempo y la tasa de interés deben estar en años.

- $r\%$ anual
- 2 años <> 2PC

El capital aumenta en 2 veces su valor, es decir, se triplica.

$M=3C$

$C(1+r\%)^2=3C$

$\rightarrow (1+r\%)^2=3 \qquad (*)$

En t años (t periodos de capitalización)

$M_1=9C$

$C(1+r\%)^t=9C$

$\rightarrow (1+r\%)^t=9$

Elevamos (*) al cuadrado.

$(1+r\%)^4=9$

Obtenemos que $t=4$.

Por lo tanto, debió estar depositado 4 años.

Problema 20

¿Cuánto más de interés se obtendrá al depositar S/20 000 durante 2 años al 10% de interés continuo en lugar de imponerlo a interés compuesto con capitalización semestral impuesto con la misma tasa de interés y durante el mismo tiempo? Considere $e^{0,2}=1{,}2214$; $1{,}05^4=1{,}2155$.

Resolución

Piden hallar la diferencia de intereses.

Por dato

$C=$S/20 000

- Con interés continuo

  $t=2$ años

  $r\%=10\%$ anual

  $M_1=C\cdot e^{2(10\%)}$

  $M_1=C\times\underbrace{e^{0,2}}_{1,2214}=1{,}2214C$

- Con interés compuesto

  El periodo de capitalización es semestral, entonces el tiempo y la tasa de interés deben estar en semestres.

  $r\%=10\%$ <> 5% semestral

  $t=2$ años <> 4 semestres

  $M_2=C(1+5\%)^4=C\underbrace{(1{,}05)^4}_{1,2155}$

  $M_2=1{,}2155C$

Luego,

$$\begin{array}{l} M_1=C+I_1 \\ M_2=C+I_2 \end{array} \Big)(-)$$

$$M_1-M_2=I_1-I_2$$

$\rightarrow I_1-I_2=0{,}0059C$

$I_1-I_2=0{,}0059(20\,000)=118$

Por lo tanto, obtendrá S/118 más de interés.

Test

1. Una tasa de interés del 10% cuatrimestral equivale al r% trimestral. Indique el valor de r.

A) 2,5 B) 5 C) 6
D) 7,5 E) 8

2. Se sabe lo siguiente:
   - El periodo de capitalización es trimestral.
   - Tiempo: 1 año
   - Tasa: 30% semestral
   - $M = C(1+r\%)^T$

Indique la tasa a utilizar en el cálculo del monto.

A) $r\%=60\%$ B) $r\%=5\%$ C) $r\%=10\%$
D) $r\%=15\%$ E) $r\%=20\%$

3. Si el interés simple que produce un capital de C soles en 4 meses es S/500, ¿cuánto será el interés que produzca en 9 meses?

A) S/750 B) S/875 C) S/950
D) S/1075 E) S/1125

4. Indique el interés que producirá un capital de S/2000 impuesto al 10% durante tres años.

A) S/150 B) S/300 C) S/600
D) S/660 E) S/750

5. Indique el monto que se obtiene al imponer S/6000 durante dos años al 5% semestral.

A) S/6600 B) S/7000 C) S/7200
D) S/7500 E) S/8000

6. Un capital de S/4000 impuesto al 20% cuatrimestral produce un interés trimestral de

A) S/600. B) S/640. C) S/680.
D) S/750. E) S/800.

7. Indique el monto que generará un capital de C soles impuesto durante 2 años al 20% capitalizable anualmente.

A) 120%C B) 124%C C) 136%C
D) 140%C E) 144%C

8. Se deposita C soles al 12% trimestral. ¿Cuál será el monto al cabo de dos años?

A) 124%C B) 136%C C) 164%C
D) 172%C E) 196%C

9. Un capital de C soles impuesto al r% se convertiría al cabo de 3 y 4 años en S/9000 y S/10 500, respectivamente. Halle el interés que produce en un año.

A) S/1200 B) S/1500 C) S/1600
D) S/1750 E) S/1800

10. Indique la tasa de interés a la cual se debe imponer un capital de C soles para que produzca una mayor renta anual.

A) 1% mensual
B) 2,5% bimestral
C) 4,5% trimestral
D) 5,5% cuatrimestral
E) 8% semestral

Claves

1 D 2 D 3 E 4 C 5 C 6 A 7 E 8 E 9 B 10 C

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Diana deposita S/3250 al 4% durante 2 años. ¿Cuánto obtuvo de interés?

A) S/180 B) S/220 C) S/240
D) S/260 E) S/280

2. Mateo presta *C* soles al 20% trimestral durante un año, recibiendo S/1200 de interés. Halle *C*.

A) S/2400 B) S/2100 C) S/1800
D) S/1640 E) S/1500

3. ¿Por cuánto tiempo se deberá prestar S/1800, al 15% mensual, para obtener S/2160 de interés?

A) 7 meses B) 8 meses C) 9 meses
D) 11 meses E) un año

4. María prestó S/850 al 10% mensual durante 5 meses; Rosa prestó S/640 al 15% mensual por el mismo tiempo. ¿Quién recibió más interés y cuánto fue dicha cantidad?

A) Rosa; S/45
B) María; S/55
C) María; S/64
D) Rosa; S/55
E) Rosa; S/64

5. ¿A qué tasa de interés se debe imponer S/2500 para que produzca S/75 de interés en 40 días?

A) 21% B) 24% C) 25%
D) 27% E) 28%

6. ¿Durante cuánto tiempo se debe imponer S/7500 al 4% cuatrimestral y S/6000 al 10% semestral para obtener el mismo monto?

A) 2 años
B) 3 años
C) 4 años
D) 5 años
E) 5 años y 4 meses

7. Dino deposita *C* soles en un banco al 5% capitalizable anualmente durante 2 años. Si al final retiró un total de S/4410, halle *C*.

A) S/3300 B) S/3440 C) S/3600
D) S/3820 E) S/4000

8. Si se impone un capital por 14 meses se obtendría un monto de S/13 550, pero si se dejara 6 meses más se tendría un monto de S/14 000. Halle la tasa de interés.

A) 5% B) 6% C) 7,2%
D) 8,4% E) 9%

9. Si un capital se impone al 20% cuatrimestral durante 13 meses, produce S/1050 más de interés que impuesto al 24% semestral durante 11 meses. Determine dicho capital.

A) S/4200 B) S/4800 C) S/5000
D) S/5400 E) S/5500

10. Claudia divide su capital en dos partes, colocándolas en las financieras *A* y *B*, al 3% bimestral y al 5% trimestral, respectivamente, obteniendo el mismo interés anual. Si su capital total es S/9500, halle la diferencia de las partes que colocó en *A* y en *B*.

A) S/500 B) S/580 C) S/640
D) S/720 E) S/900

11. Un microempresario divide su capital en tres partes y las coloca en entidades financieras diferentes, de la siguiente manera:
- El 20% al 5% trimestral.
- 3/8 del resto al 10% cuatrimestral.
- El resto al 17% semestral.

¿Cuánto tiempo debe trascurrir para que su capital aumente 3 veces su valor?

A) 6 años
B) 8 años
C) 9 años
D) 10 años
E) 12 años

12. Andrés y Andrea cumplen hoy 13 y 15 años, respectivamente, e imponen sus propinas al 5% semestral. Cuando cada uno de ellos cumpla 18 años habrán obtenido el mismo interés. Halle el capital de Andrea si se sabe que excede al de Andrés en S/480.

A) S/1000 B) S/1200 C) S/1260
D) S/1350 E) S/1500

13. El capital de Alfredo, impuesto al 40% durante un año y medio con capitalización semestral, produce un interés que es S/1700 menos que dicho capital. Halle el monto que obtuvo Alfredo.

A) S/10 800 B) S/11 200 C) S/11 500
D) S/12 080 E) S/13 200

14. Patricia depositó su capital al 5% semestral y obtuvo un monto de S/10 420; si lo hubiese depositado al 2% trimestral, el monto sería S/8820. Halle el capital que depositó Patricia.

A) S/2400 B) S/2420 C) S/2450
D) S/2480 E) S/2560

15. Karina divide su capital en tres partes y los deposita en tres bancos diferentes, los cuales pagan el 5%, 10% y 15% semestral, obteniendo el mismo monto en los tres bancos, al cabo de dos años. Si la diferencia entre la mayor y menor parte es S/7000, halle el capital total de Karina.

A) S/64 000 B) S/67 400 C) S/72 500
D) S/73 000 E) S/75 200

16. Se impone un capital a una tasa del 5% trimestral de interés continuo durante dos años. Halle el interés que se obtiene. Considere que $e^{0,2}=1,22$.

A) S/2400 B) S/2442 C) S/2464
D) S/2640 E) S/2664

Nivel intermedio

17. Danilo divide su capital en dos partes que se diferencian en \$400; coloca dichas partes en dos fondos de inversión, al 5% trimestral y 6% cuatrimestral, respectivamente. Halle el capital inicial de Danilo si al cabo de dos años obtiene el mismo monto en ambos fondos de inversión.

A) \$26 400 B) \$27 600 C) \$28 800
D) \$29 000 E) \$30 500

18. Al imponer un capital durante un año al n% trimestral se obtendría S/450 más de interés que si se impusiera al n% cuatrimestral durante el mismo tiempo. ¿Qué interés se recibiría si se impone el mismo capital durante un año y medio al n% bimestral?

A) S/3600 B) S/3750 C) S/3900
D) S/4050 E) S/4500

19. Un banco ofrece pagar una tasa de interés de r% en soles; una persona deposita C soles durante t meses. Haciendo cálculos se da cuenta que el interés que obtendrá será igual al n% del respectivo monto. Halle r.

A) $\frac{1200n}{t(100-n)}$ B) $\frac{600n}{t(100-n)}$ C) $\frac{600n}{t(100+n)}$
D) $\frac{1200n}{t(100+n)}$ E) $\frac{1800n}{t(100-n)}$

20. Mateo tiene S/14 000 y lo divide en dos partes, imponiendo una parte al 2,5% mensual y la otra al 25% semestral, por lo que obtiene el mismo monto con cada parte al cabo de un año. Indique cuánto es la menor de las dos partes.

A) S/5000 B) S/5500 C) S/6500
D) S/7000 E) S/7500

21. Andrés impone su capital al 1% semestral durante dos años; Lucero impone su capital al 2,5% semestral durante tres años. El interés que obtiene Andrés es al interés que obtiene Lucero como 3 es a 10. Si la suma de sus capitales es S/34 000, halle el capital de Lucero.

A) S/14 000 B) S/14 600 C) S/15 000
D) S/16 000 E) S/16 400

22. Un capital de S/3310 se presta al 40% sobre el saldo deudor de cada trimestre. Si la deuda debe ser pagada con tres cuotas trimestrales de igual valor, halle el valor de dicha cuota.

A) S/1220 B) S/1300 C) S/1331
D) S/1340,5 E) S/1641

23. Dos capitales que suman S/6150 se colocan a distintas tasas de interés. El mayor de ellos se coloca al 10% semestral y el otro al 25%; al cabo de un año se obtienen montos que están en la relación de 3 a 2, respectivamente. Halle la diferencia de dichos capitales.

A) S/1050 B) S/1140 C) S/1260
D) S/1350 E) S/1440

24. Diana quiere comprar una laptop, pero no dispone del dinero necesario para comprarla; por ello, deposita el dinero que tiene en una entidad financiera que paga el 12% semestral. Luego de ocho meses todavía le falta S/216 para comprar la laptop. Si deja su dinero siete meses más podría comprarla y le sobraría S/330. Considerando que el precio de la laptop no varió, halle dicho precio.

A) S/3900 B) S/4116 C) S/4446
D) S/4600 E) S/4740

25. Yaré tiene dos opciones para depositar su capital de C soles, y son las siguientes:

I. En el banco A, impuesto al r% semestral durante cuatro años y con capitalización anual.
II. En el banco B, al 5% trimestral también durante cuatro años.

Si lo deposita en A, ganaría $\frac{171}{625}C$ soles más que si lo depositara en B. Halle el valor de r.

A) 8 B) 10 C) 11
D) 12 E) 15

26. André, Paolo y Jefferson imponen sus capitales en diferentes financieras al 3% trimestral, 5% cuatrimestral y 5% semestral, respectivamente, obteniendo la misma resta anual. Si el mayor monto obtenido en un año es S/99 000, ¿a cuánto asciende el menor de los capitales?

A) S/56 000 B) S/60 000 C) S/64 000
D) S/75 000 E) S/90 000

27. La suma de tres capitales es S/42 100. Colocados a una misma tasa de interés simple durante cuatro años se convierten en S/2220, S/10 800 y S/17 520, respectivamente. Halle el mayor capital.

A) S/14 600 B) S/16 800 C) S/18 500
D) S/21 000 E) S/21 500

28. Se impone un capital al 5% semestral. Al final del primer año se retiran los intereses y una parte del capital igual a los intereses. Lo mismo se hace al final del segundo año y el capital quedó disminuido en S/285. Halle el capital inicial.

A) S/1500 B) S/1900 C) S/2580
D) S/2850 E) S/3000

29. El precio de una camioneta es $24 000 y se desvaloriza uniformemente $975 por año. Si Julio tiene $17 500 y lo deposita en una financiera al 3%, ¿cuánto tiempo deberá transcurrir, como mínimo, para que pueda comprar dicha camioneta?

A) 3 años y 3 meses
B) 3 años y 8 meses
C) 4 años
D) 4 años y 3 meses
E) 4 años y 4 meses

30. Bertha y Mary cuentan con S/7500 cada una y los depositan al 5% semestral durante tres años; la diferencia está en que Bertha deposita su capital a interés simple, mientras que Mary lo hace a interés compuesto con capitalización anual. Halle la diferencia positiva de los montos que obtienen ambas.

A) S/232,5 B) S/248 C) S/315,2
D) S/375 E) S/465

31. Un capital se impone al 40% semestral con capitalización trimestral. ¿Cuánto tiempo se debe dejar el capital para que aumente en 72,8% de su valor?

A) 6 meses B) 8 meses C) 9 meses
D) 10 meses E) un año

32. Un capital es depositado al 10% semestral con capitalización anual. ¿Cuánto tiempo debe transcurrir para que aumente en dos veces su valor? Considere que $\log 3 = 0{,}474$ y $\log 1{,}2 = 0{,}079$.

A) 3 años B) 4 años C) 5 años
D) 6 años E) 8 años

Nivel avanzado

33. Willy impone su capital durante 16 meses al 10% bimestral, capitalizable cuatrimestralmente. Si el monto del segundo periodo de capitalización excede al interés obtenido en el último periodo en S/27 360, halle el capital que impuso Willy.

A) S/20 000 B) S/24 000 C) S/25 000
D) S/26 400 E) S/27 500

34. Dos capitales que se diferencian en S/2300 se depositan en diferentes entidades financieras por dos años, una paga el 10% y la otra paga 20%, ambas con capitalización anual. Se obtiene el mismo monto. Calcule la diferencia de los intereses que se obtendrían si se hubieran depositado durante el mismo tiempo anterior y a las mismas tasas de interés, pero a interés simple.

A) S/1720 B) S/1840 C) S/1960
D) S/2020 E) S/2100

35. Un capital de S/40 000 estuvo impuesto durante cierto tiempo en una entidad financiera que paga los intereses de una manera particular: por los años da una tasa de interés del 5%, por los meses da el 4%, y por los días da el 3%. Calcule el interés total producido si se sabe que impuesto durante el mismo tiempo al 5%, produciría S/3840 más de interés que impuesto al 3%.

A) S/8200 B) S/8600 C) S/9260
D) S/9600 E) S/9620

36. Se presta S/4400 a una tasa de interés del 80% sobre el saldo deudor de cada trimestre. El primer y el segundo trimestre no se amortiza nada; el tercer y cuatro trimestre se amortiza una cantidad igual a M soles. ¿Cuánto debe ser M para que la deuda se cancele al año?

A) S/2928,2 B) S/3640,4 C) S/4147,2
D) S/4200,4 E) S/4410,2

37. ¿Cuál es el capital que, impuesto al $8,\widehat{3}\%$ mensual capitalizable trimestralmente, produce un interés de S/375 en el último periodo de capitalización? Considere que dicho capital estuvo impuesto durante 315 días.

A) S/960 B) S/990 C) S/1080
D) S/1150 E) S/1200

38. Hace dos años, Ana pidió prestado a un banco cierta cantidad de dinero al 10% capitalizable anualmente. El mismo día que recibió el préstamo, Ana lo depositó en una caja de ahorros que paga el 15% acumulable anualmente. Al devolver el dinero hoy al banco, ha obtenido una ganancia de S/14 625. Determine el préstamo que le hizo el banco.

A) S/125 000 B) S/130 000 C) S/150 000
D) S/180 000 E) S/225 000

39. Al colocar C soles durante cuatro años al $r\%$ capitalizable anualmente, se cuadruplica. ¿Cuánto tiempo debió estar impuesto para que aumente en 15 veces su valor?

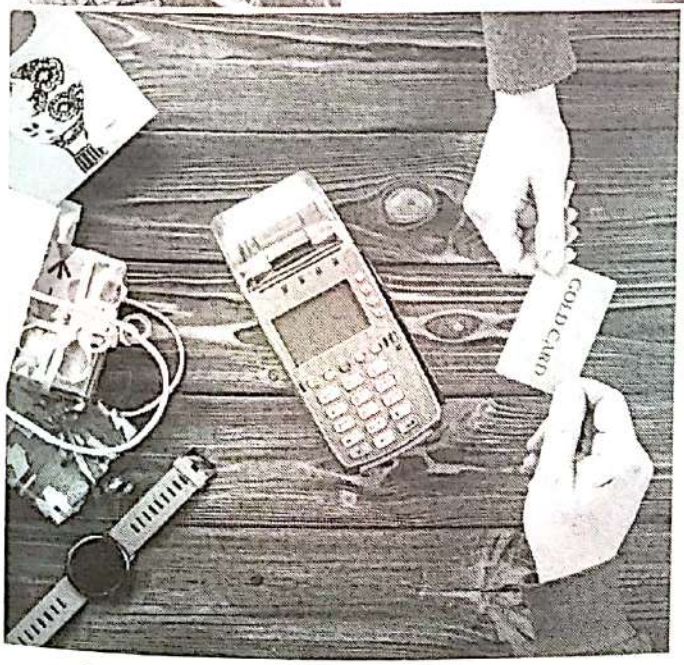
A) 16 años B) 12 años C) 10 años
D) 8 años E) 6 años

40. Un banco ofrece una tasa de interés del 40% capitalizable trimestralmente; otro banco ofrece la misma tasa de interés, pero a interés continuo. Si se deposita la misma cantidad de dinero por seis meses en ambos bancos, los intereses que producen se diferencian en S/137,5. ¿Cuánto se depositó en cada banco? Considere que $e^{0,2}=1,22$.

A) S/10 050 B) S/11 500 C) S/12 200
D) S/12 375 E) S/13 750

Capítulo

XVI



Regla de descuento

Ángel Sánchez Oré

Capítulo XVI

Regla de descuento

Objetivos

- Comprender la regla de descuento como una aplicación del ámbito comercial.
- Reconocer los elementos de la regla de descuento y la relación que existe entre ellos.
- Aprender la diferencia entre las clases de descuentos y sus respectivas aplicaciones en diferentes situaciones, como cuando se trabaje con documentos comerciales (letras de cambio).

Introducción

A partir de las cruzadas, las condiciones de Europa occidental sufrieron un cambio profundo, la economía natural del intercambio y trueque desapareció gradualmente y fue reemplazada por la economía monetaria; asimismo, el crédito comienza a aparecer bajo la forma de usura, pues en esa época la mayoría de los prestamos eran para consumo y no para producción.

Las actividades comerciales, la fijación de precios, la acuñación de monedas, el crédito y el préstamo han representado fuentes de formación de conceptos matemáticos, debido a la interacción entre los negocios y las matemáticas. Tanto en la antigüedad como en nuestros días, el comercio ha sido el principal usuario de las operaciones matemáticas, actualmente resumido y expresado con el nombre de matemática financiera.

La costumbre de pagar por hacer uso de un dinero prestado tiene su razón de ser en el sistema económico en que vivimos. Los hombres de negocio de las antiguas civilizaciones, como sabemos, también hicieron uso de esta forma de obtener beneficios e incluso hoy tiene importancia fundamental, ya que toda la maquinaria financiera y crediticia descansa sobre el concepto básico de pagar por el dinero prestado.

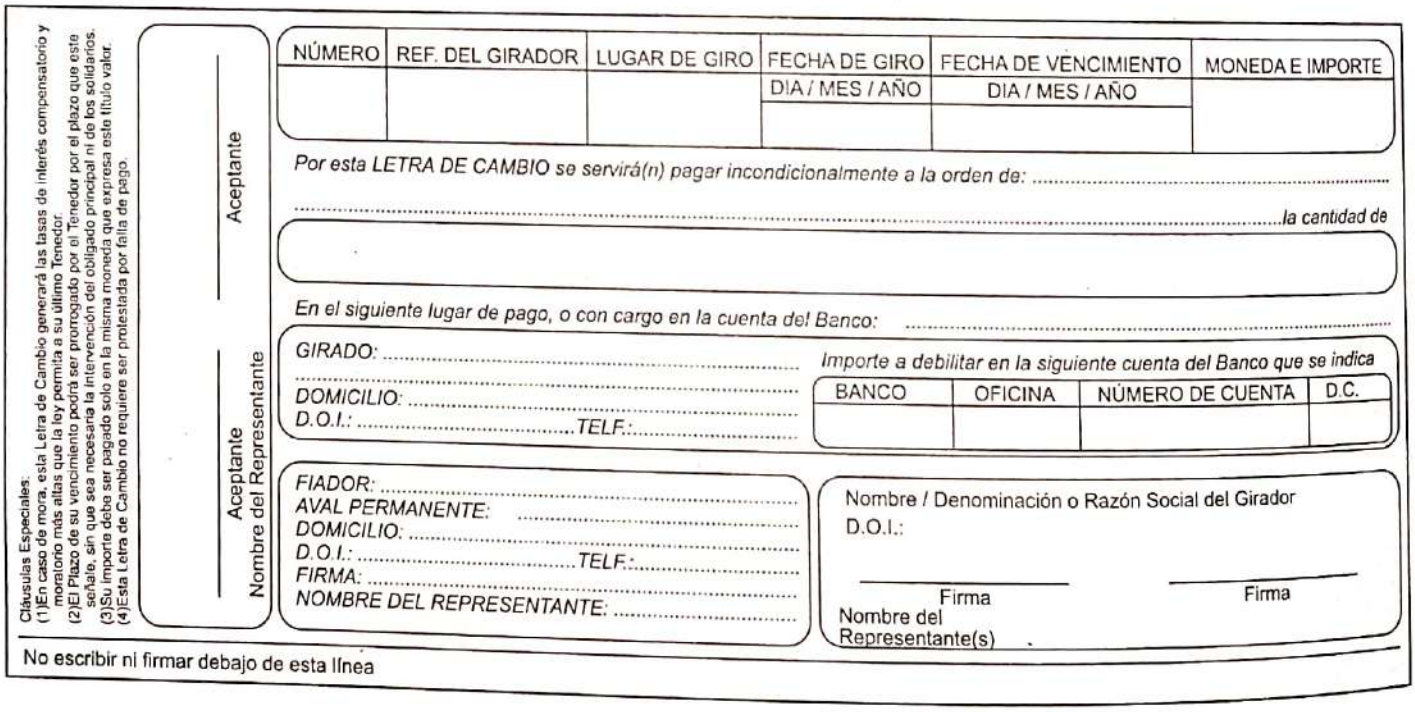
El préstamo con interés y la usura son actividades de origen muy remoto, mientras que el origen de la letra de cambio es más reciente, puesto que surgió en el siglo XII, cuando las transacciones comerciales se volvieron más complicadas por establecer la práctica de pagar mediante un documento escrito en el que se ponía de manifiesto la promesa de pagar dicha deuda, claro está, bajo ciertas condiciones sobre el momento de pagar y el tiempo que se daba para la cancelación.

El presente capítulo aborda el tema de la regla de descuento, la cual es una práctica de descuento que se obtiene a interés simple por cancelar una deuda contraída antes de la fecha acordada; también se hará referencia a la manera de poder cambiar una o más letras de cambio por una u otras letras sin que se perjudique ni al acreedor ni al deudor.

1 ▸ APLICACIÓN COMERCIAL DE LA REGLA DE DESCUENTO

El descuento se define como un ahorro anticipado de fondos que normalmente una entidad financiera o casa comercial (tenedor) efectúa a favor de sus clientes (deudor) con cargo a créditos no vencidos. Esto ocurre muy a menudo, ya que no siempre disponemos de un capital para la adquisición inmediata de bienes necesarios; por tanto, recurrimos a compromisos de pago que se dan por intermedio de un documento legalizado, como pueden ser letras de cambio, pagarés, cheques, contratos, pólizas, etc.

En este capítulo, estudiaremos los procedimientos que nos permitan calcular lo que deja de pagar el deudor por hacer efectivo el pago del documento antes de la fecha de vencimiento, a esto lo conocemos como descuento. En particular, trabajaremos con la **letra de cambio**, la cual constituye un documento de crédito. En la actualidad, este instrumento de crédito se ha convertido en una herramienta importante para las transacciones comerciales, ya que incluso están contempladas en el código de comercio, lo cual hace posible su cobro.



NÚMERO	REF. DEL GIRADOR	LUGAR DE GIRO	FECHA DE GIRO	FECHA DE VENCIMIENTO	MONEDA E IMPORTE
			DIA / MES / AÑO	DIA / MES / AÑO	

Por esta LETRA DE CAMBIO se servirá(n) pagar incondicionalmente a la orden de: .....

..... la cantidad de

En el siguiente lugar de pago, o con cargo en la cuenta del Banco: .....

GIRADO: .....

DOMICILIO: .....

D.O.I.: ..... TELF.: .....

Importe a debilitar en la siguiente cuenta del Banco que se indica

BANCO	OFICINA	NÚMERO DE CUENTA	D.C.

FIADOR: .....

AVAL PERMANENTE: .....

DOMICILIO: .....

D.O.I.: ..... TELF.: .....

FIRMA: .....

NOMBRE DEL REPRESENTANTE: .....

Nombre / Denominación o Razón Social del Girador

D.O.I.:

Firma — Firma

Nombre del Representante(s)

Aceptante

Aceptante

Nombre del Representante

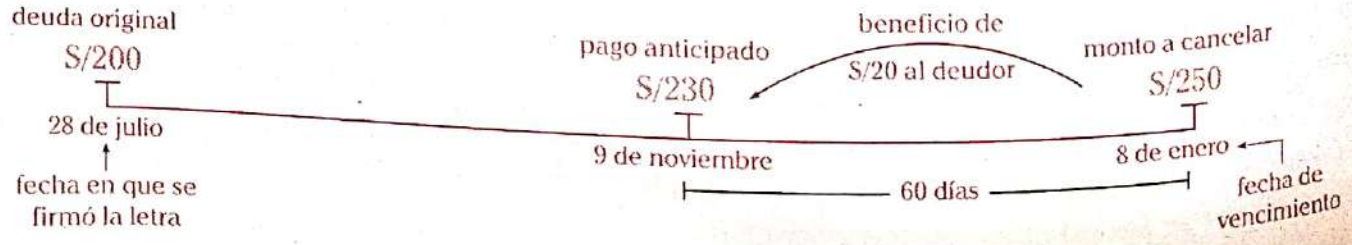
Cláusulas Especiales:
(1)En caso de mora, esta Letra de Cambio generará las tasas de interés compensatorio y moratorio más altas que la ley permita a su último Tenedor.
(2)El Plazo de su vencimiento podrá ser prorrogado por el Tenedor por el plazo que este señale, sin que sea necesaria la intervención del obligado principal ni de los solidarios.
(3)Su importe debe ser pagado solo en la misma moneda que expresa este título valor.
(4)Esta Letra de Cambio no requiere ser protestada por falta de pago.

No escribir ni firmar debajo de esta línea

Letra de cambio

Veamos una aplicación que nos permita identificar los elementos de la regla de descuento.

Carolina se dirige a una casa comercial el 28 de julio para comprar un equipo con S/600, pero el costo del equipo que desea es de S/800. Llega a un acuerdo ese mismo día para poder llevarse el equipo y por la diferencia que le falta firma una letra de cambio con un monto de S/250, que tiene como fecha límite de pago el 8 de enero del próximo año. Sin embargo, Carolina canceló la deuda el 9 de noviembre pagando S/230.



2▸ ELEMENTOS DE LA REGLA DE DESCUENTO

2.1. VALOR NOMINAL (V_n)

Es el valor que asume la letra de cambio para cancelarse en una fecha de vencimiento (S/250 en el ejemplo anterior), y es el valor que figura en el documento. También es llamado valor futuro.

2.2. VALOR ACTUAL (V_a)

Es el valor que tiene un pago anticipado a la fecha de vencimiento (S/230 en el ejemplo) de dicho documento.

Tenga presente que el valor actual será igual al valor nominal cuando se paga en la fecha de vencimiento.

2.3. DESCUENTO (D)

Es el beneficio que tiene el deudor por realizar un pago anticipado; está dado por la diferencia entre el valor nominal y el valor actual (en el ejemplo el descuento es de S/20).

$$D = V_n - V_a$$

2.4. TIEMPO DE DESCUENTO (t)

Es el tiempo que falta para el vencimiento del documento al momento de realizar un pago anticipado (60 días en el ejemplo).

2.5. TASA DE DESCUENTO ($r\%$)

Es el tanto por ciento aplicado, por cada cierto periodo establecido, a un determinado valor (valor nominal y actual), por lo que a partir de ello existirá una clasificación que será mencionada al tratar las clases de descuento que hay.

3▸ CLASES DE DESCUENTO

El cálculo del descuento es un cálculo de interés simple tomando como referencia cierto capital: capital futuro (valor nominal) y capital presente (valor actual); y se clasifica en descuento comercial y descuento racional.

3.1. DESCUENTO COMERCIAL (D_c)

Llamado también descuento externo o descuento abusivo o bancario. Se da cuando el descuento se calcula como un interés simple tomando como capital de referencia el valor nominal, que al ser aplicado da origen al valor líquido (valor actual comercial: V_{ac}).

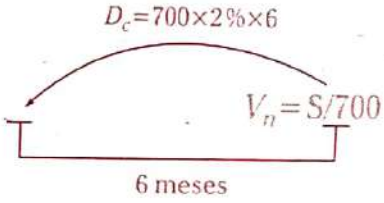
$$D_c = V_n\, r\%\, t$$

Aplicación 1

Calcule el descuento comercial de una letra de cambio cuyo valor nominal es S/700 a una tasa del 2 % mensual durante seis meses.

Resolución

Graficamos.



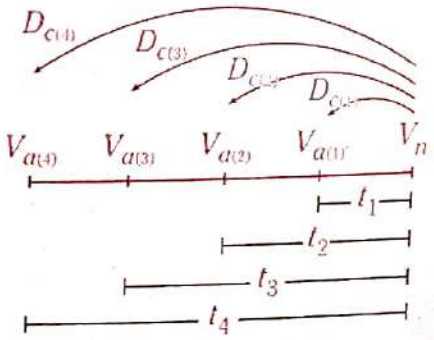
Del enunciado se tiene que

$D_c = S/700 \times 2\% \times 6$

$\therefore\ D_c = S/84$

▸▸ Nota

El descuento comercial es proporcional al tiempo que falta para su vencimiento. Es decir, si tenemos



se cumple

$$\frac{D_{c(1)}}{t_1} = \frac{D_{c(2)}}{t_2} = \frac{D_{c(3)}}{t_3} = \frac{D_{c(4)}}{t_4}$$

3.2. DESCUENTO RACIONAL (D_r)

Llamado también descuento interno, descuento matemático o descuento real; se da cuando el descuento se calcula como un interés simple, tomando como capital de referencia el valor presente (valor actual, V_a).

$$D_r = V_{ar} \times r\% \times t$$

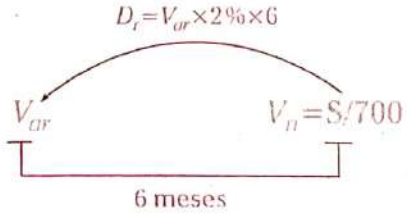
donde V_{ar} es el valor actual racional.

Aplicación 2

Calcule el descuento racional de una letra cuyo valor nominal es S/700 a una tasa del 2% mensual durante seis meses.

Resolución

Graficamos.



Del enunciado se tiene que

$$D_r = V_{ar} \times 2\% \times 6$$

Reemplazamos en

$$V_n = V_{ar} + D_r$$

$$\rightarrow \quad S/700 = V_{ar} + 12\% V_{ar}$$

$$S/625 = V_{ar}$$

Luego,

$$D_r = 625 \times 2\% \times 6$$

$$\therefore \quad D_r = S/75$$

Observación

- Para una letra de cambio, a una misma tasa y tiempo, se cumple

$$D_c > D_r$$

- En este capítulo, se considera que las letras de cambio se cancelan antes de su vencimiento, por lo que se cumple que

$$V_a < V_n$$

4 PROPIEDADES

Algunas propiedades de la regla de descuento surgen a partir de la comparación entre el descuento comercial y racional con respecto de una misma letra, a tasas y tiempos iguales.

4.1. RESPECTO A LOS VALORES ACTUALES

$$V_{ac} < V_{ar}$$

Demostración

Sabemos que

$$D_c > D_r$$

De ahí que

$$-D_c < -D_r$$

Sumemos V_n (valor nominal) a ambos lados de la desigualdad.

$$V_n - D_c < V_n - D_r$$

$$\therefore \quad V_{ac} < V_{ar}$$

4.2. RESPECTO A LOS DESCUENTOS Y VALORES ACTUALES

$$D_c - D_r = V_{ar} - V_{ac}$$

Demostración

Sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} D_c = V_n - V_{ac} \\ D_r = V_n - V_{ar} \end{array}\right\} (-)$$

$$D_c - D_r = (V_n - V_{ac}) - (V_n - V_{ar})$$

$$\therefore \quad D_c - D_r = V_{ar} - V_{ac}$$

4.3. RESPECTO A LOS DESCUENTOS

$$D_c - D_r = D_r \times r\% \times t$$

Demostración

Sabemos que

$$\left.\begin{array}{l} D_c = V_n \times r\% \times t \\ D_r = V_{ar} \times r\% \times t \end{array}\right\} (-)$$

$$D_c - D_r = (V_n - V_{ar}) r\% t \qquad \text{(I)}$$

Además,

$$V_n - V_{ar} = D_r \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\therefore\ D_c - D_r = D_r \times r\% \times t$$

4.4. RESPECTO AL VALOR NOMINAL

$$\boxed{V_n = \frac{D_c \times D_r}{D_c - D_r}}$$

Demostración

Sabemos que

$$D_c - D_r = D_r \times r\% \times t$$

Multiplicamos por V_n a ambos lados de la igualdad.

$$V_n(D_c - D_r) = V_n \times D_r \times r\% \times t$$

$$V_n(D_c - D_r) = D_r(V_n\, r\%\, t)$$

$$V_n(D_c - D_r) = D_r D_c$$

$$\therefore\ V_n = \frac{D_c \times D_r}{D_c - D_r}$$

4.5. RESPECTO AL DESCUENTO RACIONAL

$$\boxed{D_r = \frac{V_n \times r\% \times t}{1 + r\%\, t}}$$

Demostración

Sabemos que

- $D_r = V_{ar} \times r\% \times t$ (I)
- $V_{ar} = V_n - D_r$ (II)

Reemplazamos (II) en (I).

$$D_r = (V_n - D_r)\, r\%\, t$$

$$D_r = V_n\, r\%\, t - D_r\, r\%\, t$$

$$D_r + D_r\, r\%\, t = V_n\, r\%\, t$$

$$D_r(1 + r\%\, t) = V_n\, r\%\, t$$

$$\therefore\ D_r = \frac{V_n\, r\%\, t}{1 + r\%\, t}$$

4.6. RESPECTO A LA RELACIÓN DE LOS DESCUENTOS

$$\boxed{\frac{D_c}{D_r} = 1 + r\% \times t}$$

Demostración

Sabemos que

- $D_c = V_n\, r\%\, t$
- $D_r = \dfrac{V_n\, r\%\, t}{1 + r\%\, t}$

Dividimos las relaciones anteriores.

$$\frac{D_c}{D_r} = \frac{V_n\, r\%\, t}{\dfrac{V_n\, r\%\, t}{1 + r\%\, t}}$$

$$\therefore\ \frac{D_c}{D_r} = 1 + r\%\, t$$

Otra forma

Como

$$D_c - D_r = D_r\, r\%\, t$$

$$\rightarrow\ D_c = D_r\, r\%\, t + D_r$$

$$D_c = D_r\,(1 + r\%\, t)$$

$$\therefore\ \frac{D_c}{D_r} = 1 + r\%\, t$$

4.7. RESPECTO A LA RELACIÓN DE LOS VALORES ACTUALES

$$\boxed{\frac{V_{ac}}{V_{ar}} = 1 - (r\% \times t)^2}$$

Demostración

Sabemos que

- $V_{ac} = V_n - D_c$

  $V_{ac} = V_n - V_n\, r\%\, t$

  $V_{ac} = V_n(1 - r\%\, t)$

- $V_{ar} = V_n - D_r$

  $V_{ar} = V_n - \dfrac{V_n\, r\%\, t}{1 + r\%\, t}$

  $V_{ar} = \dfrac{V_n}{1 + r\%\, t}$

Dividimos ambas expresiones.

$$\frac{V_{ac}}{V_{ar}}=\frac{V_n\,(1-r\%\,t)}{\dfrac{V_n}{1+r\%\,t}}$$

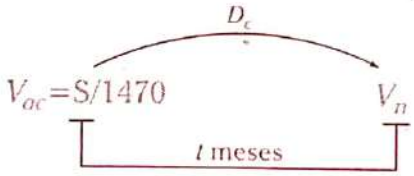
$$\therefore\ \frac{V_{ac}}{V_{ar}}=1-(r\%\,t)^2$$

Aplicación 3

El valor actual de una letra es de S/1470 y la suma entre el valor nominal y el descuento es S/1530. Si la tasa de descuento es de 12 %, indique el tiempo de vencimiento en meses.

Resolución

Como no nos mencionan la clase de descuento, asumimos que es un descuento comercial.



Por dato,

$$V_n+D_c=1530$$

Sabemos que

$$V_n=V_{ac}+D_c \qquad (*)$$

$$1530-D_c=1470+D_c$$

$$D_c=30$$

Reemplazamos en (*).

$$V_n=1470+30$$

$$V_n=1500$$

Finalmente,

$$D_c=V_n\,r\%\,t$$

$$30=1500\times 1\%\,t \quad \text{1\% mensual}$$

$$\therefore\ t=2 \text{ meses}$$

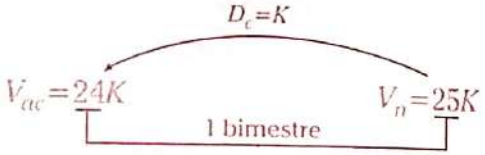
Aplicación 4

El valor actual comercial de una letra es 24 veces el descuento comercial. Si faltan 2 meses para su vencimiento, determine la tasa bimestral de descuento.

Resolución

Asumimos que $D_c=K$.

$\rightarrow\ V_{ac}=24K$



Luego, sabemos que

$$D_c=V_n\times r\%\,t$$

$$\rightarrow\ K=25K\times r\%\times 1$$

$$r\%=\frac{1}{25}\times 100\%$$

$$\therefore\ r\%=4\% \text{ bimestral}$$

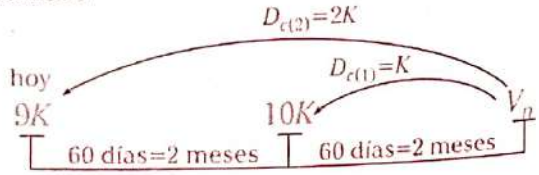
Aplicación 5

Una letra vence dentro de 120 días. Si el valor actual de hoy es el 90 % del valor actual dentro de 60 días, determine la tasa de descuento.

Resolución

Asumamos que el valor actual dentro de 60 días es $10K$.

Entonces



Se observa que por cada 60 días hacen un descuento de K soles.

Luego, se sabe que

- $V_n=9K+2K=11K$
- $D_{c(2)}=Vn\,r\%\,t$; (t=4 meses)

$$\rightarrow\ 2K=11K\,r\%\,4$$

$$r\%=\frac{1}{22}\times 100\% \text{ mensual}$$

Cuando nos piden la tasa y no nos especifican unidades, se asume que es anual.

$$\rightarrow\ \text{tasa}=\frac{1}{22}\times 100\%12$$

$$\therefore\ \text{tasa}=54,\widehat{54}\,\%$$

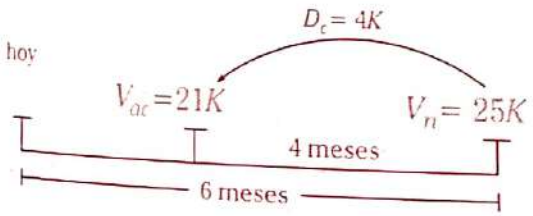
Aplicación 6

Se tiene una letra de cambio de S/9250 que se ha de pagar dentro de 6 meses. Calcule el descuento y el valor actual si la letra es descontada al 8% bimestral 4 meses antes de su vencimiento.

Resolución

Como $8\% <> \frac{2}{25}$, en cada bimestre se descuenta 2 de 25, por lo que consideramos

- $D_c = 4K$ (en 4 meses)
- $V_{ac} = 21K$



Como $V_n = 9250$

$\rightarrow 25K = 9250$

$K = 370$

Por lo tanto,

$D_c = 4K = 4(370) = S/1480$

$V_{ac} = 21K = 21(370) = S/7770$

Aplicación 7

El valor actual racional excede al valor actual comercial de una letra en S/24. Calcule el valor nominal de dicha letra si el producto de los descuentos es S/34 560.

Resolución

Según los datos del problema,

- $V_{ar} - V_{ac} = 24$
- $D_c \times D_r = 34\,560$

Por propiedad, sabemos que

$V_{ar} - V_{ac} = D_c - D_r$

$\rightarrow D_c - D_r = 24$

También sabemos que

$$V_n = \frac{D_c \times D_r}{D_c - D_r}$$

Reemplazamos valores.

$$V_n = \frac{34\,560}{24}$$

$\therefore \; V_n = S/1440$

Aplicación 8

En un documento comercial, la relación entre el descuento racional y el descuento comercial es 4/5. Halle la relación entre el valor actual comercial y el valor nominal del mismo documento.

Resolución

Como

$$\frac{D_r}{D_c} = \frac{4}{5} \rightarrow \frac{D_c}{D_r} = \frac{5}{4}$$

Además, sabemos que

$$\frac{D_c}{D_r} = 1 + r\%\,t$$

Luego,

$$1 + r\%\,t = \frac{5}{4}$$

$$\rightarrow r\%\,t = \frac{1}{4} \qquad \text{(I)}$$

Nos piden $\frac{V_{ac}}{V_n}$.

Sabemos que

$$V_{ac} = V_n - D_c$$

$$V_{ac} = V_n - V_n\,r\%\,t$$

$$\rightarrow \frac{V_{ac}}{V_n} = 1 - r\%\,t \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (I) en (II).

$$\frac{V_{ac}}{V_n} = 1 - \frac{1}{4}$$

$$\therefore \frac{V_{ac}}{V_n} = \frac{3}{4}$$

5 CAMBIO DE LETRAS

Si un deudor debe una o varias letras de cambio, puede cambiar por otra u otras sin perjudicar ni a su acreedor ni a sí mismo. Estos cambios los puede hacer el deudor con la finalidad de cambiar la forma de pago de la deuda en formas de pago convenientes para él. De esta manera, si tiene una sola letra que pagar, podría cambiar por otra con un plazo mayor, o por otras para pagar en varias partes.

El deudor si tuviera varias letras, podría sustituirlas por una sola (para evitar varios pagos) o por varias letras, pero con plazos y montos convenientes para él.

Supongamos que se tienen k letras de cambio con valores nominales

$$V_{n(1)};\ V_{n(2)};\ V_{n(3)};\ \ldots;\ V_{n(k)}$$

Las cuales se desea sustituir por otras m letras de cambio con valores nominales

$$V'_{n(1)};\ V'_{n(2)};\ V'_{n(3)};\ \ldots;\ V'_{n(m)}$$

El valor actual de toda la deuda, a la fecha de sustitución de las letras que han de ser reemplazadas, será la suma de sus valores actuales:

$$V_{a(1)}+V_{a(2)}+V_{a(3)}+\ldots+V_{a(k)}$$

Siendo la suma de los mencionados valores actuales igual al monto de la deuda en la fecha de sustitución.

Si sustituimos por las letras reemplazantes, el valor actual total de estas últimas en la fecha de sustitución será la suma de los valores actuales:

$$V'_{a(1)};\ V'_{a(2)};\ V'_{a(3)};\ \ldots;\ V'_{a(m)}$$

Ya que se trata de la misma deuda, ambos montos deben ser iguales, es decir

$$V_{a(1)}+V_{a(2)}+\ldots+V_{a(k)}=V'_{a(1)}+V'_{a(2)}+\ldots+V'_{a(m)}$$

En general,

$$\left(\begin{array}{c}\text{suma de valores}\\ \text{actuales de las}\\ \text{letras reemplazadas}\end{array}\right)=\left(\begin{array}{c}\text{suma de valores}\\ \text{actuales de las}\\ \text{letras reemplazantes}\end{array}\right)$$

Nota

También se considera de manera similar a lo anterior cuando nos dicen que dos letras son equivalentes. Esto ocurre porque sus valores actuales son iguales.

$$V_a(1.^a \text{ letra})=V_a(2.^a \text{ letra})$$

5.1. VENCIMIENTO COMÚN

Un caso particular del cambio de letras es el caso en el que se desea sustituir varias letras con distintos tiempos de vencimiento por una sola, cuyo valor nominal sea la suma de los valores nominales de las letras a reemplazar.

Supongamos que tenemos k letras con valores nominales

$$V_{n(1)};\ V_{n(2)};\ V_{n(3)};\ \ldots;\ V_{n(k)}$$

con sus respectivos tiempos de vencimiento

$$t_1;\ t_2;\ t_3;\ \ldots;\ t_k$$

A dichas letras se desea sustituir por una única letra cuyo valor nominal es V_n, con un tiempo de vencimiento t_{vc}, en la que se cumple que

$$V_n=V_{n(1)}+V_{n(2)}+V_{n(3)}+\ldots+V_{n(k)} \qquad \text{(I)}$$

Por ser un cambio de letras, asumimos que en el V_a (valor actual) de la letra única se cumple que

$$V_a=V_{a(1)}+V_{a(2)}+V_{a(3)}+\ldots+V_{a(k)} \qquad \text{(II)}$$

Observación

El vencimiento común puede calcularse considerando el descuento comercial o el descuento racional. En el caso del descuento comercial, se establece, en forma práctica, el tiempo de vencimiento medio, también llamado **tiempo de vencimiento común**.

Restamos (I) − (II).

$$V_n-V_a=V_{n(1)}-V_{a(1)}+V_{n(2)}-V_{a(2)}+\ldots+V_{n(k)}-V_{a(k)}$$

$$D_c=D_{c(1)}+D_{c(2)}+D_{c(3)}+\ldots+D_{c(k)}$$

Sea $r\%$ la tasa de descuento.

$$\rightarrow t_{vc}\times r\%\times V_n=V_{n(1)}\,r\%\,t_1+V_{n(2)}\,r\%\,t_2+V_{n(3)}\,r\%\,t_3+\ldots+V_{n(k)}\,r\%\,t_k$$

Simplificamos la tasa de descuento $r\%$.

$$t_{vc}V_n=t_1V_{n(1)}+t_2V_{n(2)}+t_3V_{n(3)}+\ldots+t_kV_{n(k)}$$

$$t_{vc}=\frac{t_1V_{n(1)}+t_2V_{n(2)}+t_3V_{n(3)}+\ldots+t_kV_{n(k)}}{V_n}$$

$$\boxed{t_{vc}=\frac{V_{n(1)}t_1+V_{n(2)}t_2+V_{n(3)}t_3+\ldots+V_{n(k)}t_k}{V_{n(1)}+V_{n(2)}+V_{n(3)}+\ldots+V_{n(k)}}}$$

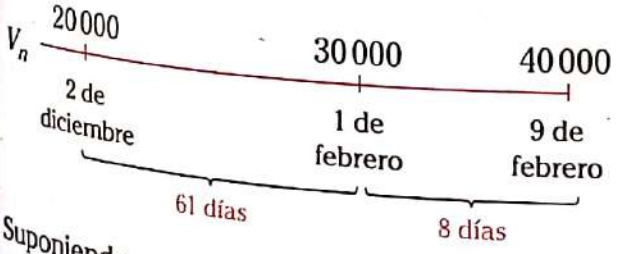
donde t_{vc} es el tiempo de vencimiento común.

Aplicación 9

Se tienen tres letras de cambio: una de S/20 000, que vence el 2 de diciembre; otra de S/30 000, que vence el primero de febrero del año siguiente; y otra de S/40 000, que vence el 9 de febrero. Si se desea reemplazar estas tres letras de cambio por una sola de S/90 000, ¿cuál será su fecha de vencimiento?

Resolución

Según los datos,



Suponiendo que dichas letras se reemplazan el 2 de diciembre, se tendrá

V_n (S/)	20 000	30 000	40 000
t (días)	0	61	69

Luego,

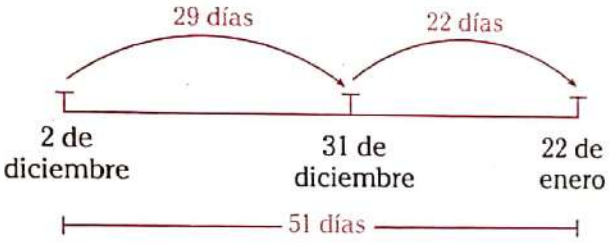
$$t_{vc}=\frac{20\,000\times0+30\,000\times61+40\,000\times69}{20\,000+30\,000+40\,000}$$

$t_{vc}=51$ días

Desde el 2 de diciembre hasta la fecha de vencimiento de la letra reemplazante, deberán transcurrir 51 días; por lo tanto, dicha fecha es el 22 de enero.

Otra forma

Se pudo haber considerado cualquier otra fecha y contado los tiempos de vencimiento con respecto de dicha fecha, a la que se le denomina **fecha focal**, y no alteraría el resultado.



Por lo tanto, la fecha de vencimiento es el 22 de enero.

Aplicación 10

Un comerciante firmó tres letras de S/800, S/600 y S/400, la primera y la tercera letra vencen al cabo de n y 165 días, respectivamente. Si los días para el vencimiento común de la única letra de cambio son tantos como los días que le faltan a la segunda letra aumentado en 10, halle n. Considere que el vencimiento de la segunda letra es el doble de la primera.

Resolución

Según los datos

Letras (V_n)	800	600	400
Tiempos	n	$2n$	165

Además, $t_{vc}=2n+10$

Luego,

$$2n+10=\frac{800\times n+600\times 2n+400\times 165}{800+600+400}$$

$$2n+10=\frac{2000n+66\,000}{1800}$$

$$36n+180=20n+660 \rightarrow 16n=480$$

$$\therefore\ n=30$$

Aplicación 11

Halle el tiempo de vencimiento común de tres letras de cambio, de valores nominales iguales, cuyos tiempos de vencimiento son 6 días, 24 días y 4 meses.

Resolución

Asumimos N como el valor nominal de cada una de las letras.

De los datos se tiene

V_n	N	N	N
t	6 días	24 días	4 meses <> 120 días

Entonces

$$t_{vc}=\frac{6N+24N+120N}{N+N+N}$$

$$t_{vc}=\frac{150N}{3N}$$

$\therefore\ t_{vc}=50$ días

Aplicación 12

Un comerciante tiene tres letras por cancelar: la primera por S/8000, que vence dentro de 40 días; la segunda por S/7000, de 3 meses y la tercera por S/5000, que vence dentro de 20 días. Si decide cambiar las tres letras por una sola con valor nominal de S/20 000, para cancelarla dentro de 75 días, ¿dentro de cuántos meses vencía la segunda letra?

Resolución

Según los datos

V_n(S/)	8000	7000	5000
Tiempo	40 días	t días	3 meses y 20 días <> 110

Por dato: $t_{vc}=75$ días

Luego,

$$75=\frac{8000\times40+7000t+5000\times110}{8000+7000+5000}$$

$$75=\frac{8(40)+7t+5(110)}{20}$$

$$1500=320+7t+550$$

$$630=7t$$

$$t=90 \text{ días}$$

$\therefore\ t=3$ meses

Aplicación 13

Una persona debe pagar tres letras al banco: la primera de S/4200, pagadera dentro de 50 días; la segunda de S/1400, pagadera dentro de 60 días; y la tercera de S/2800, con un plazo de 90 días. ¿Dentro de cuánto debe ser pagada una letra que reemplace a las anteriores y cuyo valor sea S/8400?

Resolución

Se observa que es un caso de tiempo de vencimiento común, ya que la letra reemplazante presenta como valor la suma de los valores nominales de las letras a reemplazar.

Además

V_n(S/)	4200	1400	2800
t (días)	30	60	90

Luego,

$$t_{vc}=\frac{4200\times30+1400\times60+2800\times90}{4200+1400+2800}$$

$$t_{vc}=\frac{42\times30+14\times60+28\times90}{84}$$

$$t_{vc}=\frac{3\times30+60+2\times90}{6}$$

$$t_{vc}=\frac{90+60+180}{6}$$

$$t_{vc}=\frac{330}{6}$$

$\therefore\ t_{vc}=55$ días

Aplicación 14

Cuatro letras de cambio de S/700; S/600; S/400 y S/300 vencen, respectivamente, dentro de 4; 5; 3 y 6 meses. Si se desea cancelar todas mediante un pago único, ¿dentro de cuántos meses debe efectuarse dicho pago?

Resolución

Se tiene

V_n(S/)	700	600	400	300
t (meses)	4	5	3	6

Entonces

$$t_{vc}=\frac{700\times4+600\times5+400\times3+300\times6}{700+600+400+300}$$

$$t_{vc}=\frac{7\times4+6\times5+4\times3+3\times6}{7+6+4+3}$$

$$t_{vc}=\frac{28+30+12+18}{20}$$

$$t_{vc}=\frac{88}{20}\text{ meses}$$

$$t_{vc}=4\frac{8}{20}\text{ meses}$$

$$t_{vc}=4\text{ meses }\frac{2}{5}\text{ mes}$$

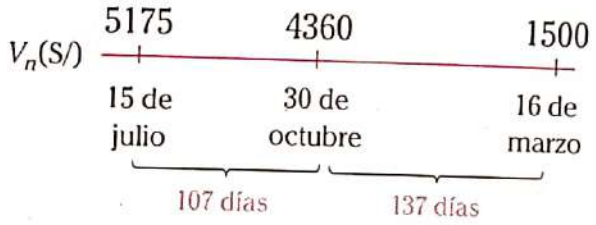
$$\therefore\ t_{vc}=4\text{ meses 12 días}$$

Aplicación 15

Un comerciante tiene tres letras de S/5175, S/4360 y S/1500, que son pagaderas, respectivamente, el 15 de julio, el 30 de octubre y el 16 de marzo del año siguiente. Si se desea reemplazar por una sola letra de S/11 035, ¿cuál será la fecha de vencimiento de esta letra única?

Resolución

Representamos en un diagrama.



Considerando que las tres letras se cancelan el 15 de julio, se tiene que

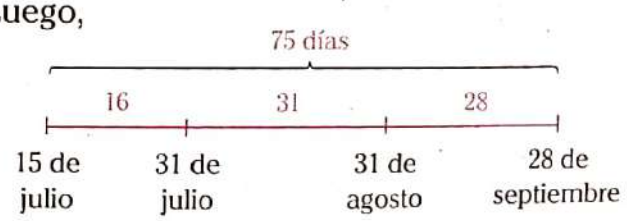
V_n (S/)	5175	4360	1500
t (días)	0	107	244

Entonces

$$t_{vc}=\frac{5175\times0+4360\times107+1500\times244}{5175+4360+1500}$$

$$t_{vc}=75\text{ días}$$

Luego,



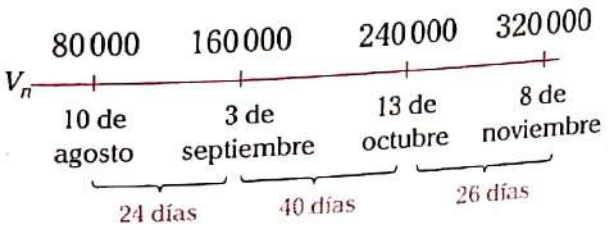
Por lo tanto, la fecha de vencimiento es el 28 de septiembre.

Aplicación 16

Un comerciante posee cuatro letras de S/80 000, S/160 000, S/240 000 y S/320 000, que vencen, respectivamente, el 10 de agosto, 3 de septiembre, 13 de octubre y 8 de noviembre, todas estas fechas del presente año. Si decide cancelar la deuda con un solo pago de S/800 000, ¿en qué fecha vencerá?

Resolución

Graficamos.



Suponiendo que las letras se cancelan el 10 de agosto, se tiene

V_n (S/)	80 000	160 000	240 000	320 000
t (días)	0	24	64	90

Entonces

$$t_{vc}=\frac{80000\times0+160000\times24+240000\times64+320000\times90}{80000+160000+240000+320000}$$

$$t_{vc}=\frac{16\times24+24\times64+32\times90}{8+16+24+32}$$

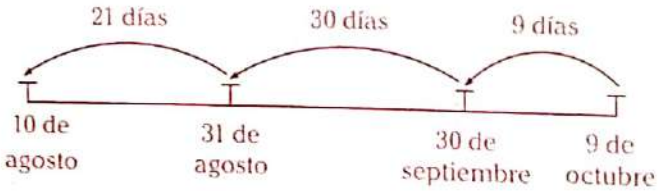
$$t_{vc}=\frac{2\times24+3\times64+4\times90}{1+2+3+4}$$

$$t_{vc}=\frac{48+192+360}{10}$$

$$t_{vc}=\frac{600}{10}$$

$$t_{vc}=60 \text{ días}$$

Luego,

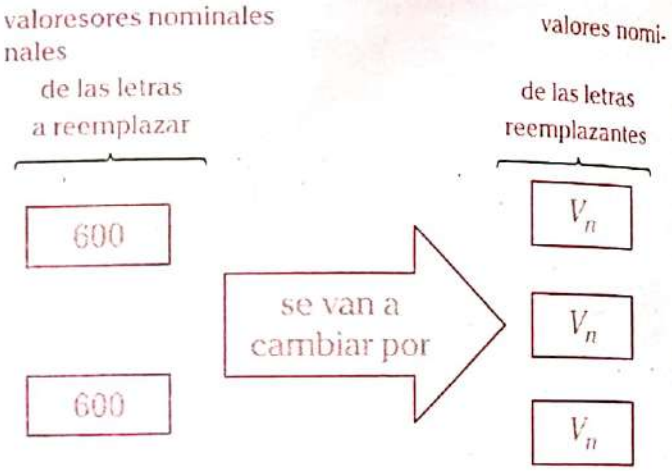


Por lo tanto, la fecha de vencimiento será el 9 de octubre.

Aplicación 17

Jimena compró un artefacto y le falta pagar por este dos letras mensuales de S/600 cada una, pero surgen ciertos inconvenientes y decide cancelar mediante tres pagos mensuales de igual valor. ¿Qué suma debe entregar en cada pago para cumplir el compromiso si dicho valor debe ser entero y asumiendo una tasa de descuento del 12%?

Resolución



Según el cambio de letras,

$$\begin{pmatrix}\text{suma de valores}\\ \text{actuales de las}\\ \text{letras reemplazadas}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{suma de valores}\\ \text{actuales de las}\\ \text{letras reemplazantes}\end{pmatrix}$$

$$\left(600-1\times\frac{12\%}{12}\times600\right)+\left(600-2\times\frac{12\%}{12}\times600\right)$$

$$=\left(V_n-1\times\frac{12\%}{12}\times V_n\right)+\left(V_n-2\times\frac{12\%}{12}\times V_n\right)+\left(V_n-3\times\frac{12\%}{12}\times V_n\right)$$

$$(600-6)+(600-12)=(V_n-1\%V_n)+(V_n-2\%V_n)+(V_n-3\%V_n)$$

$$1200-18=3V_n-6\%V_n$$

$$1182=300\%V_n-6\%V_n$$

$$1182=294\%V_n$$

$$\therefore\ V_n=402{,}04$$

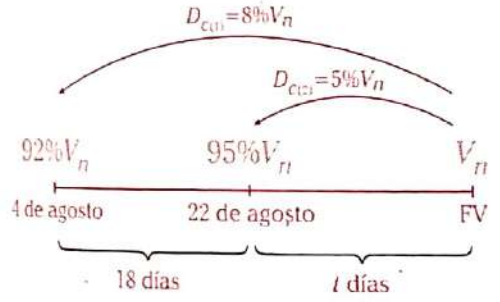
Por lo tanto, para cumplir con el compromiso deberá abonar por cada letra S/403 (valor entero mínimo).

Aplicación 18

Si una letra se descuenta el 4 de agosto, se recibe por ella el 92 % de su valor nominal; pero si se descuenta el 22 de agosto, se recibiría el 95% de su valor nominal. Calcule su fecha de vencimiento.

Resolución

Graficamos.



Como (D_c) DP (tiempo), se cumple que

$$\frac{D_{c(1)}-D_{c(2)}}{18}=\frac{D_{c(2)}}{t}$$

$$\frac{3\%V_n}{18}=\frac{5\%V_n}{t}$$

$$\frac{3}{18}=\frac{5}{t}$$

$\rightarrow t=30$

Nos piden la fecha de vencimiento (FV).

FV: 22 de agosto + 30 días

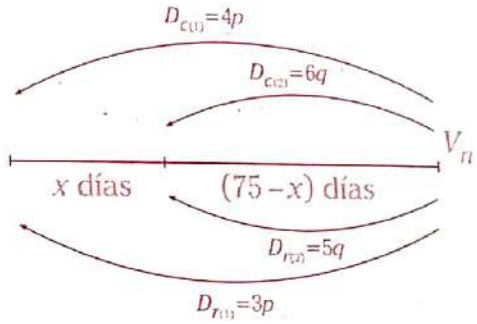
$\therefore$ FV: 21 de septiembre

Aplicación 19

Faltando 75 días para el vencimiento de una letra, se tiene que el descuento comercial y el descuento racional se encuentran en la relación de 4 a 3. ¿Cuántos días tienen que pasar para que los descuentos mencionados estén en la relación de 6 a 5?

Resolución

Graficamos.



Recordemos la siguiente propiedad:

$$V_n=\frac{D_c\times D_r}{D_c-D_r}$$

Luego, a partir del esquema se tiene que

$$V_n=\frac{(4p)(3p)}{4p-3p}=\frac{(6q)(5q)}{6q-5q}$$

$$12p=30q$$

$$\frac{p}{q}=\frac{5k}{2k}$$

Como (D_C) DP (tiempo),

$$\rightarrow \frac{D_{c(1)}}{75}=\frac{D_{c(1)}-D_{c(2)}}{x}$$

$$\frac{4(5k)}{75}=\frac{4(5k)-6(2k)}{x}$$

$$\frac{20}{75}=\frac{8}{x}$$

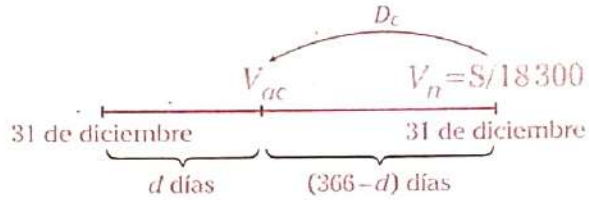
$\therefore\ x=30$

Aplicación 20

Una letra de S/18 300 se firmó el 31 de diciembre para cancelarla el 31 de diciembre del año siguiente, que es un año bisiesto. Se cancela dicha letra en un día tal que el número de días transcurridos del año excede en 3 días a los 3/8 del número de días que faltan por transcurrir. ¿Cuánto se pagará por dicha letra si sufrió un descuento del 10 % anual?

Resolución

Esquematizamos el problema.



Por condición del problema

$$d-\frac{3}{8}(366-d)=3 \;\rightarrow\; d=102$$

Nos piden calcular V_{ac}.

$$V_{ac}=18\,300-18\,300\times\frac{10\%}{360}\times 264$$

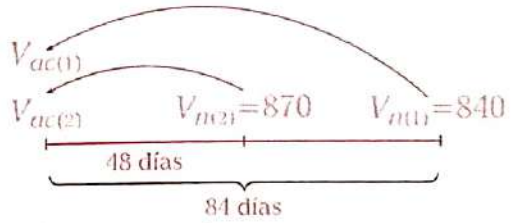
$$\therefore\; V_{ac}=\text{S/}16\,958$$

Aplicación 21

Dos letras de S/840 y S/870, pagaderas a los 84 días y 48 días, respectivamente, son descontadas a la misma tasa. Si por la primera letra se recibe S/32,80 menos que por la segunda, calcule la tasa de descuento.

Resolución

Esquematizamos el problema.



Por condición,

$$V_{ac(2)}-V_{ac(1)}=32{,}80$$

Del esquema

$$V_{ac(2)}=870-870\times\frac{r\%}{360}\times 48$$

$$V_{ac(1)}=840-840\times\frac{r\%}{360}\times 84 \quad (-)$$

$$32{,}80=30+840\times\frac{r\%}{360}\times 84-870\times\frac{r\%}{360}\times 48$$

$$2{,}80=\frac{r\%}{36}(84\times 84-87\times 48)$$

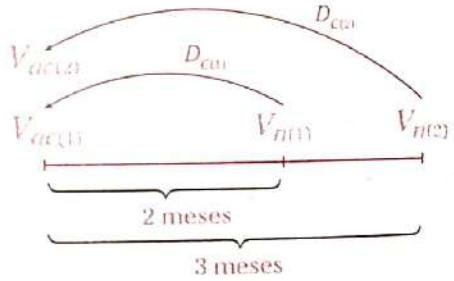
$$\therefore\; r\%=3{,}5\%$$

Aplicación 22

Se firman dos letras, la primera vence dentro de dos meses y la segunda vence dentro de tres meses. Se sabe que la suma de los valores nominales de ambas letras es 15 000. Si ambas se cancelan el mismo día, se recibiría por ellas S/14 750. Halle el valor nominal de cada una de las letras si la tasa de descuento es del 8%.

Resolución

Graficamos.



Por condición, se cumple que

- $V_{n(1)}+V_{n(2)}=15\,000$
- $V_{ac(1)}+V_{ac(2)}=14\,750$ (−)

$$D_{c(1)}+D_{c(2)}=250$$

$$V_{n(1)}\times\frac{8\%}{12}\times 2+V_{n(2)}\times\frac{8\%}{12}\times 3=250$$

$$\frac{4}{3}\%\,V_{n(1)}+2\%V_{n(2)}=250$$

$$2V_{n(1)}+3V_{n(2)}=37\,500$$

Dato: $2V_{n(1)}+2V_{n(2)}=30\,000$ (−)

$$V_{n(2)}=7500$$

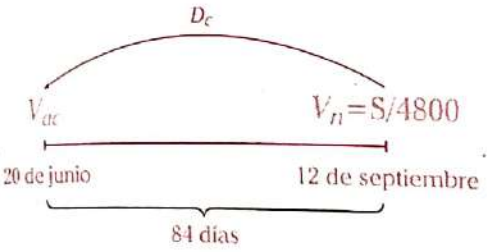
$$V_{n(1)}=7500$$

Aplicación 23

¿Cuál es el valor actual de una letra de cambio de S/4800, pagadera el 12 de septiembre, que fue descontada el 20 de junio del mismo año al 15%? Considere que el banco cobró el 1% de comisión y 2,5% por cambio de plazo.

Resolución

Esquematizamos.



Por condición del problema, se cumple que

$$V_{ac} = V_n - D_c - (\text{comisión}) - \begin{pmatrix}\text{cambio}\\ \text{de plazo}\end{pmatrix}$$

$$V_{ac} = 4800 - 4800 \times \frac{15\%}{360} \times 84 - 1\%\,4800 - 2{,}5\%\,4800$$

$$V_{ac} = 4800 - 7\%\,4800$$

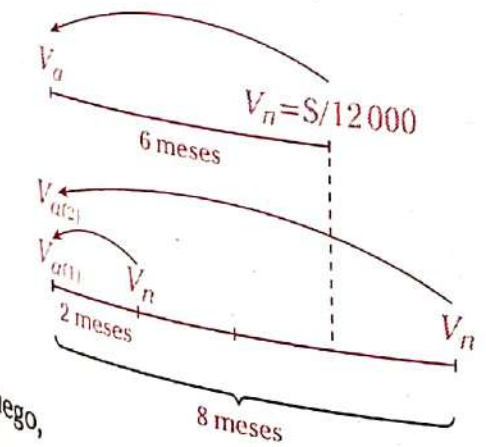
$$\therefore\ V_{ac} = \text{S/}4464$$

Aplicación 24

Una persona debe una letra de S/12 000, pagadera a los 6 meses. Esta persona acuerda pagar su deuda mediante dos letras de igual valor nominal que vencen a los 2 meses y 8 meses, respectivamente. ¿Cuál es el valor nominal de estos pagos si se aplica una tasa de descuento del 40% anual?

Resolución

Graficamos.



Luego,

- $V_a = 12000 - 12000 \times \frac{40\%}{12} \times 6$

  $V_a = \text{S/}9600$

- $V_{a(1)} = V_n - V_n \times \frac{40\%}{12} \times 2$

- $V_{a(2)} = V_n - V_n \times \frac{40\%}{12} \times 8$

Por ser un cambio de letras, se cumple que

$$V_a = V_{a(1)} + V_{a(2)}$$

$$9600 = \left(V_n - V_n \frac{20}{3}\%\right) + \left(V_n - V_n \frac{80}{3}\%\right)$$

$$9600 = 2V_n - \frac{V_n}{3}$$

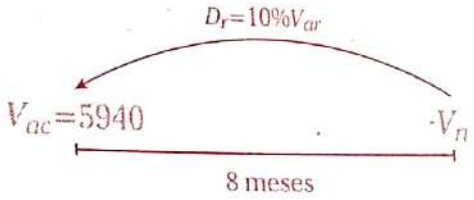
$$\therefore\ V_n = \text{S/}5760$$

Aplicación 25

El menor valor actual de una letra es S/5940 y su menor descuento es el 10% de su respectivo valor actual. Si la letra vence en 8 meses y se descuenta al 15%, calcule su mayor valor actual.

Resolución

Esquematizamos.



Luego,

- $5940 = V_n - Dc$

  $5940 = V_n - V_n \times \frac{15\%}{12} \times 8$

  $5940 = 90\%V_n$

  $V_n = 6600$

- $D_r = 10\%V_{ar}$

  $D_r = 10\%(6600 - D_r)$

  $D_r = 600$

Nos piden el mayor valor actual.

$$V_{ar} = V_n - D_r$$

$$V_{ar} = 6600 - 600$$

$$\therefore\ V_{ar} = \text{S/}6000$$

LECTURA

El descuento de pagarés

El descuento de pagarés o descuento de efectos es un instrumento de financiación que ofrecen bancos y empresas financieras con el objetivo de anticipar liquidez a las empresas que han cobrado mediante un pagaré la venta de bienes, suministros o servicios a un tercero.

La entidad financiera se encarga de realizar la gestión de los cobros del valor nominal del pagaré. Si bien, dicha entidad no asume el riesgo de impago por parte del deudor, sí se encargará de realizar las gestiones pendientes para que el cobro se haga efectivo, reduciendo así los costes administrativos de la empresa cedente.

En estas transacciones, el cliente cede a la empresa financiera parte de los derechos de cobro futuros (aún no vencidos). La entidad financiera a cambio realiza un adelanto o anticipo por el valor nominal del derecho de cobro menos los gastos de gestión y los intereses que se generen en la operación.

Por el tiempo que transcurre entre la fecha del anticipo y la del vencimiento del pagaré, la entidad financiera cobra intereses al cedente (cliente). También hay que considerar, en el precio de estos intereses, el riesgo que estas empresas financieras asumen, en algunas ocasiones las empresas libradas presentan calificaciones de riesgo medio o alto. En cuanto a la comisión, esta incluye la remuneración del servicio de gestión de cobro y en parte un coste financiero adicional al interés, lo cual depende de las condiciones contractuales.

La empresa financiera no tiene la obligación de aceptar todos los pagarés que se le presenten al descuento, pudiéndose negar a aceptar aquellos que estime oportunos. Las empresas suelen demandar este tipo de productos financieros, y cada vez con mayor frecuencia, con dos objetivos:

- Financiar el capital circulante, esto permite obtener liquidez inmediata de las ventas aplazadas a los clientes, sin tener que esperar al vencimiento de los efectos.
- No aumentar el riesgo bancario.

En la actualidad, como consecuencia de la restricción de créditos a empresas, las entidades financieras están aumentando sus posibilidades de crecimiento, ya que los bancos limitan cada vez más las líneas de descuento, y además, exigen mayores garantías de pago a sus clientes.

Adaptado de "¿Qué es el descuento de pagarés?". En <https://www.ficomsa.com>.

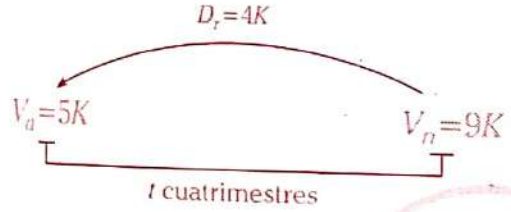
Problemas resueltos

Problema 1

El valor actual y el valor nominal de una letra de cambio están en la relación de 5 a 9. Calcule el tiempo de descuento si se sabe que se aplicó el descuento racional con una tasa del 20% cuatrimestral.

Resolución

Graficamos.



Sabemos que

$$D_r=r\%\times V_a\times t$$

$$\rightarrow\ 4K=20\%\times 5K\times t$$

$$t=4 \text{ (cuatrimestres)}$$

Por lo tanto, el tiempo de descuento es 1 año y 4 meses.

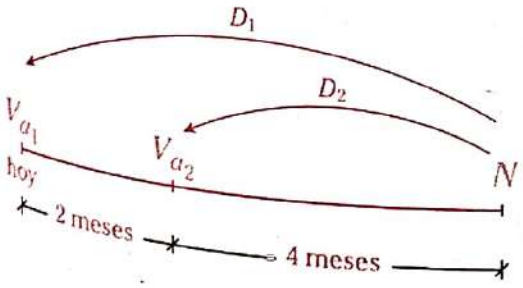
Problema 2

Luis firmó una letra que vence dentro de 6 meses, con una tasa de descuento del 60%. Si la suma de los descuentos que le harían hoy y los que tendría dentro de 2 meses es de S/3100, calcule el valor nominal de la letra.

Resolución

Sea N el valor nominal de la letra.

Además, como la tasa es del 60% anual, este es equivalente al 5% mensual.



Por dato

$$D_1+D_2=3100$$

$$\rightarrow\ N\times 5\%6+N\times 5\%4=3100$$

$$30\%N+20\%N=3100$$

$$50\%N=3100$$

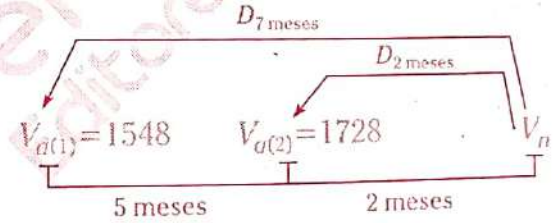
$$\therefore\ N=\text{S/}6200$$

Problema 3

Una letra pagadera dentro de siete meses tiene un valor actual de S/1548. Si cinco meses después se cancela pagándose con S/1728, halle el valor nominal.

Resolución

Esquematizamos.



Como D_c DP t

$$\rightarrow\ \frac{D_{7\text{ meses}}}{7}=\frac{D_{2\text{ meses}}}{2}$$

$$\frac{V_n-1548}{7}=\frac{V_n-1728}{2}$$

(–) (–)

$$\rightarrow\ \frac{(V_n-1548)-(V_n-1728)}{7-2}=36$$

Luego,

$$\frac{V_n-1728}{2}=36$$

$$\therefore\ V_n=\text{S/}1800$$

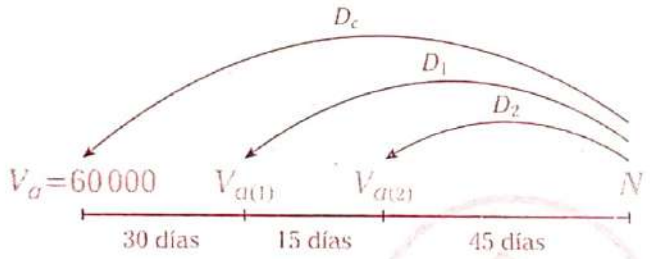
Problema 4

Una letra que vence dentro de 3 meses tiene un valor actual de S/60 000. Si se descontara dentro de 30 días, el descuento sería de S/900 más que si se descontara dentro de 45 días. Calcule el valor nominal de la letra.

Resolución

Sea N el valor nominal de la letra.

De los datos tenemos lo siguiente:



Del esquema se cumple lo siguiente:

$$\frac{D_1}{60}=\frac{D_2}{45}=\frac{D_c}{90}$$

$$\rightarrow \frac{D_1}{4}=\frac{D_2}{3}=\frac{D_c}{6}=k$$

Sabemos que

$$D_1-D_2=900$$

$$4K-3K=900$$

$$K=900$$

$$\rightarrow D_c=6\times 900=5400$$

Luego,

$$N=60\,000+5400$$

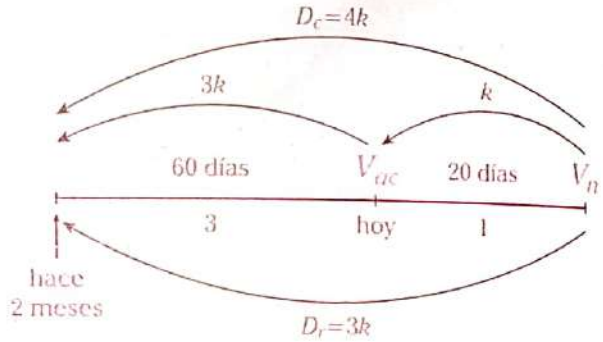
$$\therefore \quad N=\text{S/}65\,400$$

Problema 5

Abel tiene una letra que vence dentro de 20 días. Si hace 2 meses la relación de los descuentos externo e interno era de 4 a 3, halle el valor actual racional hace 40 días si el valor actual comercial de hoy es de S/1650.

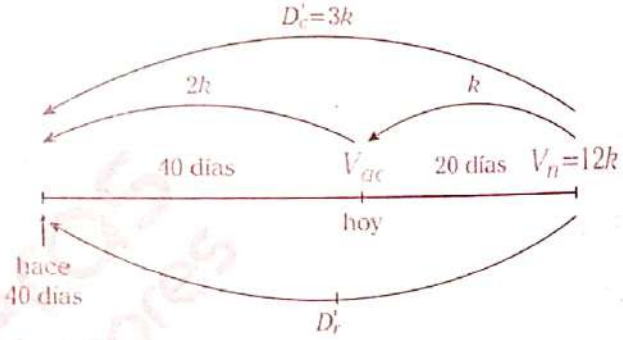
Resolución

Graficamos.



$$\rightarrow V_n=\frac{D_c\times D_r}{D_c-D_r}=\frac{4k\times 3k}{k} \quad \rightarrow V_n=12k$$

Evaluamos el descuento hace 40 días.



$$\rightarrow V_n=\frac{D_c\times D_r}{D_c-D_r} \quad \rightarrow 12k=\frac{3k\times D_r'}{3k-D_r'}$$

$$D_r'=\frac{12}{5}k$$

Como $V_{ac}=1650$

$$\rightarrow 11k=1650 \quad \rightarrow k=150$$

Calculamos el V_{ar} de hace 40 días.

$$V_{ar}=12k-\frac{12}{5}k=1800-360$$

$$\therefore \quad V_{ar}=\text{S/}1440$$

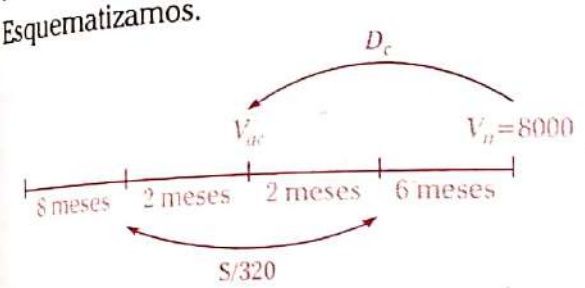
Problema 6

Lucero firma una letra de S/8000, pagadera dentro de 18 meses, pero a los 10 meses la cancela. Se sabe que si la hubiera cancelado 2 meses antes, ahorraría S/320 más que si la pagaba 2 meses después. Determine la cantidad de dinero que pagó Lucero por la letra.

Resolución

Nos piden V_{ac}.

Esquematizamos.



Se observa que $D_{4\text{ meses}}=320$.

Sabemos que para 8 meses

$D_c=V_n-V_{ac}$

$V_n\times r\%\times 8=V_n-V_{ac}$

$V_{ac}=V_n-V_n\times r\%\times 8$

$V_{ac}=V_n(1-r\%\times 8)$ (*)

Para los 4 meses se tiene que

$320=V_n\times r\%\times 4$

$320=8000\times r\%\times 4$

$\rightarrow r\%=1\%$ mensual

Reemplazamos en (*).

$V_{ac}=8000(1-1\%\times 8)$

$V_{ac}=(92\%)\ 8000$

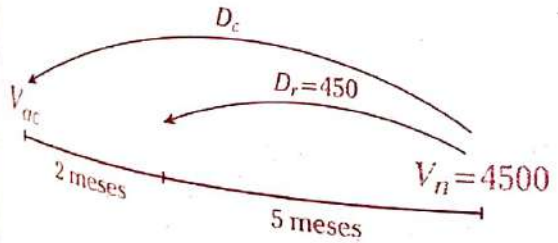
$\therefore\ V_{ac}=$S/7360

Problema 7

Andrea le vende su auto a Carolina, quien le da S/5000, y por el resto le firma una letra de S/4500, pagadera dentro de 7 meses. Si Carolina, dentro de 2 meses, decidiera cancelar su deuda, el descuento racional sería S/450. Halle el precio de venta del auto.

Resolución

Graficamos.



Sea $r\%$ la tasa mensual.

Sabemos que

$$D_r=\frac{V_n\times r\%\times t}{1+r\%t}$$

$$\rightarrow\ 450=\frac{4500\times r\%\times 5}{1+r\%5}\ \rightarrow\ r\%=\frac{1}{45}$$

Luego,

$D_c=V_n\times r\%\times t$

$$D_c=4500\times\frac{1}{45}\times 7$$

$\rightarrow\ D_c=700$

Como $V_{ac}=V_n-D_c$

$\rightarrow\ V_{ac}=4500-700=3800$

Sea x el precio del auto, que es igual a la cuota inicial más el valor actual.

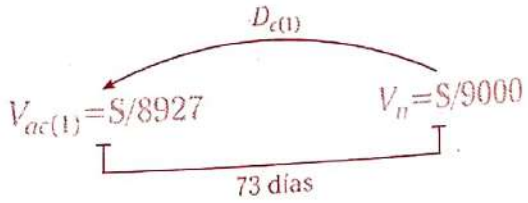
$\therefore\ 5000+3800=$S/8800

Problema 8

Jenny ha firmado dos letras afectadas por la misma tasa de descuento. La primera es de S/9000 y la canceló cuando faltaban 73 días para su vencimiento, por lo que solo pagó S/8927. Determine en qué fecha vencía la segunda letra si era de S/4500 y al cancelarla el 17 de octubre le descontaron S/21.

Resolución

Para la primera letra



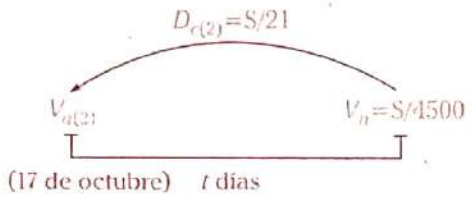
$\rightarrow\ D_{c(1)}=V_n-V_{ac(1)}=V_n r\%\,t$

$9000-8927=9000\times r\%\times 73$

$73=90r\times 73$

$$r=\frac{1}{90}\ \rightarrow\ r\%=\left(\frac{1}{90}\right)\%$$

Para la segunda letra

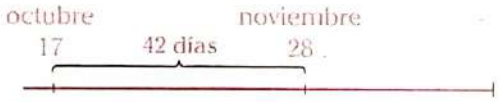


$\rightarrow\ D_{c(2)}=V_n r\%\, t$

$21=4500\times\left(\dfrac{1}{90}\right)\%\times t$

$t=42$

Finalmente,



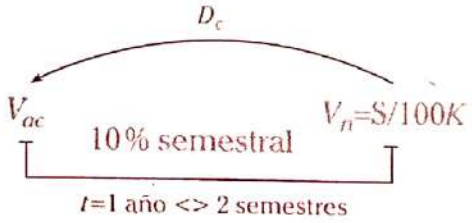
Por lo tanto, la segunda letra se cancelaría el 28 de noviembre.

Problema 9

Si a una letra pagadera dentro de 1 año se le descontara comercialmente al 10% semestral, en lugar de un descuento racional del 30%, se recibirían S/64 más. Calcule el valor nominal de dicha letra.

Resolución

Sea la tasa de descuento comercial al 10% semestral.



$\rightarrow\ D_c=V_n\times r\%\times t$

$D_c=100K\times 10\%\times 2$

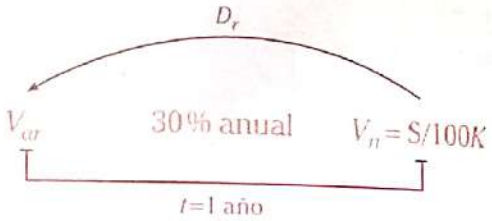
$D_c=20K$

Luego,

$V_{ac}=V_n-D_c$

$V_{ac}=100K-20K=80K$

Sea la tasa de descuento racional al 30% anual.



$\rightarrow\ V_{ar}=\dfrac{V_n}{1+r\%\, t}$

$V_{ar}=\dfrac{100K}{1+30\%\times 1}$

$V_{ar}=\dfrac{1000K}{13}$

Por dato, sabemos que

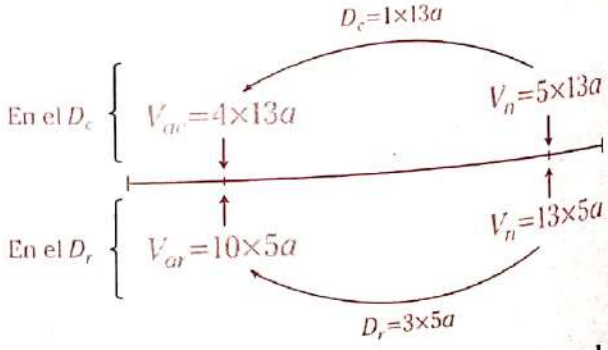
$V_{ac}-V_{ar}=64$

$\rightarrow\ 80K-\dfrac{1000K}{13}=64\quad\rightarrow\ K=20{,}8$

$\therefore\ V_n=100(20{,}8)=$S/2080

Otra forma

Si se le descuenta comercialmente al 10% semestral, en un año se le descuenta 20%. Supongamos entonces que el V_n sea como 5.



Si se le descuenta racionalmente al 30% anual, entonces sea el V_{ar} como 10.

Por tanto, V_n es como 13.

Si consideramos $V_n=5\times 13\times a$

$\rightarrow\ V_{ac}-V_{ar}=52a-50a=2a=64$

$a=32$

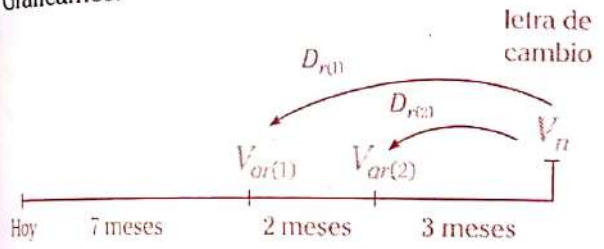
$\therefore\ V_n=$S/2080

Problema 10

Se tiene una letra que vence dentro de un año descontada racionalmente al 60 %. Además, la suma de sus valores actuales dentro de 7 y 9 meses es S/1920. Calcule el valor nominal de la letra.

Resolución

Graficamos.



60 % anual <> 5 % mensual

Recuerde que

$$V_{ar}=\frac{V_n}{1+r\%t}$$

Por dato

$$V_{ar(1)}+V_{ar(2)}=S/1920$$

$$\rightarrow \frac{V_n}{1+5\%\times 5}+\frac{V_n}{1+5\%\times 3}=S/1920$$

$$V_n\left(\frac{4}{5}+\frac{20}{23}\right)=S/1920$$

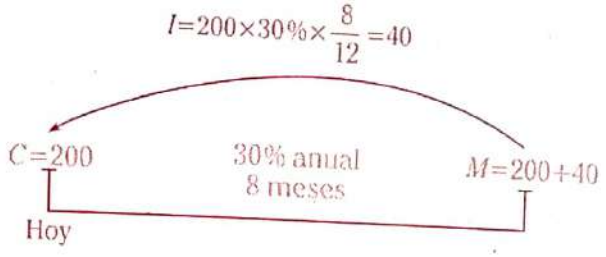
$$\therefore\ V_n=S/1150$$

Problema 11

Hoy se firma una letra por una deuda de S/200, considerándola a un interés simple de 30% con vencimiento en ocho meses. ¿Qué tasa de descuento se debe aplicar a dicho efecto de comercio para que, al descontarla comercialmente dentro de dos meses, no exista pérdida de dinero?

Resolución

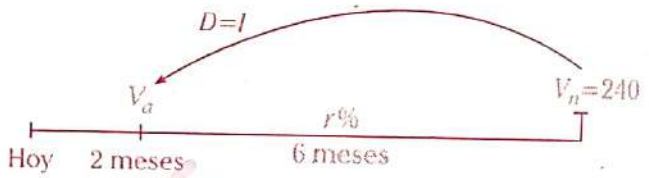
Graficamos.



donde

- $I_{8\text{ meses}}=S/40 <> I_{1\text{ mes}}=S/5$
- $M=240$

La letra será de $V_n=240$.



donde

$$D_{6\text{ meses}}=I_{6\text{ meses}}$$

$$V_n\times r\%\times t=6\times I_{1\text{ mes}}$$

$$240\times r\%\times\frac{1}{2}=6\times(5)$$

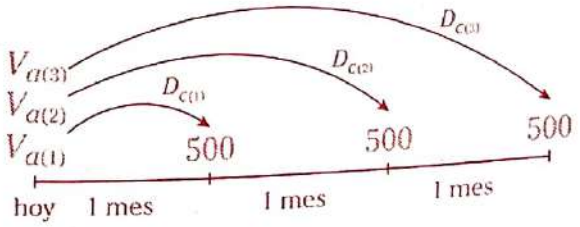
$$\therefore\ r\%=25\%\text{ anual}$$

Problema 12

Luis tiene una deuda, por la cual firmará tres letras mensuales de S/500, descontadas al 5% mensual; sin embargo, podría pagarla con una sola letra de S/2700, descontada racionalmente al 5% mensual. ¿Cual será el tiempo de vencimiento de esta letra?

Resolución

Gráficamente tenemos letras a reemplazar.



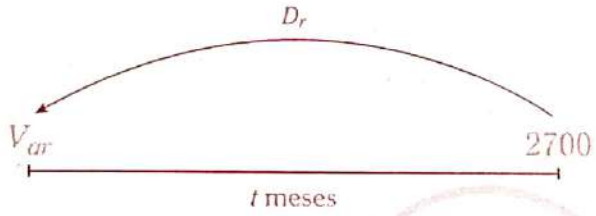
donde

$$V_{a_1}=500-D_{c_1} \rightarrow V_{a_1}=500-500\times 5\%1$$
$$V_{a_2}=500-D_{c_2} \rightarrow V_{a_2}=500-500\times 5\%2$$
$$V_{a_3}=500-D_{c_3} \rightarrow V_{a_3}=500-500\times 5\%3$$

Luego,

$$V_{a_1}+V_{a_2}+V_{a_3}=1500-(25+50+75)$$
$$V_{a_1}+V_{a_2}+V_{a_3}=1350$$

Evaluamos la letra reemplazante.



Descontamos racionalmente

$$D_r=\frac{V_n\cdot r\%\cdot t}{1-r\%t}$$

$$\rightarrow D_r=\frac{2700\times 5\%t}{1-5\%t}$$

Ademas, se tiene

$$V_{ar}=2700-\frac{2700\times 5\%t}{1-5\%t}$$

Finalmente,

$$V_{ar}=V_{a_1}+V_{a_2}+V_{a_3}$$

$$\rightarrow 2700-\frac{2700\times 5\%t}{1-5\%t}=1350$$

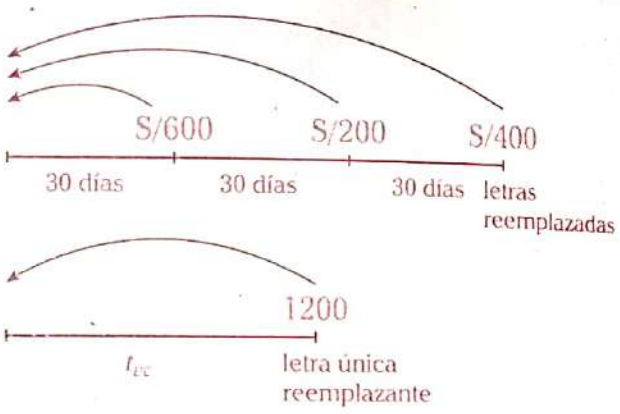
Por lo tanto, el tiempo de vencimiento es 20 meses.

Problema 13

Manuel deberá pagar al banco tres letras, la primera de S/600, pagadera dentro de 30 días; la segunda de S/200, pagadera dentro de 60 días; y la tercera de S/400, con un plazo de 90 días. ¿Dentro de cuánto tiempo debe ser pagada una letra de S/1200 que reemplace a las anteriores?

Resolución

Graficamos.



Observamos que 600+200+400=1200.

Si no está especificado, se considera descuento comercial a una misma tasa.

Por ser un caso de vencimiento común, se cumple que

$$t_{vc}=\frac{600\times 30+200\times 60+400\times 80}{1200}$$

$$t_{vc}=55$$

Por lo tanto, dicha letra reemplazante se deberá pagar en 55 días.

Problema 14

Los valores nominales de tres letras son proporcionales a 2; 3 y 5; además, sus vencimientos, en meses, son tres enteros consecutivos crecientes, respectivamente. Si se sabe que el vencimiento común es x días después del vencimiento de la segunda letra, halle el valor de x.

Resolución

Respecto a 3 letras se tiene

t	$(n-1)$ meses	n meses	$(n+1)$ meses
V_n	$2V$	$3V$	$5V$

$$\rightarrow t_{vc}=\frac{2(n-1)+3n+5(n+1)}{2+3+5}$$

$$t_{vc}=(n+0{,}3) \text{ meses}=n \text{ meses, } 9 \text{ días}$$

Como la segunda letra vence en n meses,

$\rightarrow x = t_{vc} - t_{2.^a \text{ letra}}$

$x = (n \text{ meses}, 9 \text{ días}) - (n \text{ meses}) = 9 \text{ días}$

$\therefore\ x = 9$

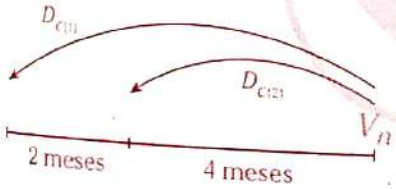
Problema 15

Raúl firmó una letra que vence dentro de 6 meses con una tasa de descuento del 60%. Si el descuento que le harían hoy con el descuento que tendría dentro de 2 meses suman S/3100, calcule el valor nominal de la letra.

Resolución

Sea V_n el valor nominal de la letra; además, como la tasa es del 60% anual, este es equivalente al 5% anual.

De los datos sabemos que



Por condición, del problema

$D_{c(1)} + D_{c(2)} = 3100$

$\rightarrow V_n \times 5\% \times 6 + V_n \times 5\% \times 4 = 3100$

$30\% V_n + 20\% V_n = 3100$

$50\% V_n = 3100$

$\therefore\ V_n = \text{S/}6200$

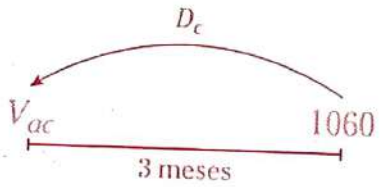
Problema 16

Una letra cuyo valor nominal es S/1060 fue cancelada tres meses antes de su fecha de vencimiento. ¿Cuánto más se pagaría si se aplicara el descuento racional en lugar del descuento comercial? Considere una tasa de descuento del 2% mensual.

Resolución

Debemos plantear ambos tipos de descuento.

Descuento comercial



A partir del esquema

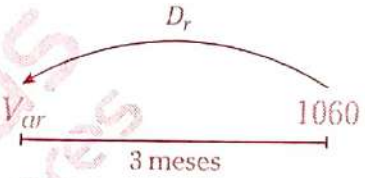
- $D_c = 1060 \times 2\% 3$

  $D_c = 63{,}6$

- $V_{ac} = 1060 - 63{,}6$

  $V_{ac} = 996{,}4$

Descuento racional



A partir del esquema

- $D_r = V_{ar} \times 2\% \times 3$

  $D_r = 6\% V_{ar}$

- $V_{ar} = 1060 - D_r$

  $V_{ar} = 1060 - 6\% V_{ar}$

  $106\% V_{ar} = 1060$

  $V_{ar} = 1000$

Finalmente, comparamos cuánto más se pagaría.

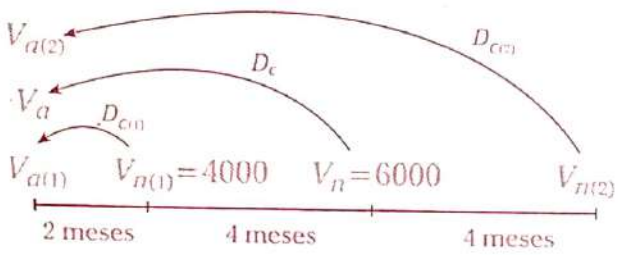
$\therefore\ 1000 - 996{,}4 = \text{S/}3{,}6$

Problema 17

Luis debe una suma de S/6000 pagaderas en 6 meses. A los dos meses paga S/4000 y firma una letra de cambio por el resto, pagable en 10 meses. ¿Cuál es el valor del pagaré si el descuento es el 20%?

Resolución

Esquematizamos.



Del esquema

- $V_{a(1)}=4000-4000\times\dfrac{20\%}{12}\times 2$

  $V_{a(1)}=4000-\dfrac{400}{3}=\dfrac{11\,600}{3}$

- $V_{a(2)}=V_{n(2)}-V_{n(2)}\times\dfrac{20\%}{12}\times 10$

  $V_{a(2)}=V_{n(2)}-\dfrac{V_{n(2)}}{6}=\dfrac{5V_{n(2)}}{6}$

- $V_a=6000-6000\times\dfrac{20\%}{12}\times 6$

  $V_a=5400$

Además, se cumple que

$$V_a=V_{a(1)}+V_{a(2)}$$

$$\rightarrow\ 5400=\frac{11\,600}{3}+\frac{5V_{n(2)}}{6}$$

$$\therefore\ V_{n(2)}=\text{S/}1840$$

Problema 18

La tasa de descuento de una letra es 8% y su descuento racional es el 80% del descuento comercial. ¿Cuánto falta para su vencimiento?

Resolución

Por condición del problema,

$$D_r=80\%\,D_c$$

$$\frac{D_r}{D_c}=\frac{4}{5}\ \rightarrow\ \begin{array}{l}D_r=4k\\ D_c=5k\end{array}$$

Por propiedad se cumple que

$$V_n=\frac{D_c\times D_r}{D_c-D_r}=\frac{5k\times 4k}{5k-4k}$$

$$\rightarrow\ V_n=20k$$

Además,

$$D_c=V_n\times r\%\times t$$

$$\rightarrow\ 5k=20k\times 8\%\times t$$

$$\frac{25}{8}=t\ \ \text{(en años)}$$

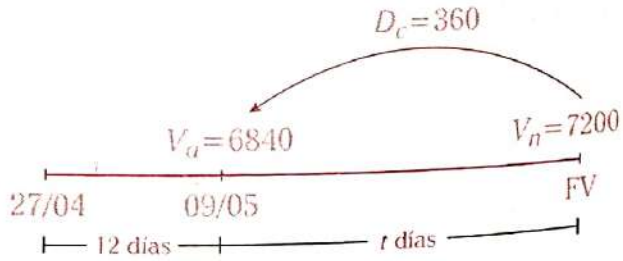
Por lo tanto, para su vencimiento falta 3 años, 1 mes y 15 días.

Problema 19

¿En qué fecha vencerá un documento de S/7200 que se giró el 27 de abril si por descontarse el 9 de mayo al 40% anual se recibió por ella S/6840?

Resolución

Esquematizamos.



Como

$$D_c=V_n\times r\%\times t$$

$$\rightarrow\ 360=7200\times\frac{40\%}{360}\times t$$

$$45=t\ \text{(en días)}$$

Nos piden la fecha de vencimiento (FV).

$$\text{FV}=09/05+45\ \text{días}$$

$$\therefore\ \text{FV}=23\ \text{de junio}$$

Test

1. Juan tiene una letra de cambio que vence en cinco meses y cuyo valor nominal es S/2400. Si la tasa de descuento es del 2% mensual, calcule el descuento que se obtendría hoy.

A) S/240 B) S/200 C) S/256
D) S/260 E) S/264

2. Elena cancela una deuda siete meses antes de su vencimiento. Si se hace acreedora a un descuento de S/315 y la tasa de descuento es del 18%, calcule el valor nominal de dicha letra.

A) S/3300 B) S/3000 C) S/2800
D) S/3150 E) S/3200

3. Susana tiene una letra que vence en cinco meses. Si el valor nominal es de S/3800 y se realiza un descuento de S/570, calcule la tasa de descuento mensual.

A) 3% B) 4% C) 4,5%
D) 3,5% E) 5%

4. Halle el valor actual racional de una letra cuyo valor nominal es S/2600 si es descontada al 36% cuando falta 10 meses para su vencimiento.

A) S/2000 B) S/2160 C) S/2200
D) S/2260 E) S/2300

5. Respecto a las siguientes proposiciones, indique la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F).

I. $V_n > V_a$
II. $D_c > D_r$
III. $V_{ac} > V_{ar}$
IV. $V_{ar} = V_n + D_r$

A) FVFF B) VVFV C) VVFF
D) VFVV E) VVVF

6. Juan tiene una letra de S/5000, la cual vence dentro de un año. Si dentro de cuatro meses el descuento será de S/800, ¿cuál es el valor actual de dicha letra si se cancela cinco meses antes de su vencimiento?

A) S/4000 B) S/4500 C) S/4600
D) S/4650 E) S/4700

7. Luis cambiará una letra de S/4550, que vence dentro de 4 meses, por 2 letras trimestrales de igual valor nominal. Calcule su valor nominal si todas las letras son descontadas comercialmente al 2% mensual.

A) S/2150 B) S/2250 C) S/2300
D) S/2200 E) S/2350

8. Se desea cambiar una letra de S/2100, que vence dentro de 6 meses, por otra letra que venza dentro de 8 meses. Si ambas son descontadas racionalmente al 1% mensual, calcule el valor nominal de la letra reemplazante.

A) S/2140 B) S/2160 C) S/2200
D) S/2220 E) S/2240

9. María debe dos letras, la primera de S/600, que vence dentro de 3 meses, y la segunda de S/300, que vence dentro de 9 meses. ¿Cuánto será el valor nominal de la letra que reemplace a las 2 anteriores si el tiempo de vencimiento común es de 5 meses?

A) S/910 B) S/920 C) S/880
D) S/900 E) S/940

Claves

1 A 2 B 3 A 4 A 5 C 6 B 7 C 8 B 9 D

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Una letra se descuenta al 15% por un tiempo t. Si uno de los descuentos es el 96% del otro, determine el valor de t.

A) 3 meses y 10 días
B) 3 meses y 20 días
C) 4 meses
D) 4 meses y 10 días
E) 4 meses y 20 días

2. ¿Cuál es la tasa de descuento de una letra de S/5800 que vence dentro de 3 meses y es negociada por S/5684?

A) 2% B) 8% C) 4%
D) 5% E) 6%

3. Se tienen 2 letras; la primera vence dentro de 20 meses al 10% semestral; la segunda vence dentro de 30 meses al 10% cuatrimestral. Halle la suma de sus valores nominales si su diferencia es S/400 y son letras equivalentes.

A) S/800 B) S/840 C) S/860
D) S/880 E) S/900

4. Una persona recibe el 90% del valor nominal de una letra que ha sido descontada a una tasa del 15% anual. Calcule cuánto tiempo faltaba para su vencimiento.

A) 10 meses B) 9 meses C) 8 meses
D) 7 meses E) 6 meses

5. Se tiene una letra con un valor nominal de S/9000. Faltando 72 días para su vencimiento, ¿cuánto se recibiría si se descuenta al 20% bimestral?

A) S/7600 B) S/7950 C) S/8000
D) S/8200 E) S/6840

6. ¿En qué fecha vencerá una letra si al pagarla el 2 de abril se obtiene un descuento de S/72? Considere que la letra tiene un valor de S/54 000 descontable al 4% anual.

A) 5 de abril
B) 8 de abril
C) 14 de abril
D) 20 de abril
E) 28 de abril

7. Los descuentos externo e interno de una letra que vence dentro de ocho meses están en la relación de 5 a 9. Si el valor nominal y los descuentos mencionados suman S/3030, determine cuál será su valor actual dentro de cinco meses.

A) S/930 B) S/945 C) S/975
D) S/990 E) S/1050

8. Halle el valor actual de una letra de S/1500 si la relación entre el descuento comercial y el descuento racional es de 5 a 3.

A) S/600 B) S/800 C) S/500
D) S/1100 E) S/300

9. Un comerciante decide cambiar dos letras, cuyos valores nominales son S/3000 y S/5000, las cuales vencen a los 50 y 60 días, a una tasa diaria de 0,2% y 0,4%, respectivamente, por una única letra que vence dentro de 70 días a una tasa del 0,5% diario. Determine el valor de la única letra.

A) S/15 000 B) S/15 500 C) S/12 800
D) S/10 000 E) S/15 800

10. Una persona firma tres letras mensuales cuyos valores nominales están en la relación de 3; 2 y 1. Si se desea reemplazar por una sola letra, ¿en qué tiempo vencería? Considere que este valor nominal es el doble del primero.

A) 1 mes
B) 1 mes y 15 días
C) 1 mes y 10 días
D) 1 mes y 20 días
E) 1 mes y 18 días

Nivel intermedio

11. Los valores actuales de una letra están en la relación de 16 a 7. Calcule la relación de los descuentos.

A) $\frac{3}{4}$ B) $\frac{5}{6}$ C) $\frac{7}{4}$
D) $\frac{8}{5}$ E) $\frac{5}{4}$

12. El descuento comercial y el descuento racional de una letra de cambio que vence dentro de 1 año están en la relación de 5 a 3. Si dentro de 7 meses el descuento será de S/1000, calcule el valor nominal de la letra.

A) S/1800 B) S/2000 C) S/2400
D) S/3000 E) S/3600

13. Se tiene una letra que vence dentro de n días, de tal manera que descontando comercial y racionalmente, al r% bimestral, se tiene que los descuentos son S/310 y S/300, respectivamente. Indique la suma de cifras del valor nominal de la letra.

A) 9 B) 11 C) 12
D) 13 E) 15

14. Una letra que vence dentro de 4 meses tiene un valor actual de S/1200. Si se llegara a descontar dentro de 45 días, el descuento sería S/60 mayor que si se descontara dentro de 65 días. Halle el valor nominal de la letra.

A) S/1360 B) S/1920 C) S/1380
D) S/1560 E) S/1860

15. Se desea pagar una deuda de S/3128, para lo cual se firman letras mensuales de S/400 al 6% de descuento. ¿Cuántas de estas letras son necesarias si se debe terminar de pagar en menos de un año?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

16. Para cancelar una deuda de S/5350, se firman 25 letras mensuales de igual valor nominal, descontables al 10%. Calcule dicho valor nominal.

A) S/200 B) S/300 C) S/320
D) S/330 E) S/350

17. Una letra vence dentro de un año, pero al cabo de 4 meses el mayor valor actual que adquiere, descontada al 18%, es S/6875. Halle el descuento que se obtendría al ser cancelada 4 meses antes de su vencimiento si es descontada a la misma tasa.

A) S/462 B) S/524 C) S/649
D) S/720 E) S/724

18. Se debe pagar S/525 con tres letras de igual valor nominal cada cinco meses y a una tasa del 15% anual. Halle el valor nominal de las letras.

A) S/100 B) S/150 C) S/200
D) S/250 E) S/300

19. Los descuentos de una letra, si se descontaran el 26 de julio y el 9 de septiembre del mismo año, son entre sí como 51 es a 24. ¿En qué fecha vence la letra?

A) 19 de octubre
B) 18 de noviembre
C) 13 de diciembre
D) 11 de septiembre
E) 19 de diciembre

20. Para una letra se cumple que el valor actual racional es el 112,5 % del valor actual comercial, y el descuento comercial excede al descuento racional en S/80. Calcule el valor nominal de dicha letra.

A) S/980 B) S/960 C) S/970
D) S/950 E) S/940

21. Calcule la suma de cifras del valor nominal de una letra si se sabe que el descuento racional es igual al 85% del descuento comercial; además, el valor nominal excede al descuento comercial en S/2100.

A) 12 B) 15 C) 17
D) 18 E) 20

22. Leandro tiene dos letras, una de S/600 y la otra de S/1400, las cuales vencen dentro de 3 y 6 meses, respectivamente. Debido a que sufrió un asalto, prefiere negociar las letras para tener más plazo y las cambia por otras tres, cuyos valores nominales son proporcionales a 2; 4 y 7; además, sus vencimientos son de 9; 12 y 16 meses. Si en ambos casos la tasa de descuento es de 36%, ¿cuál es el valor nominal de la segunda letra reemplazante?

A) S/672 B) S/885 C) S/936
D) S/944 E) S/965

23. Indique a qué tasa única han sido descontadas dos letras, una de S/3420 por 40 días y la otra de S/3500 por 60 días, si se sabe que se ha recibido por la segunda letra S/67,8 más que por la primera.

A) 2% B) 6% C) 10%
D) 12% E) 20%

24. El precio al contado de un artefacto es S/2500. Si se le compra a plazos, pagando una cuota inicial de S/520 y firmando por el saldo tres letras de igual valor, pagaderas cuatrimestralmente y descontables al 9% semestral, halle el valor de dicha letra.

A) S/600 B) S/750 C) S/800
D) S/880 E) S/940

25. Erika desea adquirir un auto, cuyo precio al contado es S/15 330, pagando S/9660 de inicial y por el saldo, letras mensuales de S/600 cada una. ¿Cuántas letras firmaría si la tasa de descuento es 1% mensual?

A) 10 B) 12 C) 13
D) 15 E) 20

26. Al comprar una computadora, Raquel paga una cuota inicial de $250 y firma nueve letras mensuales de $120 cada una, a una tasa de descuento del 36% anual. ¿Cuál es el precio al contado de la computadora?

A) $1142 B) $1168 C) $1230
D) $1570 E) $1580

27. El valor nominal de una letra es S/3600 y descontado racionalmente se obtiene S/3200 por ella. ¿Cuánto se obtendría si el descuento fuese comercial a la misma tasa?

A) S/3000 B) S/3050 C) S/3100
D) S/3150 E) S/3250

28. Una letra vence dentro de ocho meses, y se observa que dentro de cuatro meses los descuentos comercial y racional están en la relación de 6 a 5. Si hoy la letra tiene un valor de S/1008, calcule el valor nominal de dicha letra.

A) S/2520 B) S/2500 C) S/1060
D) S/1680 E) S/3200

29. Se tiene una letra que vence dentro de nueve meses. Si se descontara al 20% comercial y racionalmente, la suma de los valores actuales sería S/1582. Halle el valor nominal de la letra.

A) S/640 B) S/720 C) S/840
D) S/920 E) S/1120

30. El valor actual racional y el valor actual comercial de una letra, que vence dentro de dos meses, se diferencian en S/50. Calcule el valor nominal de dicha letra si la tasa de descuento en ambos casos es el 10% mensual.

A) S/1200 B) S/1400 C) S/1500
D) S/2400 E) S/3000

31. Se presentan al banco dos letras, una de S/1990 y la otra de S/1970. El banco paga la misma suma por cada una de ellas, descontada la primera por 90 días al 6% y la segunda a la misma tasa. ¿Cuántos días faltarán para el vencimiento de esta última letra?

A) 30 días B) 10 días C) 60 días
D) 70 días E) 50 días

32. Una persona debe pagar hoy S/50000, pero solo abona S/42200 en efectivo y gira una letra a 45 días con una tasa de descuento del 20%. Halle el valor nominal de la letra.

A) S/8000 B) S/8620 C) S/8800
D) S/9100 E) S/9200

33. Indique a qué tasa de descuento se fijó una letra si, faltando 15 meses para su vencimiento, la relación entre la diferencia de los descuentos y la suma de sus valores actuales es de 9 a 23.

A) 20% B) 25% C) 40%
D) 48% E) 60%

34. Si se descontara comercialmente una letra el 22 de julio o el 9 de agosto, sus descuentos serían entre sí como 5 es a 3. Calcule la fecha de vencimiento de dicha letra.

A) 3 de septiembre
B) 4 de septiembre
C) 5 de septiembre
D) 6 de septiembre
E) 7 de septiembre

Nivel avanzado

35. Se tiene una letra que vence dentro de 8 meses. Si se llegara a descontar al banco, en ese momento la relación entre sus descuentos comercial y racional sería como 5 es 4, pero si se llegara a descontar dentro de 3 meses, el descuento comercial sería S/1125. Halle el valor nominal de la letra.

A) S/6400 B) S/6500 C) S/6800
D) S/7000 E) S/7200

36. Se compró un televisor y por el saldo se firmó una letra de S/315, la cual se desea cancelar 4 meses antes de la fecha de vencimiento con un descuento racional del 15%. ¿Qué suma se debe pagar?

A) S/280 B) S/290 C) S/300
D) S/310 E) S/320

37. María compró un televisor por el que pagó una cuota inicial de S/250 y se comprometió a pagar bimestralmente 4 cuotas decrecientes proporcionales a los primeros números naturales. Calcule el precio al contado del televisor si el valor nominal total de las tres letras es S/1000 y estas son descontables al 3 % trimestral.

A) S/1210 B) S/1190 C) S/1250
D) S/1308 E) S/1220

38. Calcule la fecha de vencimiento común en el que se pueden pagar 6 letras juntas de igual valor nominal y que vencen cada 30 días si la primera vence el 15 de mayo.

A) 29 de julio
B) 30 de julio
C) 1 de agosto
D) 2 de agosto
E) 3 de agosto

39. Se tienen cuatro letras de igual valor nominal y los tiempos que faltan para su vencimiento en días están dados por 4 potencias consecutivas de 2. Si el tiempo de vencimiento común es de 240 días, ¿dentro de cuántos días vencerá la primera letra?

A) 48 B) 64 C) 96
D) 128 E) 256

40. Para comprar una computadora de S/8400, se firmaron letras mensuales de S/600, descontables al 10 % (no hubo cuota inicial). ¿Cuántas letras se firmaron si se terminó de pagar en menos de dos años?

A) 12 B) 14 C) 15
D) 18 E) 20

41. Un comerciante tiene que pagar tres letras de S/400, S/1000 y S/2000, las cuales vencen dentro de 30 días, 60 días y 83 días, respectivamente. ¿Dentro de cuánto tiempo debe ser pagada una única letra de S/3400 que reemplaza a las anteriores? Considere que todas las letras son descontadas a una misma tasa.

A) 45 días B) 56 días C) 62 días
D) 70 días E) 78 días

42. ¿Cuál es la fecha de vencimiento de una letra si los descuentos correspondientes al 15 de agosto y el 16 de septiembre son entre sí como 15 es a 7?

A) 14 de octubre
B) 18 de octubre
C) 31 de octubre
D) 4 de noviembre
E) 10 de noviembre

43. Los valores nominales de dos letras están en la relación de 3 a 8. Ambas se descuentan al 1 %, la primera por 1 mes y 20 días, y la segunda por 3 meses. Si el descuento de la segunda letra ha sido de S/22 680, ¿cuál fue el descuento de la primera letra?

A) S/8450 B) S/7800 C) S/9450
D) S/9540 E) S/4725

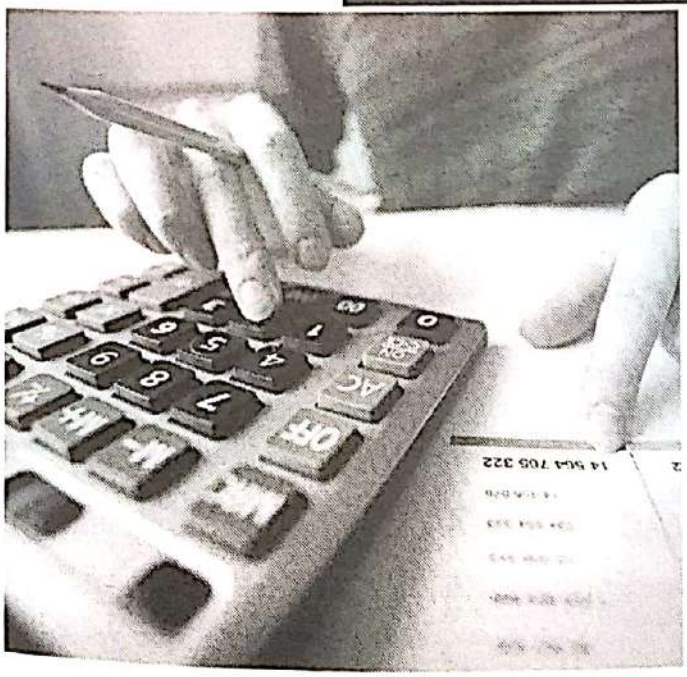
44. Se tienen dos letras que vencen dentro de 2 y 3 meses, respectivamente, y cuya suma de valores nominales es S/8400. Calcule el valor nominal de una de las letras si se sabe que el descuento de la segunda letra es dos veces más que la primera.

A) S/5625 B) S/6500 C) S/7200
D) S/2800 E) S/5400

Capítulo

XVII

$$\text{Media} = \frac{3+5+6+8+9+9+9}{7} = \frac{49}{7} = 7$$



Promedios

Ángel Sánchez Oré

CAPÍTULO XVII

PROMEDIOS

Objetivos

- Analizar los datos recopilados o recolectados y determinar el representante más adecuado.
- Aprender a utilizar los promedios más importantes según la situación dada en particular para encontrar un valor representativo.
- Aplicar las propiedades de los promedios en la resolución de problemas cotidianos.

Introducción

El origen de la palabra "promedio" se remonta a la época en que los viajes que se realizaban por mar implicaban gran riesgo, ya que era bastante frecuente que, durante una tormenta, los barcos lanzaran parte de su carga al agua con la finalidad de no hundirse por el peso.

Se reconoció que aquellos cuyos bienes se sacrificaban podían reclamar con justicia una indemnización a expensas de aquellos que no habían sufrido alguna disminución en sus bienes. El valor de los bienes sacrificados se pagaba mediante un acuerdo entre todos los que tenían mercaderías en el mismo buque.

El daño causado por el mar se conocía como "havaria". Esta palabra llegó a aplicarse naturalmente al dinero que cada individuo tenía que pagar como compensación por el riesgo. De esta palabra latina se deriva la moderna palabra inglesa *average* (promedio). Hoy en día, el promedio forma parte de nuestra actividad cotidiana; es común escuchar a un alumno decir que para llegar a la academia se demora 35 minutos en promedio, o a una ama de casa señalar que, en promedio, su gasto diario es de S/17. Así mismo, muchas empresas de transportes, en ciertos puntos de su ruta, marcan la hora con la finalidad de que, en promedio, se tenga una idea del tiempo que se demora en ir de un lugar a otro; en un ámbito más sofisticado, el promedio también se utiliza para hallar la medida de la inflación.

En el presente capítulo, abordaremos los promedios más importantes, teniendo en cuenta algunos criterios que se deben considerar para utilizar uno de dichos promedios, como por ejemplo, el promedio aritmético; además, entenderemos como obtener su resultado, utilizando en forma conveniente algunos fórmulas de cálculo preestablecidas.

1 ▸ DEFINICIÓN

Dado un conjunto de datos, se llama promedio a una cantidad representativa de dicho conjunto, en el cual esta cantidad debe estar comprendida entre el menor y el mayor de los datos.

Ejemplos

- Alberto cursa el 4.° año de secundaria en el colegio; durante los cuatro periodos de estudio, en el curso de matemáticas obtuvo notas de 14; 13; 16 y 17. Para obtener su nota promedio se realiza la siguiente operación:

$$\frac{14+13+16+17}{4}=\frac{60}{4}=15$$

- Julia, quien es una ama de casa muy ordenada, lleva la cuenta de sus gastos diarios. Durante la primera semana del mes de marzo, anotó lo siguiente:
  - lunes: S/20,5
  - martes: S/22
  - miércoles: S/23,5
  - jueves: S/24
  - viernes: S/22,5
  - sábado: S/28
  - domingo: S/31

  Fernando, su esposo, desea obtener el gasto promedio por día y realiza la siguiente operación:

$$\frac{20{,}5+22+23{,}5+24+22{,}5+28+31}{7}$$

$$\frac{171{,}5}{7}=24{,}5$$

Veamos un caso general.

Sean los datos

$$d_1 \leq d_2 \leq d_3 \leq d_4 \leq d_5 \leq; \ldots; \leq d_{n-1} \leq d_n$$

Si P es el promedio de dichos datos, se debe cumplir lo siguiente:

$$d_1 \leq P \leq d_n$$

donde

- d_1: menor dato
- d_n: mayor dato

En los ejemplos anteriores, observamos que la manera más común de obtener un promedio es sumando los datos y dividiendo entre la cantidad de datos; pero esta no es la única manera de obtener un promedio. En el presente capítulo, abordaremos los promedios más usuales; más adelante, en el capítulo de estadística estudiaremos otros tipos de promedios, no solo para datos no clasificados, sino también para los que sí lo son.

2 ▸ PROMEDIOS IMPORTANTES

Los promedios más importantes y los más utilizados son los siguientes:

- Promedio aritmético o media aritmética ($\overline{MA}$)
- Promedio geométrico o media geométrica ($\overline{MG}$)
- Promedio armónico o media armónica ($\overline{MH}$)

A continuación detallaremos en qué consiste cada uno de ellos y cómo se obtiene su respectivo resultado.

2.1. PROMEDIO ARITMÉTICO O MEDIA ARITMÉTICA ($\overline{MA}$)

Es el promedio más utilizado, su cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$\overline{MA}=\frac{\text{(suma de datos)}}{\text{(cantidad de datos)}}$$

Ejemplos

- Hallemos el promedio aritmético de las temperaturas de cinco ciudades del norte de nuestro país.

Ciudad	Temperatura
Cajamarca	26°
Chiclayo	28°
Piura	33°
Tumbes	31°
Iquitos	27°

$$\overline{MA}=\frac{26°+28°+33°+31°+27°}{5}$$

$$\therefore\ \overline{MA}=\frac{145°}{5}=29°$$

- Un chofer de una empresa de transporte realiza varios recorridos a nivel nacional. Hallemos el recorrido promedio si se conoce la siguiente información:

Ruta	Distancia
Lima - Huancayo	298 km
Huancayo - Huancavelica	147 km
Huancavelica - Ayacucho	245 km
Ayacucho - Abancay	367 km

donde MA es el recorrido promedio.

$$MA=\frac{298+147+245+367}{4}$$

$$\therefore\ MA=\frac{1057}{4}=264{,}25\text{ km}$$

- A un paseo asisten 5 niñas y 6 niños. Si cada uno de ellos lleva cierta cantidad de dinero, hallemos la cantidad promedio de dinero por grupo de niñas y niños.

Además se sabe lo siguiente:

- niñas: S/11; S/14; S/17; S/20; S/23
- niños: S/8; S/14; S/20; S/26; S/32; S/38

$$\overline{MA}_{\text{niñas}}=\frac{11+14+17+20+23}{5}=\frac{85}{5}=S/17$$

$$\overline{MA}_{\text{niños}}=\frac{8+14+20+26+32+38}{6}=\frac{138}{6}$$

$$\therefore\ \overline{MA}_{\text{niños}}=S/23$$

Nota

En el ejemplo anterior se observa que los datos están en progresión aritmética; además, se cumple lo siguiente:

- $11;\ 14;\ \underset{\overline{MA}}{\underset{\uparrow}{17}};\ 20;\ 23 \rightarrow \overline{MA}=17$

Por lo tanto, si la cantidad de datos que forman una PA es impar, su MA es aquel dato que ocupa el lugar central.

- $\underbrace{8;\ 14;\ 20;\ 26;\ 32;\ 38}_{\overline{MA}=\frac{8+38}{2}=23} \rightarrow \overline{MA}=23$

De esta manera, si la cantidad de datos que forman una PA es par, su MA es la semisuma de los dos datos equidistantes.

En general,

$$\underbrace{a_1;\ a_2}_{r};\ \underbrace{a_3;\ a_4}_{r};\ \ldots;\ \underbrace{a_{n-1};\ a_n}_{r}$$

son los términos de una progresión aritmética finita. Se cumple lo siguiente:

$$\overline{MA}=\begin{cases} a_{\frac{n+1}{2}} & ;\ \text{si } n \text{ es impar} \\ \dfrac{a_1+a_n}{2} & ;\ \text{si } n \text{ es par} \end{cases}$$

Aplicación 1

En un aula se sabe que el promedio de edades de 10 alumnos es 15 años y que el promedio de edades de otros 20 alumnos es 18 años. Halle la edad promedio de los 30 estudiantes.

Resolución

Según los datos tenemos

N.° de alumnos	Promedio
10	15
20	18

Hallamos la edad promedio de cada grupo.

De los 10 primeros alumnos:

$$\frac{a_1+a_2+...+a_{10}}{10}=15$$

$$a_1+a_2+...+a_{10}=10(15)$$

De los 20 alumnos siguientes:

$$\frac{a_{11}+a_{12}+a_{13}+...+a_{30}}{20}=18$$

$$a_{11}+a_{12}+...+a_{30}=20(18)$$

De los 30 estudiantes:

$$\overline{MA}=\frac{a_1+a_2+...+a_{10}+a_{11}+a_{12}+...+a_{30}}{30}$$

Reemplazamos.

$$\overline{MA}=\frac{10(15)+20(18)}{30}=\frac{510}{30}=17$$

Por lo tanto, la edad promedio de los 30 estudiantes es 17 años.

2.1.1. Promedio ponderado

Es aquel promedio en el que los datos tienen cierto grado de importancia (puede ser llamado peso o crédito) y para su cálculo este grado de importancia debe ser considerado.

Si tenemos

Datos	Peso
d_1	p_1
d_2	p_2
d_3	p_3
$\vdots$	$\vdots$
d_n	p_n

además, P es su promedio ponderado

$$\rightarrow \quad P=\frac{d_1p_1+d_2p_2+d_3p_3+...+d_np_n}{p_1+p_2+p_3+...+p_n}$$

Aplicación 2

Un estudiante universitario ha llevado cinco cursos, cada uno de los cuales tiene un peso (crédito). Si la tabla siguiente muestra las notas obtenidas al final del ciclo, halle su nota promedio.

Curso	Nota	Crédito
Análisis Matemático I	14	5
Matemática Básica I	12	4
Física I	17	4
Química I	16	4
Dibujo Técnico	15	3
	Total	20

Resolución

Hallamos la nota promedio de la siguiente manera:

$$\overline{MA}=\frac{14\times5+12\times4+17\times4+16\times4+15\times3}{20}$$

$$\therefore \quad \overline{MA}=\frac{285}{20}=14{,}25$$

Nota

El número de créditos de un curso está relacionado con el número de horas que se dicta dicho curso, así como también el grado de dificultad del mismo; un alumno universitario debe haber acumulado un número de créditos estimado para graduarse de la facultad en la cual ha estudiado.

Aplicación 3

De 500 alumnos de un colegio, cuya estatura promedio es de 1,67 m, 150 son mujeres y su estatura promedio es de 1,60 m. Calcule la estatura promedio de los varones.

Resolución

De los datos del problema tenemos

	Varones	Mujeres	Total
Cantidad	350	150	500
Promedio	$\bar{x}$	1,6	1,67

Del recuadro podemos observar lo siguiente:

- $1{,}6=\dfrac{(\text{suma de estaturas de las mujeres})}{150}$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de estaturas}\\ \text{de las mujeres}\end{pmatrix}=1{,}6(150)$$

- $\bar{x}=\dfrac{(\text{suma de estaturas de los varones})}{350}$

$$\begin{pmatrix}\text{suma de estaturas}\\ \text{de los varones}\end{pmatrix}=\bar{x}(350)$$

Luego,

$$1{,}67=\frac{\begin{pmatrix}\text{suma de estaturas}\\ \text{de las mujeres}\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}\text{suma de estaturas}\\ \text{de los varones}\end{pmatrix}}{500}$$

Reemplazamos los valores anteriores.

$$1{,}67=\frac{1{,}6(150)+\bar{x}(350)}{500}$$

Operando se tendrá

$$835=240+350\bar{x}$$

$$350\bar{x}=595$$

$$\bar{x}=\frac{595}{350}$$

$$\therefore\ \bar{x}=1{,}7\text{ m}$$

Aplicación 4

La edad promedio de 30 personas es 20 años y ninguno de ellos es menor de 18 años. ¿Cuál es la máxima edad que puede tener uno de ellos?

Resolución

Como deseamos saber la edad máxima que podría tener uno de ellos, vamos a asumir que de las 30 personas, 29 de ellas tienen la menor edad posible (en nuestro caso, 18 años, ya que nos dicen que ninguno de ellos es menor de 18 años). Luego, la persona que quede podrá tener la mayor edad posible.

Así tendremos

$$\overbrace{\underbrace{18;\ 18;\ 18;\ 18;\ \ldots;\ 18;\ 18}_{29\text{ personas}};\ e_{\text{máx}}}^{\text{edades}}$$

donde $e_{\text{máx}}$ es la edad máxima de una de las personas

De los datos del problema tendremos

$$\frac{29(18)+e_{\text{máx}}}{30}=20$$

Operamos.

$$522+e_{\text{máx}}=600$$

$$\therefore\ e_{\text{máx}}=78\text{ años}$$

2.1.2. Variación de la media aritmética ($\Delta\overline{MA}$)

Cuando en un conjunto de datos, algunos aumentan o disminuyen su valor, entonces la $\overline{MA}$ de este conjunto de datos se verá alterado y dicha variación se calcula de la siguiente manera:

$$\Delta\overline{MA}=\frac{\begin{pmatrix}\text{cantidad total}\\ \text{que se aumenta}\\ \text{a los datos}\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}\text{cantidad total}\\ \text{que se disminuye}\\ \text{a los datos}\end{pmatrix}}{(\text{cantidad total de datos})}$$

Además,

- Si $\Delta\overline{MA} < 0$, entonces el promedio disminuye.
- Si $\Delta\overline{MA} = 0$, entonces el promedio aumenta.
- Si $\Delta\overline{MA} > 0$, entonces el promedio aumenta.

Se concluye que

$$\boxed{\overline{MA}_{\text{final}} = \overline{MA}_{\text{inicial}} + \Delta\overline{MA}}$$

Aplicación 5

El promedio de 10 números es 15. Si a 4 de estos números les quitamos 8 unidades a cada uno; además, a 3 de ellos les aumentamos 2 unidades a cada uno, ¿cuál es el nuevo promedio?

Resolución

Se sabe que

$$\overline{MA}_{\text{inicial}} = 15$$

Del enunciado, hallamos la variación de la $\overline{MA}$.

$$\Delta\overline{MA} = \frac{3(2)-4(8)}{10} = -2{,}6$$

El promedio disminuye.

Finalmente,

$$\overline{MA}_{\text{inicial}} = 15 - 2{,}6 = 12{,}4$$

Por lo tanto, el nuevo promedio es 12,4.

Aplicación 6

Al calcular el promedio aritmético de las notas de 20 estudiantes, se observa que si a 15 de estas notas se les agrega 7 puntos a cada una y al resto se le disminuye 5 puntos cada una, el nuevo promedio sería 17. Calcule el promedio inicial.

Resolución

Sean las notas iniciales de los 20 estudiantes

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ a_4;\ a_5;\ \ldots;\ a_{17};\ a_{18};\ a_{19};\ a_{20}$$

Su promedio inicial sería

$$P_{\text{inicial}} = \frac{a_1+a_2+a_3+a_4+\ldots+a_{18}+a_{19}+a_{20}}{20}$$

Según el dato,

$$\underbrace{\begin{array}{c}(a_1+7);\ (a_2+7);\ (a_3+7);\ (a_4+7);\ \ldots;\ (a_{14}+7);\\ (a_{15}+7);\ (a_{16}-5);\ (a_{17}-5);\ \ldots;\ (a_{20}-5)\end{array}}_{\text{nuevas notas}}$$

Observe que la cantidad de notas no ha variado, siguen siendo 20 notas.

Ordenamos.

a_1+7	$a_{16}-5$
a_2+7	$a_{17}-5$
$\vdots$	$\vdots$
$a_{15}+7$	$a_{20}-5$
$a_1+a_2+\ldots+a_{15}+7(15)$	$a_{16}+a_{17}+\ldots+a_{20}-5(5)$

De ahí tenemos que

$$P_{\text{final}} = \frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{18}+a_{19}+a_{20}+15(7)-5(5)}{20}$$

$$P_{\text{final}} = \underbrace{\frac{a_1+a_2+a_3+\ldots+a_{18}+a_{19}+a_{20}}{20}}_{P_{\text{inicial}}} + \underbrace{\frac{15(7)-5(5)}{20}}_{\text{variación promedio}}$$

Por dato

$$P_{\text{final}} = 17$$

Reemplazamos.

$$17 = P_{\text{inicial}} + \frac{105-25}{20}$$

$$17 = P_{\text{inicial}} + 4$$

$$\therefore\ P_{\text{inicial}} = 13$$

De lo anterior podemos observar que

$$\boxed{P_{\text{final}} = P_{\text{inicial}} + (\text{variación del promedio})}$$

Además,

$$\boxed{\left(\begin{array}{c}\text{variación del}\\ \text{promedio}\end{array}\right) = \frac{\left(\begin{array}{c}\text{aumento y/o disminución}\\ \text{de los datos}\end{array}\right)}{(\text{total de datos})}}$$

Aplicación 7

Durante un recorrido de 180 km de Lima a Paramonga, dos llantas de un automóvil se malograron, por lo que se utilizaron seis llantas en lugar de cuatro. Calcule cuál es el promedio recorrido por cada llanta.

Resolución

Observemos que al no malograrse ninguna llanta, cada llanta recorrería 180 km; el recorrido total sería 180 km×4, es decir, 720 km.

Este recorrido total no variará, puesto que el automóvil recorrerá la misma distancia.

Ahora, como dicho recorrido total se ha realizado con seis llantas, el promedio recorrido por llanta será

$$\begin{pmatrix}\text{promedio recorrido}\\ \text{por llanta}\end{pmatrix} = \frac{720\text{ km}}{6} = 120\text{ km}$$

Por lo tanto, el promedio recorrido por cada llanta será una distancia de 120 km.

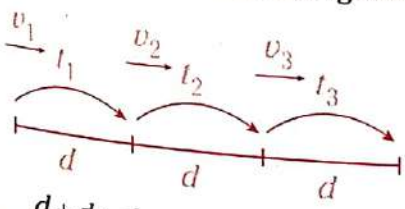
2.1.3. Velocidad promedio (V_P)

Es la velocidad media que tiene un móvil en un intervalo de tiempo dado.

$$V_P = \frac{(\text{distancia total recorrida})}{(\text{tiempo total empleado})}$$

Casos particulares

1. Si las distancias recorridas son iguales



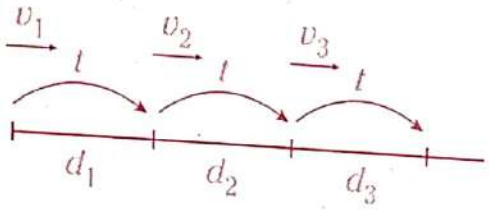
$$V_P = \frac{d+d+d}{t_1+t_2+t_3} = \frac{3d}{\frac{d}{v_1}+\frac{d}{v_2}+\frac{d}{v_3}}$$

$$V_P = \frac{3}{\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\frac{1}{v_3}}$$

En conclusión, si las distancias recorridas son iguales, entonces

$$V_P = (\overline{MH}\text{ de velocidades})$$

2. Si los tiempos empleados son iguales



$$V_P = \frac{d_1+d_2+d_3}{t+t+t} = \frac{v_1t+v_2t+v_3t}{3t}$$

$$V_P = \frac{v_1+v_2+v_3}{3}$$

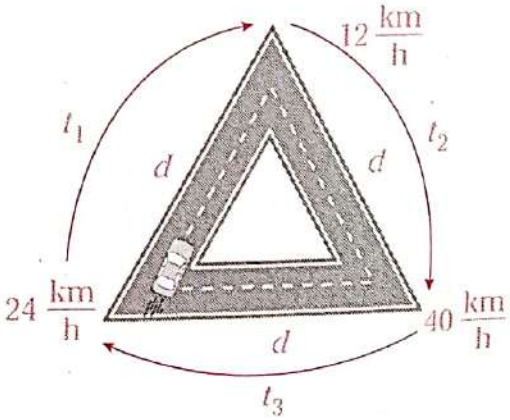
En conclusión, si los tiempos empleados son iguales, entonces

$$V_P = (\overline{MA}\text{ de velocidades})$$

Aplicación 8

Un auto recorre un circuito que tiene forma de un triángulo equilátero con velocidades de 24 km/h, 12 km/h y 40 km/h por cada lado. Calcule la velocidad promedio del auto.

Resolución



De los datos

$$V_P = \frac{d+d+d}{t_1+t_2+t_3}$$

$$V_P = \frac{3d}{\frac{d}{24}+\frac{d}{12}+\frac{d}{40}} = \frac{3}{\frac{1}{24}+\frac{1}{12}+\frac{1}{40}}$$

$$V_P = \frac{3}{\frac{18}{120}} = \frac{360}{18} = 20$$

Por lo tanto, la velocidad promedio del auto es 20 km/h.

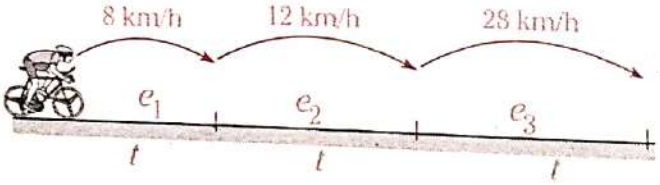
Aplicación 9

Iván recorre con su bicicleta tres tramos diferentes de una carretera en un mismo tiempo cada tramo, siendo sus velocidades de 8 km/h; 12 km/h y 28 km/h, respectivamente. ¿Cuál es la velocidad promedio aplicada por Iván en todo su recorrido?

Resolución

Tengamos presente que la velocidad promedio (v_P) se determina de la siguiente manera:

$$v_P = \frac{\text{(espacio total recorrido)}}{\text{(tiempo total empleado)}}$$



Ha utilizado el mismo tiempo para cada tramo. Veamos ahora la velocidad promedio (v_P)

$$v_P = \frac{e_1+e_2+e_3}{t+t+t}$$

Recuerde que

$$e = v \times t$$

donde

- e: espacio
- v: velocidad
- t: tiempo

Reemplazamos.

$$v_P = \frac{8t+12t+28t}{t+t+t}$$

$$v_P = \frac{48t}{3t}$$

$$\therefore \quad v_P = 16 \text{ km/h}$$

La forma de este problema también es aplicable para problemas de promedio de producción, como lo podemos observar en la aplicación siguiente.

Aplicación 10

En una fábrica laboran costureras en tres turnos de 8 horas cada uno; se ha observado lo siguiente: en el primer turno se confeccionan 24 camisas por hora; en el segundo turno, 15 camisas por hora; en el tercer turno, 12 camisas por hora. ¿Cuál será la producción promedio por hora en dicha fábrica?

Resolución

Se observa que cada grupo trabaja una misma cantidad de horas (tiempos iguales) y que las producciones de cada grupo por hora nos representan la velocidad de producción de cada grupo. Así tendremos

Grupo	Producción en una hora	En todo su turno
1	24	24(8)
2	15	15(8)
3	12	12(8)

El promedio de producción por hora (P) será

$$P = \frac{\text{(producción total)}}{\text{(tiempo total)}}$$

Así tendremos

$$P=\frac{24(8)+15(8)+12(8)}{8+8+8}$$

$$P=\frac{192+120+96}{24}=17$$

Por lo tanto, la producción promedio es 17 camisas por hora.

2.2. PROMEDIO GEOMÉTRICO O MEDIA GEOMÉTRICA ($\overline{MG}$)

Es el segundo promedio más utilizado, generalmente nos permite promediar índices porcentuales y tasas de crecimiento. Su cálculo se realiza de la siguiente manera:

$$\overline{MG}=\sqrt[\text{cantidad de datos}]{(\text{producto de datos})}$$

Ejemplos

- En una comunidad campesina se ha observado el crecimiento poblacional de los tres últimos años. Hallemos su tasa anual de crecimiento.

Año	Crecimiento
2000	2,16%
2001	5,12%
2002	7,29%

$$\overline{MG}=\sqrt[3]{(2{,}16\%)(5{,}12\%)(7{,}29\%)}=4{,}32\%$$

Generalmente, la $\overline{MG}$ se aplica para valores extremos, es decir, cuando los datos se presentan bastante dispersos.

- Los índices de precio al consumidor (IPC) durante cuatro meses, en nuestro medio, fueron los que se presentan en la siguiente tabla. Hallemos la inflación promedio de los cuatro primeros meses.

	Enero	Febrero	Marzo	Abril
Inflación	0,2%	0,36%	0,75%	0,15%

$$\overline{MG}=\sqrt[4]{(0{,}2\%)(0{,}36\%)(0{,}75\%)(0{,}15\%)}=0{,}30\%$$

Aplicación 11

El promedio geométrico de 10 números es 4 y el promedio geométrico de otros 5 números diferentes a los anteriores es 32. Calcule el promedio geométrico de los 15 números mencionados.

Resolución

Sean los 10 primeros números

$$a_1;\ a_2;\ a_3;\ \ldots;\ a_{10}$$

Por dato

$$\overline{MG}(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{10})=\sqrt[10]{a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_{10}}=4$$

Luego,

$$a_1\times a_2\times\ldots\times a_{10}=4^{10}=2^{20}$$

También para los otros 5 números:

$$b_1;\ b_2;\ b_3;\ \ldots;\ b_5$$

$$\overline{MG}(b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_5)=\sqrt[5]{b_1\times b_2\times\ldots\times b_5}=32$$

De ahí

$$b_1\times b_2\times\ \ldots\times b_5=32^5=2^{25}$$

Nos piden

$$\overline{MG}(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{10};\ b_1;\ b_2\ \ldots;\ b_5)=$$

$$\sqrt[15]{a_1\times a_2\times\ldots\times a_{10}\times b_1\times b_2\times\ldots\times b_5}$$

Reemplazamos.

$$MG(a_1;\ a_2;\ldots;\ a_{10};\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_5)=\sqrt[15]{2^{20}\times 2^{25}}$$

Entonces

$$\overline{MG}(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{10};\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_5)=\sqrt[15]{2^{45}}$$

$$\therefore\ \overline{MG}(a_1;\ a_2;\ \ldots;\ a_{10};\ b_1;\ b_2;\ \ldots;\ b_5)=2^3=8$$

Aplicación 12

La media geométrica de cuatro números enteros positivos y diferentes es $9\sqrt{3}$. Calcule la media aritmética de dichos números si son mayores de uno.

Resolución

Sean los números $a, b, c, d \in \mathbb{Z}^+$.

Por dato tenemos

$$\overline{MG}(a; b; c; d)=9\sqrt{3}$$

Luego,

$$\sqrt[4]{a\times b\times c\times d}=9\sqrt{3}$$

Elevando a la cuarta tendremos

$$a\times b\times c\times d=9^4\times 3^2$$

$$a\times b\times c\times d=3^8\times 3^2=3^{10}$$

Como a, b, c, d son enteros, todos ellos serán potencias de 3, además de ser diferentes; de ahí que se tendrá lo siguiente:

$$a\times b\times c\times d=3^1\times 3^2\times 3^3\times 3^4=3^{10}$$

Entonces

- $a=3^1=3$
- $b=3^2=9$
- $c=3^3=27$
- $d=3^4=81$

Nos piden

$$\overline{MA}(a; b; c; d)=\frac{3+9+27+81}{4}$$

$$\overline{MA}(a; b; c; d)=\frac{120}{4}$$

$$\therefore\ \overline{MA}(a; b; c; d)=30$$

2.3. PROMEDIO ARMÓNICO O MEDIA ARMÓNICA ($\overline{MH}$)

Es la inversa de la $\overline{MA}$ de las inversas de los datos.

$$\overline{MH}=\frac{\text{(cantidad de datos)}}{\text{(suma de las inversas de los datos)}}$$

Aplicación 13

Halle el promedio armónico de las edades de tres estudiantes, las cuales son 24; 16 y 30 años.

Resolución

Nos piden

$$\overline{MH}(16; 24; 30)$$

Sabemos que

$$\overline{MH}(16; 24; 30)=\frac{3}{\frac{1}{24}+\frac{1}{16}+\frac{1}{30}}$$

$$\overline{MH}(16; 24; 30)=\frac{3}{\frac{10+15+8}{240}}=\frac{3}{\frac{33}{240}}$$

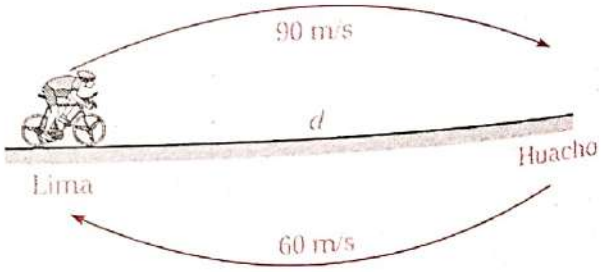
$$\overline{MH}(16; 24; 30)=\frac{3(240)}{33}$$

$$\therefore\ \overline{MH}(16; 24; 30)=21,\overline{81}$$

Aplicación 14

Un ciclista se dirige de Lima a Huacho con una velocidad de 90 m/s. Si en su viaje de regreso la velocidad que aplica es de 60 m/s, calcule su velocidad promedio en todo el recorrido.

Resolución



Recordemos que

$$v_{\text{promedio}}=\frac{\text{(espacio total)}}{\text{(tiempo total)}}$$

$$\rightarrow\ v_{\text{promedio}}=\frac{d+d}{\frac{d}{90}+\frac{d}{60}}$$

$$v_{\text{promedio}}=\frac{2d}{d\left(\frac{1}{90}+\frac{1}{60}\right)}=\frac{2}{\frac{1}{90}+\frac{1}{60}}$$

$$v_{\text{promedio}}=\frac{2}{\frac{2+3}{180}}$$

$$v_{\text{promedio}}=\frac{2}{\frac{5}{180}}$$

$$v_{\text{promedio}}=\frac{2(180)}{5}$$

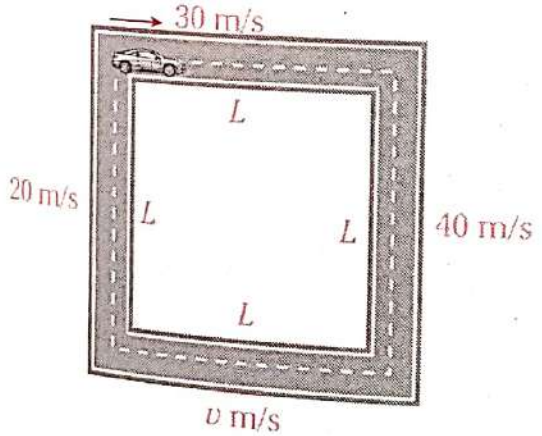
$$\therefore\ v_{\text{promedio}}=72\ \text{m/s}$$

Aplicación 15

Un automovilista recorre un circuito de forma cuadrada aplicando en cada lado, respectivamente, una velocidad de 20 m/s; 30 m/s; 40 m/s y v m/s. Si la velocidad promedio es 32 m/s, halle v.

Resolución

Según los datos tenemos



Luego,

$$v_{\text{promedio}}=\frac{(\text{espacio total})}{(\text{tiempo total})}$$

$$\rightarrow v_{\text{promedio}}=\frac{4L}{\frac{L}{20}+\frac{L}{30}+\frac{L}{40}+\frac{L}{v}}$$

Pero

$$v_{\text{promedio}}=\frac{4}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{v}}=32$$

De ahí que

$$\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}+\frac{1}{v}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{v}+\frac{6+4+3}{120}=\frac{1}{8}$$

$$\frac{1}{v}+\frac{13}{120}=\frac{1}{8}\ \rightarrow\ \frac{1}{v}=\frac{1}{8}-\frac{13}{120}$$

$$\frac{1}{v}=\frac{15-13}{120}\ \rightarrow\ \frac{1}{v}=\frac{2}{120}=\frac{1}{60}$$

$$\therefore\ v=60\ \text{m/s}$$

3 ▸ PROPIEDADES DE LOS PROMEDIOS ESTUDIADOS

3.1. PARA UN CONJUNTO DE DOS O MÁS DATOS

Si dichos datos son iguales se procede de la siguiente manera:

$$\boxed{\overline{MA}=\overline{MG}=\overline{MH}=\text{dato}}$$

Demostración

Sean los datos

$$a_1=a_2=a_3=a_4=\ldots=a_n$$

Hallemos.

- $$\overline{MA}=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_n}{n}=\frac{\overbrace{a_1+a_1+\ldots+a_1}^{n\ \text{datos}}}{n}$$

  $$\overline{MA}=\frac{na_1}{n}=a_1$$

- $$\overline{MG}=\sqrt[n]{a_1\times a_2\times a_3\times\ldots\times a_n}$$

  $$\overline{MG}=\sqrt[n]{a_1\times a_1\times a_1\times\ldots\times a_1}=\sqrt[n]{a_1^n}=a_1$$

- $$\overline{MH}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_n}}$$

  $$\overline{MH}=\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_1}+\ldots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\frac{n}{a_1}}=a_1$$

$$\therefore\ \overline{MA}=\overline{MG}=\overline{MH}=\text{dato}$$

Si todos los datos no son iguales se procede de la siguiente manera:

$$\overline{MA} > \overline{MG} > \overline{MH}$$

Ejemplo

Hallemos los promedios de 4; 6 y 9.

$$\overline{MA} = \frac{4+6+9}{3} = \frac{19}{3} = 6,\widehat{3}$$

$$\overline{MG} = \sqrt[3]{4 \times 6 \times 9} = \sqrt[3]{216} = 6$$

$$\overline{MH} = \frac{3}{\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{9}} = \frac{3}{\frac{9+6+4}{36}}$$

$$\overline{MH} = \frac{3(36)}{19} = 5,68$$

Como $6,\widehat{3} > 6 > 5,68$

se puede verificar que $\overline{MA} > \overline{MG} > \overline{MH}$.

3.2. SOLO PARA DOS DATOS (a y b)

Tenemos que

$\overline{MA}(a; b)$	$\overline{MG}(a; b)$	$\overline{MH}(a; b)$
$\frac{a+b}{2}$	$\sqrt{a \times b}$	$\frac{2ab}{a+b}$

Para lo cual se cumplen las siguientes propiedades:

Propiedad 1

$$\overline{MA} \times \overline{MH} = \overline{MG}^2$$

Demostración

Del recuadro adjunto tenemos

$$\overline{MA} \times \overline{MH} = \left(\frac{a+b}{2}\right) \times \left(\frac{2ab}{a+b}\right)$$

Simplificamos

$$\overline{MA} \times \overline{MH} = a \times b$$

Mas sabemos que

$$a \times b = \sqrt{(a \times b)^2}$$

Reemplazamos.

$$\overline{MA} \times \overline{MH} = \sqrt{(a \times b)^2} = \left(\sqrt{(a \times b)}\right)^2 \qquad \text{(I)}$$

Recuerde que

$$\overline{MG} = \sqrt{a \times b} \qquad \text{(II)}$$

Reemplazamos (II) en (I).

$$\therefore \quad \overline{MA} \times \overline{MH} = \overline{MG}^2$$

Propiedad 2

$$(a-b)^2 = 4\left(\overline{MA} + \overline{MG}\right)\left(\overline{MA} - \overline{MG}\right)$$

Demostración

Desarrollemos la expresión siguiente:

$$\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{ab}\right)^2$$

Desarrollando el lado derecho se tendrá

$$\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2 = \frac{(a+b)^2}{4} - ab$$

$$\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2 = \frac{a^2+2ab+b^2}{4} - ab$$

$$\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2 = \frac{a^2+2ab+b^2-4ab}{4}$$

$$\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2 = \frac{a^2-2ab+b^2}{4}$$

$$\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2 = \frac{(a-b)^2}{4}$$

Se sabe que

$$\overline{MA}^2 - \overline{MG}^2 = \left(\overline{MA} + \overline{MG}\right)\left(\overline{MA} - \overline{MG}\right)$$

(por diferencia de cuadrados)

Reemplazamos.

$$\left(\overline{MA} + \overline{MG}\right)\left(\overline{MA} - \overline{MG}\right) = \frac{(a-b)^2}{4}$$

De ahí tendremos

$$\therefore \quad (a-b)^2 = 4\left(\overline{MA} + \overline{MG}\right)\left(\overline{MA} - \overline{MG}\right)$$

Aplicación 16

De tres números impares consecutivos, la $\overline{MH}$ es 8,7... Halle la $\overline{MA}$ de los dos mayores impares.

Resolución

Sean los tres impares consecutivos

$a; a+2; a+4$

Observemos que

$$\overline{MA}(a; a+2; a+4)=\frac{a+(a+2)+(a+4)}{3}=a+2$$

Luego,

$$a; \underbrace{a+2}_{\overline{MA}}; a+4$$

Además, por propiedad, la $\overline{MH} < \overline{MA}$.

De ello obtendremos que

$a < 8{,}7... < a+2$ (todo promedio es mayor que el menor de los números)

Luego, los dos únicos impares consecutivos entre los cuales puede estar 8,7 serán 7 y 9.

$$\underset{7}{a} < 8{,}7... < \underbrace{a+2}_{9}$$

Finalmente, los tres impares consecutivos serán

$7; 9; 11$

Nos piden $\overline{MA}$ de los dos números mayores.

$$\overline{MA}(9; 11)=\frac{9+11}{2}=10$$

$\therefore\ \overline{MA}(9; 11)=10$

Aplicación 17

Para dos cantidades a y b se cumple que $\overline{MA}\times\overline{MH}=100$; además, $\overline{MA}\times\overline{MG}=125$. Calcule $a+b$.

Resolución

Por dato

$$\overline{MA}\times\overline{MH}=100$$

Pero sabemos que

$$\overline{MA}\times\overline{MH}=\overline{MG}^2$$

Reemplazamos.

$$\overline{MG}^2=100$$

De ahí obtenemos que

$$\overline{MG}=10$$

También nos dicen que

$$\overline{MA}\times\overline{MG}=125$$

Reemplazando el valor de $\overline{MG}$ tenemos

$$\overline{MA}\times 10=125 \rightarrow \overline{MA}=12{,}5$$

Luego,

$$\overline{MA}(a; b)=12{,}5$$

Es decir,

$$\frac{a+b}{2}=12{,}5$$

$\therefore\ a+b=25$

Aplicación 18

Se sabe que dos números se diferencian en 12; además, la suma de la $\overline{MA}$ y $\overline{MG}$ de ellos es 9. Calcule cuál es el error que se comete al considerar a la $\overline{MA}$ en lugar de la $\overline{MG}$.

Resolución

Sean los números a y b.

Tenemos por dato

$$a-b=12;\ a>b$$

$$\overline{MA}+\overline{MG}=9$$

Sabemos que para dos números se cumple que

$$\overline{MA}-\overline{MG}=\frac{(a-b)^2}{4(MA+MG)}$$

Además,

$$\overline{MA}-\overline{MG}: \text{error}$$

Reemplazamos.

$$\overline{MA}-\overline{MG}=\frac{(12)^2}{4\times 9}=\frac{144}{36}$$

$$\overline{MA}-\overline{MG}=4$$

$\therefore$ error$=4$

LECTURA

¿Qué es el índice de precios al consumidor (IPC)?

Es un indicador que muestra las variaciones de precios que en promedio tiene un grupo seleccionado de bienes y servicios habitualmente consumidos por las familias.

El Instituto Nacional de Estadística e Informática (INEI) viene publicando mensualmente las series de los índices de precios al consumidor; en el caso de Lima Metropolitana, el primer día de cada mes siguiente y del resto de cabeceras departamentales a los 15 días de cada mes. A partir de enero 2002, el INEI empezó a publicar un índice de precios al consumidor nacional, cuyos resultados están disponibles a los 15 días de cada mes.

El índice de precios al consumidor a nivel nacional se calcula como un promedio ponderado de las 24 capitales departamentales, adicionándose la ciudad de Chimbote.

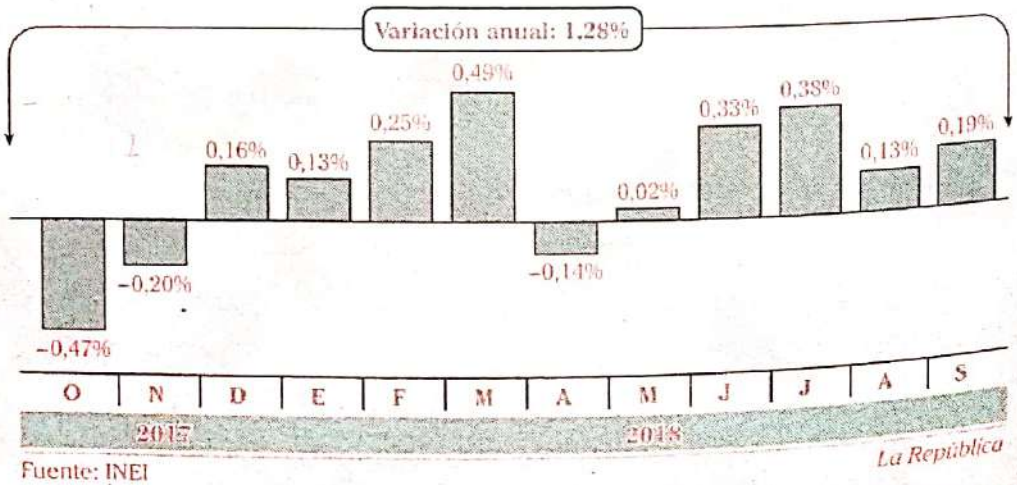
Permanentemente se vienen efectuando actualizaciones de la representatividad de las marcas de los productos, por el dinamismo del mercado interno; así como una adecuación a los sistemas de comercialización vigentes, dada una mayor participación de los grandes supermercados.

El INEI dispone de un sistema de captación de precios con una amplia cobertura que asegura la representatividad de los establecimientos comerciales y de servicios, donde realizan sus compras los consumidores. En Lima Metropolitana se captan 36 229 datos a lo largo de todo el mes de medición en aproximadamente 5000 establecimientos comerciales, 41 mercados, 6 supermercados, 500 viviendas alquiladas, 505 centros educativos, 210 líneas de transporte urbano e interprovincial y 143 establecimientos de venta de combustible, entre otros.

En las 24 principales ciudades del país se captan alrededor de 41 000 informaciones mensuales.

Veamos el siguiente ejemplo que describe la variación mensual del índice de precios al consumidor en el Perú entre octubre de 2017 y septiembre de 2018.

Variación mensual del índice de precios al consumidor



Fuente: INEI

La República

Adaptado de <www.inei.gob.pe>.

Problemas resueltos

Problema 1

El promedio de las edades de tres personas es 12 años. Si agregamos una cuarta persona, cuya edad es de 24 años, ¿cuál será la edad promedio de estas cuatro personas?

Resolución

Sean a, b, c las edades de las tres personas.

Por dato tenemos

$$\frac{a+b+c}{3}=12$$

$$a+b+c=36$$

Al incorporarse la cuarta persona con 24 años de edad, el nuevo promedio será

$$\overline{MA}=\frac{a+b+c+24}{4}$$

$$\overline{MA}=\frac{36+24}{4}=15$$

Por lo tanto, la nueva edad promedio es 15.

Problema 2

La $\overline{MA}$ de los tres términos de una sustracción es 20. Calcule la $\overline{MH}$ entre el sustraendo y la diferencia si se sabe que el 20 % de aquel es igual al 30 % de esta.

Resolución

En una sustracción se sabe que

$$M-S=D$$

De ahí

$$M=S+D$$

También

$$M+S+D=2M$$

Por dato tenemos que

$$\overline{MA}(M; S; D)=20$$

Luego,

$$\frac{M+S+D}{3}=20$$

$$M+S+D=2M=60$$

$$\rightarrow\ M=30=S+D$$

Además,

$$20\,\%S=30\,\%D$$

$$\frac{S}{3}=\frac{D}{2}\ \rightarrow\ \frac{S}{3}=\frac{D}{2}=\frac{S+D}{5}=\frac{30}{5}=6$$

$$\rightarrow\ S=3\times6=18\ \wedge\ D=2\times6=12$$

Piden $\overline{MH}$

$$\therefore\ \overline{MH}(18;\,12)=\frac{2\times18\times12}{18+12}=14{,}4$$

Problema 3

En el Colegio Bertolt Brecht, el promedio de las notas de un examen tomado a 40 estudiantes es 13,5. Se sabe que 6 de ellos obtuvieron un promedio de 18; otros 10, un promedio de 8; y el resto obtuvo notas que no superan los 16. Calcule el menor promedio posible que alcanzaron 5 estudiantes de estos restantes.

Resolución

Sea S_n la suma de las n notas.

$$\overline{MA}(40\text{ notas})=13{,}5\ \rightarrow\ \frac{S_{40}}{40}=13{,}5$$

$$S_{40}=40\times13{,}5=540$$

También

- $\overline{MA}(6\text{ notas})=\dfrac{S_6}{6}=18\ \rightarrow\ S_6=108$
- $\overline{MA}(10\text{ notas})=\dfrac{S_{10}}{10}=8\ \rightarrow\ S_{10}=80$

De lo anterior, el resto de notas (24 en total) serían

$$S_{24}=540-(108+80)=352$$

Como queremos saber el menor promedio de 5 de estos 24 estudiantes, 19 de ellos tendrán la mayor nota que puede tener este grupo, es decir, 16. Así tendremos

$$16\times(19)+\overline{MA}(5\text{ notas})\times(5)=352$$

$\therefore\ \overline{MA}(5\text{ notas})=9{,}6$ (mínimo)

Problema 4

En una reunión asistieron varones y mujeres entre adultos y niños. Se sabe que el promedio de edades es como se detalla en el siguiente cuadro:

	Adultos	Niños
Varones	35	6
Mujeres	30	2

Asimismo, se sabe que los adultos representan el 70% del total y el número de niñas es una vez más que el número de niños, los que representan el 25% del número de adultos varones. Calcule la $\overline{MA}$ de las edades de todos los asistentes.

Resolución

Según el enunciado, el número de niñas es una vez más que el número de niños (el número de niñas es el doble del número de niños).

Como el número de niños es el 25% de los adultos varones, serán la cuarta parte de ellos. Tenemos lo siguiente:

	Adultos	Niños
N.° de varones	$4K$	K
N.° de mujeres	$3K$	$2K$
	70%	30%

Hallamos la $\overline{MA}$.

$$\overline{MA}=\frac{35(4K)+30(3K)+6(K)+2(2K)}{4K+3K+K+2K}$$

$\therefore\ \overline{MA}=24$ años

Problema 5

El promedio aritmético de 20 números es 75. Si al primero se le añade 2 unidades; al segundo, 4 unidades; al tercero, 6 unidades; y así sucesivamente, ¿cuál es el nuevo promedio aritmético?

Resolución

Se sabe que $\overline{MA}_{\text{inicial}}=752$

Como a cada uno de los números se le va a añadir cierta cantidad de unidades, entonces el promedio cambiará.

Hallamos la variación del promedio.

$$\Delta\overline{MA}=\frac{2+4+6+\ldots+40}{20}$$

$$\Delta\overline{MA}=\frac{20\times21}{20}\ \rightarrow\ \Delta\overline{MA}=21$$

$\rightarrow\ \overline{MA}_{\text{final}}=75+21$

$\therefore\ \overline{MA}_{\text{final}}=96$

Problema 6

Miguel acostumbra salir todos los días con S/10. Observó que en enero su gasto promedio fue de S/8,2. Si en los 8 primeros días su saldo promedio diario fue de S/1,85 y en los 12 días siguientes su gasto promedio diario fue de 8,05; calcule el saldo promedio diario de los días restantes.

Resolución

Del enunciado tenemos que

- gasto promedio (enero)=S/8,2
- saldo promedio (enero)=10−8,20=S/1,80

N.° de días	Saldo promedio diario (S/)
8	1,85
12	10−8,05 = 1,95
11	a

$$1{,}8=\frac{8\times1{,}85+12\times1{,}95+11a}{31}$$

$\therefore\ a=1{,}6$

Problema 7

Si la $\overline{MG}$ de cuatro números enteros y diferentes es $5\sqrt{5}$, halle el menor promedio que se puede obtener con solo dos números.

Resolución

Sean a, b, c y d los números que deben ser diferentes.

Por dato tenemos

$$\sqrt[4]{a\times b\times c\times d}=5\sqrt{5}$$

$$\rightarrow \underset{1}{a}\times \underset{5^1}{b}\times \underset{5^2}{c}\times \underset{5^3}{d}=5^4\times 5^2=5^6$$

Sabemos que el menor promedio es la $\overline{MH}$.

$$\therefore\ \overline{MH}(1;5)=\frac{2\times 1\times 5}{6}=1,\widehat{6}$$

Problema 8

En una fábrica de polos existen 3 máquinas: A, B y C. En 1 hora, la máquina A produce 30 polos; la máquina B, 45 polos, y la máquina C, 90 polos. Determine la producción promedio por hora en dicha fábrica si todas deben producir la misma cantidad de polos en un día.

Resolución

En una hora ocurre lo siguiente:

- La máquina A produce 30 polos.
- La máquina B produce 45 polos.
- La máquina C produce 90 polos.

Supongamos que cada máquina debe producir N polos diariamente.

Sea x la producción promedio de polos por hora.

$$\rightarrow x=\frac{\text{producción total}}{\text{tiempo (n.º de horas)}}$$

$$x=\frac{N+N+N}{\frac{N}{30}+\frac{N}{45}+\frac{N}{90}}$$

$$x=\frac{3}{\frac{1}{30}+\frac{1}{45}+\frac{1}{90}}$$

$$\therefore\ x=45$$

Problema 9

El promedio de edades de un conjunto de personas es $\overline{mn}$ años. A la edad de cada una de las personas se le suma 30 años, luego se le multiplica por 2 y al final se le resta 10; además, al hallar el promedio de las nuevas edades se observa que hay un incremento de 63. Calcule $m\times n$.

Resolución

Sea P el número de personas cuyo promedio de edades es $\overline{mn}$.

Se sabe que

$$\overline{MA}\ (\text{edades de } P \text{ personas})=\overline{mn}$$

$$\frac{(\text{suma de edades de } P \text{ personas})}{P}=\overline{mn}$$

$$(\text{suma de edades de } P \text{ personas})=\overline{mn}\times P$$

$$\overline{MA}_P=\overline{mn}\ \rightarrow \begin{pmatrix}\text{suma de las edades}\\ \text{de las } P \text{ personas}\end{pmatrix}=\overline{mn}\times P$$

Hallamos el nuevo promedio.

$$\frac{2(\overline{mn}\times P+30P)-10P}{P}=\overline{mn}+63$$

$$\frac{2P(\overline{mn}+30)-10P}{P}=\overline{mn}+63$$

$$2\overline{mn}+60-10=\overline{mn}+63$$

$$\overline{mn}+50=63\ \rightarrow\ \overline{mn}=13$$

$$\therefore\ m\times n=3$$

Problema 10

La $\overline{MG}$ de 20 números es 243 y la $\overline{MG}$ de otros 30 números es 32. ¿Cuál es la $\overline{MG}$ de los 50 números?

Resolución

El primer grupo de números los conforman a_1, a_2, a_3, ..., a_{20} y el segundo grupo de números lo conforman b_1, b_2, b_3, ..., b_{30}.

Por dato tenemos que

- $\sqrt[20]{a_1 \times a_2 \times ... a_{20}} = 243$

  $a_1 \times a_2 \times ... \times a_{20} = 243^{20}$

- $\sqrt[30]{b_1 \times b_2 \times ... \times b_{30}} = 32$

  $b_1 \times b_2 \times ... \times b_{30} = 32^{30}$

Como queremos hallar la $\overline{MG}$ de los 50 números, tendremos:

$$\overline{MG} = \sqrt[50]{a_1 + a_2 \times ... \times a_{20} \times b_1 \times b_2 \times ... \times b_{30}}$$

$$\overline{MG} = \sqrt[50]{243^{20} \times 32^{30}}$$

$$\overline{MG} = \sqrt[50]{(3^5)^{20} \times (2^5)^{30}}$$

$$\overline{MG} = \sqrt[50]{3^{100} \times 2^{150}}$$

$$\therefore \ \overline{MG} = 3^2 \times 2^3 = 72$$

Problema 11

La $\overline{MA}$ y $\overline{MH}$ de dos números enteros se encuentran en la relación de 25 a 16. Halle la diferencia de los números si la suma de ellos es 340.

Resolución

Sean a y b los números.

Por dato tenemos que

- $\dfrac{\overline{MA}(a;\, b)}{\overline{MH}(a;\, b)} = \dfrac{25k}{16k}$

- $a + b = 340$

Por propiedad tenemos que

$$\overline{MA}(a, b) \times \overline{MH}(a, b) = \overline{MG}^2(a, b)$$

$$25k \times 16k = \overline{MG}^2(a, b)$$

$$20k = \overline{MG}(a, b)$$

También por propiedad se cumple lo siguiente:

$$(a - b)^2 = 4(\overline{MA} + \overline{MG})(\overline{MA} - \overline{MG})$$

$$(a - b)^2 = 4(45k)(5k)$$

$$(a - b) = 30k$$

Como $a + b = 340$

$50k = 340$

$\rightarrow \ k = 6{,}8$

$\therefore \ a - b = (30)(6{,}8) = 204$

Problema 12

En una reunión, cinco personas tienen 20 años, siete personas tienen 18 años y ocho personas tienen 22 años. Calcule la edad promedio de dichas personas.

Resolución

Se tienen las edades de las 20 personas:

$$\underbrace{20;\ 20;\ ...;\ 20}_{5\ \text{personas}},\ \underbrace{18;\ 18;\ ...;\ 18}_{7\ \text{personas}},\ \underbrace{22;\ 22;\ ...;\ 22}_{8\ \text{personas}}$$

Calculamos el promedio.

$$\overline{MA} = \frac{20(5) + 18(7) + 20(8)}{20}$$

$$\overline{MA} = \frac{100 + 126 + 176}{20}$$

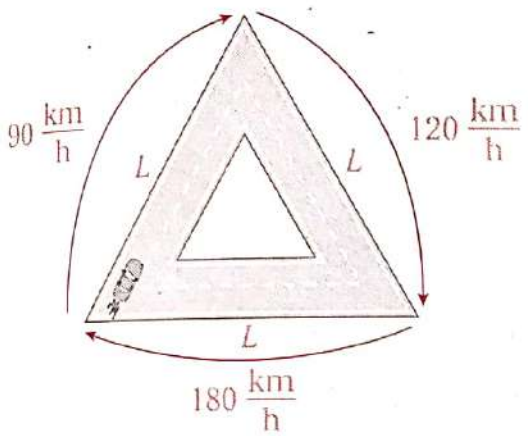
$$\therefore \ \overline{MA} = 20{,}1$$

Problema 13

Una pista tiene la forma de un triángulo equilátero. Un auto recorre sus tres lados con velocidades de 90 km/h, 120 km/h y 180 km/h. Halle la velocidad promedio del auto.

Resolución

Por condición tenemos



Sabemos que

$$V_P = \frac{\text{distancia total}}{\text{tiempo total}}$$

Reemplazamos.

$$V_P = \frac{L+L+L}{\frac{L}{90}+\frac{L}{120}+\frac{L}{180}}$$

$$V_P = \frac{3L}{\frac{4L+3L+2L}{360}}$$

$$V_P = \frac{3(360)}{9}$$

$\therefore\ V_P = 120$

Problema 14

La $\overline{MA}$ de 11 números impares de dos cifras es 21; la $\overline{MA}$ de otros 19 impares, también de dos cifras, es 51. Determine el promedio de los impares de dos cifras no considerados.

Resolución

Ya que nos referimos a los impares de dos cifras, veamos cuántos impares de dos cifras existen (numeración).

$\overline{a\ b}$ $\quad$ b: impar

a	b
1	1
2	3
3	5
⋮	7
8	9
9	

$\overline{9\times 5} = 45$ numerales

Los impares de dos cifras son 45, de los cuales podemos hallar su suma, ya que sabemos que

$$\underbrace{11;\ 13;\ 15;\ 17;\ \ldots;\ 91;\ 93;\ 95;\ 97;\ 99}_{\text{45 impares de dos cifras}}$$

forman una PA de razón 2.

Luego, la suma será

$$S=\left(\frac{11+99}{2}\right)\times 45$$

$$S=2475$$

Del enunciado del problema tenemos

Cantidad de números	11	19
Promedio	21	51

En total se han considerado 30 números, pero como, en total, son 45, faltarían 15 números, de los cuales nos piden su promedio $(\bar{x})$.

Así tendremos

Cantidad de números	11	19	15
Promedio	21	51	$\bar{x}$

La suma del total de números es

$$2475=11(21)+19(51)+15\bar{x}$$

$$2475=231+969+15\bar{x}$$

$$1275=15\bar{x}$$

$$85=\bar{x}$$

$\therefore\ \bar{x}=85$ (promedio de los no considerados)

Problema 15

Si la $\overline{MG}$ de un número de dos cifras y otro de tres cifras es a la $\overline{MA}$ de dichos números como 4 es a 5, respectivamente, calcule la diferencia de ambos números que son los mayores posibles.

Resolución

Sean

- N: número de dos cifras
- M: número de tres cifras

Por dato tenemos que

$$\frac{\overline{MG}(N;M)}{\overline{MA}(N;M)}=\frac{4}{5}$$

De ahí

$$\frac{\sqrt{M\times N}}{\frac{M+N}{2}}=\frac{4}{5}$$

Luego,

$$\frac{2\sqrt{M\times N}}{M+N}=\frac{4}{5}$$

$$\frac{\sqrt{M\times N}}{M+N}=\frac{2}{5}$$

$\rightarrow\ \sqrt{M\times N}=2K$ y $M+N=5K$

De lo anterior,

$$\underset{K}{N}\times\underset{4K}{M}=4K^2 \qquad \underset{4K}{M}+\underset{K}{N}=5K$$

Pero como N es de dos cifras y M de tres cifras, sabemos que

$$10\leq N\leq 99\ \wedge\ 100\leq M\leq 999$$

$$10\leq K\leq 99\ \wedge\ 100\leq 4K\leq 999$$

$$10\leq K\leq 99\ \wedge\ 25\leq K\leq 249{,}75 \quad \div 4$$

De ambos intervalos escogemos el mayor valor de K, ya que queremos que los números sean los mayores posibles.

Luego,

$$K_{\text{máx}}=99$$

Reemplazamos.

$$N=99\ \wedge\ M=4(99)=396$$

Nos piden $M-N$.

$$\therefore\ M-N=396-99=297$$

Problema 16

El promedio armónico de 20 números es 3/5; el promedio armónico de otros 30 números diferentes a los anteriores es 9/8. Halle el promedio armónico de los 50 números.

Resolución

Por dato tenemos que

$$\overline{MH}(a_1;a_2;a_3;\ldots;a_{20})=\frac{20}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}}=\frac{3}{5}$$

De ahí

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\frac{1}{a_3}+\ldots+\frac{1}{a_{20}}=\frac{100}{3}$$

También

$$\overline{MH}(b_1;b_2;b_3;\ldots;b_{30})=\frac{30}{\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\ldots+\frac{1}{b_{30}}}$$

$$\overline{MH}(b_1;b_2;b_3;\ldots;b_{30})=\frac{9}{8}$$

Luego,

$$\frac{1}{b_1}+\frac{1}{b_2}+\frac{1}{b_3}+\ldots+\frac{1}{b_{30}}=\frac{80}{3}$$

Nos piden

$$\overline{MH}(a_1; a_2; ...; a_{20}; b_1; b_2; ...; b_{30})$$

Así tendremos lo siguiente:

$$\overline{MH}(a_1; a_2; ... ; a_{20}; b_1; b_2; ...; b_{30}) = \frac{50}{\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+...+\frac{1}{a_{20}}+\frac{1}{b_1}+...+\frac{1}{b_{30}}}$$

Reemplazamos los valores anteriores.

$$\overline{MH}(a_1; a_2; ...; a_{20}; b_1; b_2; ...; b_{30}) = \frac{50}{\frac{100}{3}+\frac{80}{3}}$$

$$\overline{MH}(a_1; a_2; ...; a_{20}; b_1; b_2; ...; b_{30}) = \frac{50}{\frac{180}{3}} = \frac{50}{60}$$

Simplificamos.

$$\therefore\ \overline{MH}(a_1; a_2; ...; a_{20}; b_1; b_2; ...; b_{30}) = \frac{5}{6}$$

Problema 17

La media armónica de los precios de ocho artículos es S/30. ¿Cuál es el precio máximo que puede tener uno de los artículos si ninguno tiene un precio menor de S/28? Considere que los precios de los artículos son enteros.

Resolución

Dado que buscamos saber el mayor precio que puede tener uno de los artículos, todos los demás los vamos a considerar con un precio mínimo. En nuestro caso es S/28, ya que nos dicen que ninguno tiene un precio menor de S/28.

Luego tendremos

$$\overline{MH}(\underbrace{28; 28; 28; ...; 28}_{7\ \text{valores}}; P_{\text{máx}}) = 30$$

donde $P_{\text{máx}}$ es el precio máximo de uno de los artículos.

Es decir,

$$\frac{8}{\underbrace{\frac{1}{28}+\frac{1}{28}+...+\frac{1}{28}}_{7\ \text{veces}}+\frac{1}{P_{\text{máx}}}} = 30$$

$$\frac{8}{\frac{7}{28}+\frac{1}{P_{\text{máx}}}} = 30$$

Simplificamos.

$$\frac{8}{\frac{1}{4}+\frac{1}{P_{\text{máx}}}} = 30$$

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{P_{\text{máx}}} = \frac{8}{30}$$

De ahí que

$$\frac{1}{P_{\text{máx}}} = \frac{8}{30}-\frac{1}{4}$$

$$\frac{1}{P_{\text{máx}}} = \frac{4}{15}-\frac{1}{4}$$

Operamos.

$$\frac{1}{P_{\text{máx}}} = \frac{16-15}{60}$$

$$\frac{1}{P_{\text{máx}}} = \frac{1}{60}$$

$$\therefore\ P_{\text{máx}} = \text{S/}60$$

Problema 18

El mayor promedio de dos números es 156 y el promedio geométrico de los mismos números es 60. Halle la diferencia de los números.

Resolución

Sean a y b los números; además, $a>b$.

Por datos tenemos que

- $\overline{MA}(a; b) = 156$
- $\overline{MG}(a, b) = 60$

Como tenemos la $\overline{MA}$ y $\overline{MG}$ de los números y nos piden la diferencia de los números, esta se puede hallar con la siguiente propiedad:

$$(a-b)^2=4(\overline{MA}+\overline{MG})(\overline{MA}-\overline{MG})$$

$$(a-b)^2=4(156+60)(156-60)$$

$$(a-b)^2=4(216)(96)$$

$$(a-b)^2=2^2(2^3\times 3^3)(2^5\times 3)$$

$$(a-b)^2=2^{10}\times 3^4$$

$$a-b=2^5\times 3^2$$

$$\therefore\ a-b=288$$

Problema 19

Si sabemos que

- $\overline{MH}(x;y)=6$
- $\overline{MH}(y;z)=4$
- $\overline{MH}(x;z)=8$

determine la media armónica de x; y; z.

Resolución

Por dato:

- $\overline{MH}(x;6)=6$

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}}=6 \rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{3} \qquad \text{(I)}$$

- $\overline{MH}(y;z)=4$

$$\frac{2}{\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=4 \rightarrow \frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{1}{2} \qquad \text{(II)}$$

- $\overline{MH}(x;z)=8$

$$\frac{2}{\frac{1}{x}+\frac{1}{z}}=8 \rightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{z}=\frac{1}{4} \qquad \text{(III)}$$

Sumamos (I), (II) y (III).

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{1}{3}+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}$$

$$2\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}\right)=\frac{4+6+3}{12}$$

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=\frac{13}{24}$$

Nos piden

$$\overline{MH}(x;y;z)=\frac{3}{\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}}=\frac{\frac{3}{1}}{\frac{13}{24}}$$

$$\therefore\ \overline{MH}(x;y;z)=\frac{3\times 24}{1\times 13}=\frac{72}{13}$$

Problema 20

Demuestre que $n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$.

Resolución

Tengamos presente que

$$n!=1\times 2\times 3\times 4\times\ldots\times n$$

$$1+2+3+4+\ldots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

Por las propiedades de promedios sabemos que $\overline{MG}<\overline{MA}$ (para números no todos iguales)

Es decir,

$$\overline{MG}(1;2;3;\ldots;n)<\overline{MA}(1;2;3;\ldots;n)$$

Luego,

$$\sqrt[n]{1\times 2\times 3\times\ldots\times n}<\frac{1+2+3+\ldots+n}{n}$$

De ahí

$$\sqrt[n]{n!}<\frac{n(n+1)}{2n}$$

Simplificamos y elevamos al exponente n.

$$\therefore\ n!<\left(\frac{n+1}{2}\right)^n$$

Test

1. Calcule la $\overline{MA}$ de 12; 17 y 22.

A) 16 B) 17 C) 17,5
D) 16,5 E) 18

2. Calcule la $\overline{MG}$ de 40 y 90.

A) 52 B) 54 C) 60
D) 64 E) 63

3. Calcule la $\overline{MH}$ de 3 y 6.

A) 4 B) 4,2 C) 4,5
D) 4,8 E) 5

4. Si la $\overline{MA}$ de dos números es 30 y la $\overline{MA}$ de otros tres números es 20, calcule la $\overline{MA}$ de los cinco números.

A) 23 B) 24 C) 25
D) 26 E) 27

5. Si la $\overline{MA}$ de dos números es 25 y el producto de dichos números es 600, calcule la diferencia de dichos números.

A) 5 B) 8 C) 10
D) 12 E) 15

6. Si la $\overline{MH}$ de dos números consecutivos es $4,\widehat{4}$, halle la suma de dichos números.

A) 7 B) 9 C) 11
D) 13 E) 15

7. Juan va en auto de su casa a su centro de trabajo a 20 km/h y regresa con una velocidad de 30 km/h. Calcule la velocidad promedio en todo su recorrido.

A) 24,6 km/h
B) 24,2 km/h
C) 24,5 km/h
D) 24 km/h
E) 25 km/h

8. Si dos números están en la relación de 9 a 4, ¿en qué relación estarán su $\overline{MA}$ y su $\overline{MG}$?

A) $\frac{13}{5}$ B) $\frac{13}{2}$ C) $\frac{13}{6}$
D) $\frac{13}{4}$ E) $\frac{13}{12}$

9. Calcule la suma de la $\overline{MA}$ de 7; 9 y 17 más la $\overline{MG}$ de 24 y 54.

A) 44 B) 45 C) 46
D) 47 E) 48

10. Si a 20 números le aumentamos 9 unidades a cada uno y a otros 30 números le disminuimos 1 unidad a cada uno, en cuánto varía el promedio de los 50 números.

A) 3 B) 2,5 C) 2
D) 1,5 E) 1

Claves

1 B 2 C 3 A 4 B 5 C 6 B 7 D 8 E 9 D 10 A

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Un equipo de basquet está compuesto por 8 jugadores. Si la edad promedio de los 5 titulares es 23 años y la de los suplentes es 19 años, halle la edad promedio del equipo.

A) 20,6 B) 22,7 C) 22
D) 21,5 E) 21,8

2. En una universidad particular, el pago mensual que realizan los estudiantes está dividido en categorías, tal como se muestra en la tabla. Halle el pago mensual promedio.

Categoría	Número de alumnos	Pago mensual
A	50	S/1200
B	90	S/1000
C	60	S/800

A) S/1000
B) S/980
C) S/1100
D) S/1050
E) S/990

3. En un salón de 50 alumnos, estos obtuvieron, en su último examen, un promedio de *P*. Sin embargo, si el profesor aumentará 3 puntos en su examen a cierta cantidad de alumnos, y al resto 2 puntos a cada uno, entonces el promedio aumentaría en 2,4 puntos. Halle a cuántos alumnos aumentó 3 puntos.

A) 10 B) 15 C) 20
D) 30 E) 40

4. El mayor promedio de dos números es 25 y su menor promedio es 16. Calcule el mayor de los números.

A) 45 B) 36 C) 40
D) 32 E) 35

5. La $\overline{MA}$ de 30 números es *N*. Si a los 10 primeros números les aumentamos cinco unidades, al resto les disminuimos en una unidad y nuevamente calculamos la $\overline{MA}$, ¿qué es lo que sucede con dicho promedio?

A) No varía.
B) Aumenta en 2.
C) Aumenta en 1.
D) Disminuye en 1.
E) Disminuye en 2.

6. La diferencia de dos números enteros es 36. Si la suma de la media aritmética y la media geométrica es 162, halle la $\overline{MA}$ de dichos números.

A) 48 B) 85 C) 82
D) 120 E) 162

7. A una fiesta asistieron 120 personas. Si cada varón tuviera cuatro años más y cada mujer un año menos, la edad promedio no varía. ¿En cuánto variará la edad promedio si cada varón tuviera un año menos y cada mujer tuviera cuatro años más?

A) Disminuye en 3.
B) Aumenta en 1.
C) Aumenta en 3.
D) No se altera.
E) Disminuye en 2.

8. En un colegio se tienen los promedios de notas de tres aulas del 4.° año tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Aula	*A*	*B*	*C*
Promedio	12	14	15

Si las cantidades de alumnos de las aulas *A* y *B* están en la relación de 2 a 3 y las cantidades de los alumnos de las aulas *B* y *C* están en la relación de 6 a 5, halle el promedio general de todas las aulas.

A) 13 B) 13,2 C) 13,8
D) 14 E) 14,5

9. Sean dos números cuya diferencia es 50. Si el producto de su $\overline{MA}$ y $\overline{MH}$ es 3600, halle su $\overline{MA}$.

A) 40 B) 45 C) 55
D) 60 E) 65

10. Se tienen 100 números cuyo promedio es 18,5. A los primeros 20 números se les aumenta tres unidades a cada uno, y a los siguientes 50 números ocho unidades a cada uno. Si a los números restantes se les disminuye dos unidades a cada uno, calcule el nuevo promedio de los números que se obtienen.

A) 20,5 B) 21 C) 21,5
D) 22 E) 22,5

Nivel intermedio

11. El sueldo promedio de 12 trabajadores de una empresa es S/1200. Si ninguno de los trabajadores gana más de S/1250, ¿cuál será el sueldo mínimo que uno de los trabajadores puede tener?

A) S/600 B) S/700 C) S/750
D) S/1000 E) S/650

12. En un aula, si cada varón tuviera 8 años más y cada mujer 3 años menos, el promedio de sus edades aumentaría en 3,6. Si en dicha aula hay 40 estudiantes, calcule la diferencia entre el número de varones y mujeres.

A) 3 B) 4 C) 6
D) 8 E) 12

13. Carolina lleva tres cursos de 6; 5 y 5 créditos, cuyas notas son 15; 12,5 y 12,7, respectivamente. Sara ha llevado cuatro cursos de 2; 3; 2 y x créditos, y ha obtenido como notas 12; 13; 12 y 15, respectivamente, con los cuales sus respectivos promedios ponderados son los mismos. Calcule el valor de x.

A) 5 B) 7 C) 8
D) 10 E) 15

14. En el curso de Matemática I, el examen final tiene un peso doble que el examen parcial y el promedio de prácticas. Si Iván obtuvo un promedio de prácticas de 10,8 y en el examen parcial sacó 8, ¿cuánto será la nota mínima que debe sacar en el examen final? Considere que él quiere aprobar el curso con una nota mayor o igual a 12.

A) 14 B) 15 C) 16
D) 17 E) 18

15. La $\overline{MA}$ y la $\overline{MG}$ de tres números son entre sí como 7 es a 6; además, se sabe que el intermedio es 6 y es la $\overline{MG}$ de los otros dos. Calcule la $\overline{MH}$ de dichos números.

A) 31/7 B) 33/5 C) 35/3
D) 36/7 E) 39/5

16. El promedio de cuatro números es 11 y cuando se les agrupa de 3 en 3 dichos promedios aritméticos son números pares consecutivos. Calcule el menor de los cuatro números.

A) 1 B) 2 C) 4
D) 6 E) 8

17. La media aritmética de 70 números es a y la de otros 30 es 45. Si a cada uno de los números del primer grupo se les agrega 20 y a los números del segundo grupo se les disminuye en 10, el promedio de los 100 números ahora es 52,5. Calcule a.

A) 10 B) 20 C) 30
D) 40 E) 50

18. La $\overline{MH}$ de 50 números es 13 y la $\overline{MH}$ de otros 30 números es 26. Halle la $\overline{MH}$ de todos los números y dé como respuesta la suma de cifras del resultado.

A) 7 B) 16 C) 13
D) 11 E) 9

19. En un aula de la academia Aduni, un profesor observa que 14 de los alumnos tienen 13 años, otros 28 tienen de 15 años y otros 22 tienen 14 años. Calcule la edad promedio de todos los presentes en el aula si el profesor tiene 26 años y contó a todos los alumnos.

A) 14,1 B) 14,4 C) 14,8
D) 15,2 E) 15,5

20. Si el promedio aritmético de 35 números pares consecutivos es 88, calcule el promedio aritmético de los 35 números pares siguientes.

A) 128 B) 158 C) 168
D) 188 E) 208

21. La $\overline{MA}$ y la $\overline{MH}$ de dos números enteros positivos están en la relación de 25 a 16. Si su $\overline{MG}$ es 12, halle su diferencia.

A) 15 B) 16 C) 17
D) 18 E) 19

22. Si se sabe que la $\overline{MH}$ de tres pares consecutivos es 11,775..., halle la suma de cifras del mayor de los números.

A) 3 B) 5 C) 4
D) 2 E) 6

23. Calcule la suma de dos números naturales, de los que su media aritmética y media armónica están en la relación de 25 a 9. Considere que la semisuma de dichas medias excede a la media geométrica en 18.

A) 90 B) 306 C) 220
D) 450 E) 150

24. La nota promedio de un curso (escala vigesimal) se calcula como el promedio ponderado de las notas del primer examen, examen final y el promedio aritmético de prácticas. Para el caso de un alumno de la UNI se tiene la siguiente información:

	1.er examen	Examen final	Promedio de prácticas			
Peso o crédito	2	3	1			
Notas	9	17	n	n	n	x

Se sabe que la nota promedio del curso resultó ser uno menos que el promedio de prácticas, entonces, halle el máximo valor que obtuvo en la cuarta práctica si todas las notas son enteras.

A) 16 B) 17 C) 20
D) 19 E) 18

25. Dentro de cinco años, el promedio de edades de los padres de Ana será 40 años, y el de cuatro primos de Miguel actualmente es de 30,25 años. ¿Cuál será el promedio de todos ellos, incluidos Ana y Miguel, si las edades de estos dos últimos hace 10 años sumaban 30 años?

A) 28,450 B) 29,150 C) 30,125
D) 31,250 E) 32,100

26. Al calcular el promedio geométrico de dos números enteros se observó que este es igual a la raíz cuadrada del triple de la suma de dichos números. Calcule la diferencia de los números si el mayor es dos veces más que el menor de dichos números.

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 12

27. Si la $\overline{MA}$ y la $\overline{MG}$ de dos números pares, cuya suma está comprendida entre 20 y 30, son dos números consecutivos, halle su diferencia.

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 14

28. El promedio de notas en un curso de 40 alumnos es 60; los primeros 5 obtuvieron un promedio de 90, mientras que los últimos 15 obtuvieron 30 de promedio. Si se sabe que de los restantes ninguno superó los 80 puntos, calcule el menor promedio posible que alcanzan cinco alumnos de estos.

A) 60 B) 65 C) 70
D) 75 E) 80

Nivel avanzado

29. Para transportar abarrotes, un camión utiliza normalmente sus 6 llantas para movilizarse 80 km diarios. Cierta semana tuvo que utilizar 2 llantas de repuesto. ¿Cuál es el recorrido semanal promedio de cada llanta?

A) 300 B) 360 C) 400
D) 420 E) 480

30. La $\overline{MA}$ de los n primeros números pares es 23. Calcule la media aritmética de los n siguientes números impares.

A) 58 B) 60 C) 62
D) 64 E) 66

31. Luis compró 50 acciones de una compañía a S/600 cada una; 2 meses más tarde compró 25 acciones más a S/560 cada una. ¿A qué precio deberá comprar 25 acciones adicionales para tener un promedio de S/580 por acción?

A) S/530 B) S/540 C) S/550
D) S/560 E) S/570

32. La diferencia entre el mayor y menor promedio de dos números enteros positivos es igual a la quinta parte de la diferencia de dichos enteros. Calcule la razón en que se encuentran dichos enteros.

A) 7 a 4 B) 3 a 2 C) 5 a 3
D) 5 a 2 E) 7 a 3

33. La $\overline{MH}$ de tres números enteros es 72/11. Su $\overline{MA}$ es 8 y su $\overline{MG}$ es igual a uno de los números pero multiplicado por la raíz cúbica de 6. Calcule el mayor de los números.

A) 12 B) 13 C) 15
D) 17 E) 18

34. El promedio aritmético de n números es $3n/2$. Si se aumenta a dichos números 1; 2; 3; 4;..., respectivamente, halle el promedio aritmético de los números resultantes.

A) $2n+3$ B) $\frac{4n+3}{2}$ C) $3n^2+4n$
D) $\frac{4n+1}{2}$ E) $\frac{3n^2+1}{2}$

35. Respecto a los siguientes enunciados, indique el valor de verdad (V) o falsedad (F).

I. El promedio aritmético de todos los números positivos de dos cifras es igual a 54,5.
II. El promedio geométrico de todos los números capicúas de dos cifras es igual a $9\sqrt{11!}$
III. Si para dos números enteros se tiene que $(\overline{MG})^2=5\overline{MH}$, entonces la ecuación tiene cuatro soluciones de números diferentes.

A) VFV B) VVF C) VVV
D) FFV E) FVF

36. En una reunión hay N personas; el promedio de las edades de los que fuman es a años, de los que no fuman es b años y el promedio de todas las personas es P años. ¿Cuántas personas fuman?

A) $\frac{N(a+b)}{8}$
B) $\frac{N(b-P)}{b-a}$
C) $\frac{N(P-b)}{b-a}$
D) $\frac{N(b-P)}{a+b}$
E) $\frac{N(b+P)}{a-b}$

37. El promedio aritmético de 18 números impares diferentes de dos cifras es 35 y el promedio aritmético de otros 12 números impares también de dos cifras es 65. Calcule el promedio aritmético de los números impares de dos cifras no considerados.

A) 49 B) 55 C) 61
D) 67 E) 71

38. Durante cuatro meses consecutivos una madre de familia compró pan para el desayuno a los precios respectivos de 48; 100; 80 y 240 unidades monetarias. Si cada mes gastó 3600 unidades monetarias en la compra de pan, calcule, aproximadamente, el costo promedio del pan para estos cuatro meses.

A) 72,8 B) 85,4 C) 87,1
D) 84,2 E) 99,2

39. Una familia compuesta por papá, mamá y tres hijos presenta las siguientes características:

I. Las edades de sus 3 hijos son 3 números impares consecutivos, y su promedio geométrico es 11,8...
II. El promedio de edades de los padres es 38.

Halle el promedio de edades de toda la familia.

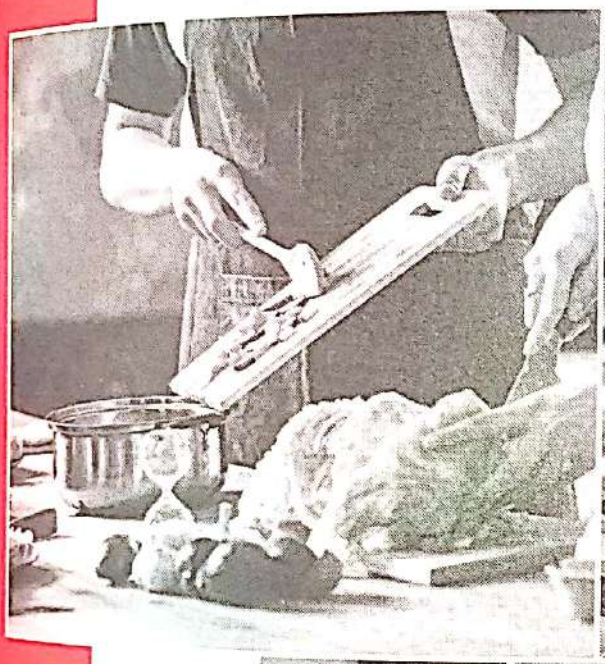
A) 19 años B) 21 años C) 23 años
D) 25 años E) 29 años

40. La $\overline{MH}$ de tres números es 48/7 y la $\overline{MG}$ es igual a uno de los números. Halle la suma de los dos mayores números si la $\overline{MA}$ de los números es igual a seis veces más que el menor de los números.

A) 24 B) 48 C) 60
D) 72 E) 90

Capítulo

XVIII



Regla de mezcla

Juan Esqueche Paiconcial

CAPÍTULO XVIII

REGLA DE MEZCLA

Objetivos

- Reconocer las sustancias que forman parte de una mezcla o aleación.
- Aprender a determinar el precio medio, grado medio o ley media de una mezcla, ya sea de ingredientes o de metales, para luego calcular el precio de venta de una mezcla considerando su ganancia respectiva.
- Aprender a determinar las cantidades de metal fino que intervienen en una aleación y el costo de dicha aleación.

Introducción

Para elaborar una torta, los ingredientes utilizados (harina, huevos, azúcar, polvo de hornear) deben mezclarse en cantidades adecuadas y proporcionales a ciertos números. En la elaboración de un medicamento, los componentes deben mezclarse en cierta proporción, de tal manera que se logren los efectos deseados según sea la dosis especificada. Y un comerciante, para la venta más rápida de sus artículos, mezclará dos calidades distintas de un producto, de esta manera puede ofrecer una opción intermedia (en cuanto a precio y calidad), la cual será más accesible al público consumidor.

Para fabricar varillas de construcción es necesario que el material usado sea resistente y que tenga elasticidad, ello se conseguirá utilizando las cantidades adecuadas de los metales a fundir. Existen varias aleaciones que son utilizadas para la elaboración de cubiertos, platos recordatorios, medallas, acuñación de monedas, escudos, repuestos de automóviles, etc. Un ejemplo de aleación es el acero, que es la mezcla de hierro con pequeñas cantidades de carbono.

Como se puede observar, la aplicación del tema de regla de mezcla es muy cotidiana dentro de las actividades comerciales, como también en las actividades industriales, en nuestro entorno y para facilitar la venta directa de productos (fideos, arroz, menestras, cereales, etc.).

Desde el punto de vista de la aritmética, el estudio de la regla de mezcla comprende la identificación de las cantidades que componen una mezcla homogénea en sus diferentes calidades. Para ello estudiaremos las técnicas básicas para determinar el costo unitario de cada componente y su relación con los pesos que intervienen en ella.

1 ▸ DEFINICIÓN

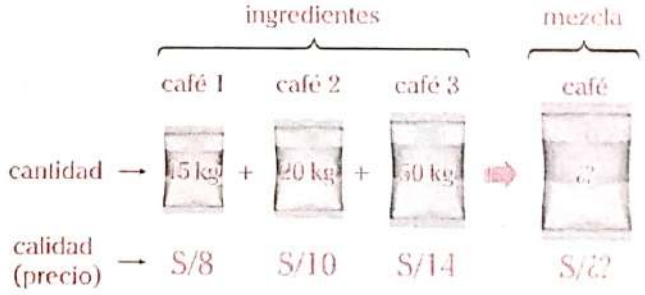
La regla de mezcla es un conjunto de procedimientos aritméticos que permiten determinar el precio de costo de una unidad de medida de la mezcla, o la proporción en la que deben mezclarse las sustancias para obtener cierto costo.

2 ▸ MEZCLA

Es la agregación de dos o más sustancias (ingredientes) en cantidades arbitrarias, de tal modo que estas conservan su naturaleza (mezcla homogénea).

Ejemplo

Veamos una mezcla de café.



En la mezcla se cumple que la cantidad es arbitraria en cada ingrediente y se expresa en el peso (kilos, gramos, etc.) o en el volumen (m^3, dm^3, litros, etc.).

Además,

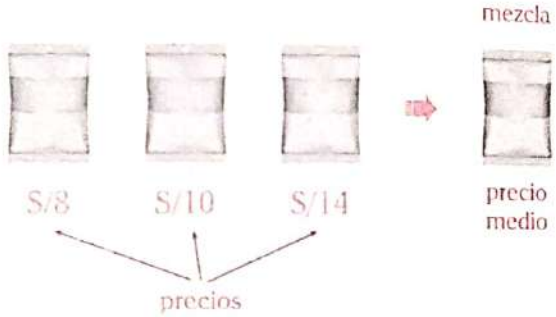
$$\left(\text{suma de las cantidades de ingredientes}\right) = \left(\text{cantidad de la mezcla}\right)$$

En el ejemplo,

$$15\text{ kg}+20\text{ kg}+50\text{ kg}=\underbrace{85\text{ kg}}_{\text{cantidad de la mezcla}}$$

Por otro lado, en la mezcla, la calidad diferencia a un ingrediente respecto de otro, y puede ser expresado a través del precio, concentración, pureza, etc.

En el ejemplo,



2.1. PRECIO MEDIO (P_m)

Es el precio de costo por unidad de mezcla. Este precio no genera ganancia ni pérdida, por ello también recibe el nombre de **precio de equilibrio**.

Aplicación 1

Un comerciante efectúa el siguiente pedido a un distribuidor mayorista de café:

Café	Cantidad en kg	Precio por kg
corriente	15	S/8
superior	20	S/10
extra	50	S/14

Para la venta a sus clientes, el comerciante mezcla los tres tipos de café.

I. ¿Cuál debe ser el precio por kilogramo de la mezcla para recuperar lo invertido (no hay ganancia ni pérdida)?

II. ¿A cuánto debe vender el kilogramo de la mezcla para ganar el 25 %?

III. ¿Qué conclusiones podemos obtener respecto al precio medio?

Resolución

I. Ya que solo se quiere recuperar la inversión, es decir, sin que se gane o se pierda, entonces debemos calcular el precio medio de la mezcla.

Comencemos calculando el costo total de la mezcla.

cantidades (kg) →	50	20	15
precios por kg →	S/14	S/10	S/8
costos parciales →	700	200	120

Luego,

- inversión total=700+200+120=S/1020
- peso total=50+20+15=85 kg

→ costo por 1 kg de mezcla$=\dfrac{1020}{85}$=S/12

∴ P_m=S/12

Observamos que para determinar el precio medio (P_m), se tendrá en cuenta que

$$P_m=\frac{\text{inversión total}}{\text{cantidad total}}$$

En general, sean las cantidades de ingredientes con sus respectivos precios:

Cantidad	Precio
C_1	P_1
C_2	P_2
C_3	P_3
⋮	⋮
C_K	P_K

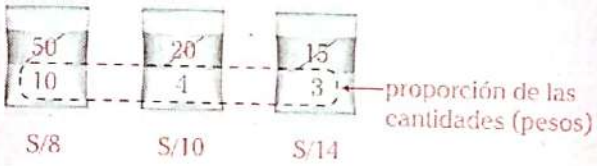
para calcular el precio medio o promedio ponderado de precios (P_m), se utiliza la siguiente expresión:

$$P_m=\frac{C_1P_1+C_2P_2+C_3P_3+...+C_KP_K}{C_1+C_2+C_3+...+C_K}$$

Nota

Para calcular el precio medio en unidades monetarias, se pueden operar las cantidades de manera proporcional, mas esto no se puede hacer con los precios.

Ejemplo



$$\rightarrow\ P_m=\frac{10\times8+4\times10+3\times14}{17}=\text{S/12}$$

II. Recordemos que

$$P_V=P_C+G$$

donde

- P_V: precio de venta
- P_C: precio de costo
- G: ganancia

En el caso de una mezcla, el precio de costo es el precio medio (P_m).

Así tenemos

$$P_V=P_m+G$$

Luego, el precio de venta para ganar el 25% se calcula como

$$P_V=12+25\%(12)$$

$$P_V=12+\frac{1}{4}(12)$$

$$P_V=\text{S/15}$$

Por lo tanto, el precio de venta de un kilogramo de la mezcla es de S/15.

III. Veamos lo que sucede al comparar el precio medio con los precios iniciales.

	50 kg	20 kg	15 kg
precio por kilogramo →	S/14	S/10	S/8
precio medio →	S/12	S/12	S/12
por 1 kg →	pierde S/2	gana S/2	gana S/4

Hacemos un balance.

$$\underbrace{\overset{\text{pérdida aparente}}{50(S/2)}}_{S/100} = \underbrace{\overset{\text{ganancia aparente}}{20(S/2)+15(S/4)}}_{S/100}$$

Se dice que la pérdida y ganancia son aparentes porque se compensan.

Respecto al precio medio (P_m) se cumple que

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}}$$

Además,

$$\boxed{\text{precio menor} < P_m < \text{precio mayor}}$$

En la aplicación

$$S/8 < S/12 < S/14$$

Esto se debe a que el P_m es un promedio (promedio ponderado de los precios).

Nota

Cuando en los problemas solo se menciona el precio de la mezcla, consideraremos que se trata del precio medio, ya que no se dice si hay ganancia o pérdida.

Observación 1

Cuando solo se tienen dos ingredientes, se puede determinar la relación de las cantidades de los mismos conociendo el costo por unidad de mezcla de cada ingrediente, así como el precio medio de dicha mezcla.

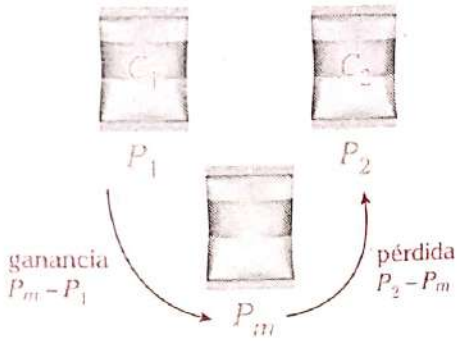
Veamos.

Cantidad	Precio	Precio medio
C_1	P_1	P_m
C_2	P_2	

donde

$$P_1 < P_m < P_2$$

Considerando la ganancia y pérdida aparente se observa lo siguiente:



Luego,

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$C_1(P_m - P_1) = C_2(P_2 - P_m)$$

Finalmente, se tiene lo siguiente:

$$\boxed{\frac{C_1}{C_2} = \frac{P_2 - P_m}{P_m - P_1}} \quad \begin{pmatrix}\text{relación}\\ \text{inversa}\end{pmatrix}$$

relación de las cantidades

relación entre los precios que se pierden y se ganan

Aplicación 2

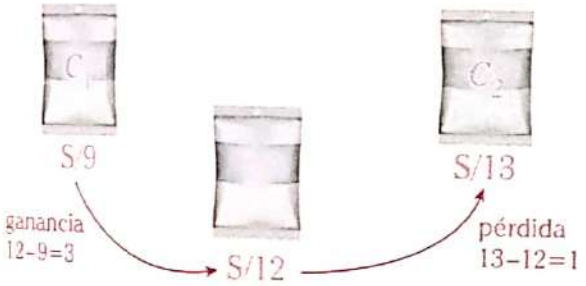
Iván tiene 60 kg de café por un valor de S/720. Si se sabe que dicho café es la mezcla de dos tipos diferentes, cuyos precios son S/9 y S/13 por kilogramo, ¿qué cantidades de cada uno utilizó?

Resolución

Como se tiene 60 kg por un valor de S/720, entonces el valor de cada kilogramo es

$$\frac{720}{60}=S/12$$

Luego,



Aplicamos la relación inversa.

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{1}{3} \rightarrow C_1=k;\ C_2=3k$$

Como $C_1+C_2=60$

$\rightarrow k+3k=60$

$k=15 \rightarrow C_1=15$ y $C_2=45$

Por lo tanto, del café de S/9 hay 15 kg y del café de S/13 hay 45 kg.

Observación 2

¿Qué sucede cuando se mezclan ingredientes de diferente calidad (diferente precio) pero en la misma proporción?

Ejemplo

	Café de tipo A (precio por kg: S/10)	Café de tipo B (precio por kg: S/5)
Mezcla 1	2 kg	3 kg
Mezcla 2	10 kg	15 kg
Mezcla 3	40 kg	60 kg

Hallemos ahora el precio medio (P_m) de cada mezcla.

$$P_{m\ (\text{mezcla 1})}=\frac{2(10)+3(5)}{5}=\frac{35}{5}=S/7$$

$$P_{m\ (\text{mezcla 2})}=\frac{10(10)+15(5)}{25}=\frac{175}{25}=S/7$$

$$P_{m\ (\text{mezcla 3})}=\frac{40(10)+60(5)}{100}=\frac{700}{100}=S/7$$

Se observa que los precios medios son iguales.

Importante

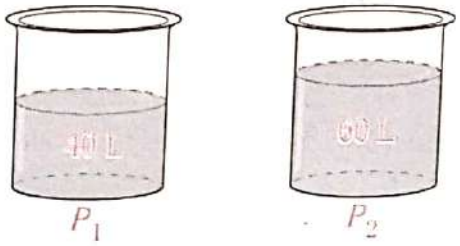
Para que dos mezclas tengan la misma calidad, las relaciones de sus ingredientes deben ser la misma, es decir, sus ingredientes (en cantidad) deben encontrarse en la misma proporción.

Aplicación 3

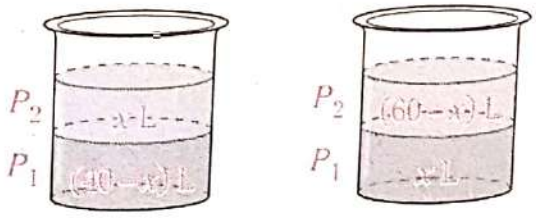
Se tienen 40 litros de un vino, cuyo precio por litro es P_1, y 60 litros de otro vino, cuyo precio por litro es P_2 ($P_1 \neq P_2$). ¿Cuántos litros deben intercambiarse de tal manera que ambos tipos de vino resulten de la misma calidad?

Resolución

Se tiene



Al intercambiar x litros, se tiene



Para que ambas mezclas tengan la misma calidad, sus ingredientes deben estar en la misma relación (teniendo en cuenta las cantidades por precio en forma ordenada y similar para ambos).

Entonces

$$\frac{x}{40-x}=\frac{60-x}{x}$$

Sumamos antecedentes y consecuentes.

$$\frac{x}{40-x}=\frac{60-x}{x}=\frac{60}{40}=\frac{3}{2}$$

Luego,

$$\frac{60-x}{x}=\frac{3}{2} \rightarrow 120-2x=3x$$

$$x=24 \text{ L}$$

Por lo tanto, se deben intercambiar 24 L.

Observación 3

Si la cantidad por cada ingrediente es la misma, el precio medio será la $\overline{MA}$ de los precios.

$$P_m=\frac{P_1+P_2+P_3+...+P_k}{k}$$

donde k es el total de ingredientes que se mezclan.

Demostración

Se tienen las cantidades y precios de los ingredientes de una mezcla:

Cantidad	Precio
C	P_1
C	P_2
C	P_3
$\vdots$	$\vdots$
C	P_k

donde todas las cantidades son iguales.

Calculemos el precio medio (P_m).

$$P_m=\frac{CP_1+CP_2+CP_3+...+CP_k}{\underbrace{C+C+C+...+C}_{k \text{ veces}}}$$

$$P_m=\frac{\cancel{C}(P_1+P_2+P_3+...+P_k)}{\cancel{C}k}$$

$$P_m=\frac{P_1+P_2+P_3+...+P_k}{k}$$

$$\therefore \quad P_m=\overline{MA}(P_1;\ P_2;\ P_3;\ ...;\ P_k)$$

Si las cantidades de cada ingrediente de una mezcla son iguales, se tiene que

$$P_m=\overline{MA}(P_1;\ P_2;\ P_3;\ ...;\ P_k)$$

donde

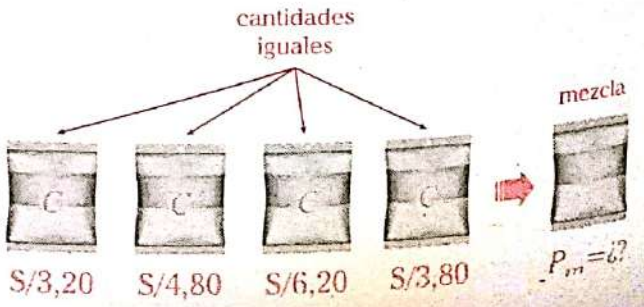
- P_1; P_2; ...; P_k: precios por unidad de mezcla de cada ingrediente
- k: cantidad de ingredientes

Aplicación 4

Un comerciante mezcla 4 clases de arroz en igual cantidad, cuyos precios son S/3,20; S/4,80; S/6,20 y S/3,80. Determine el precio medio de la mezcla.

Resolución

Graficamos.



Luego,

$$P_m = \overline{MA}\ (3{,}20;\ 4{,}80;\ 6{,}20;\ 3{,}80)$$

$$P_m = \frac{3{,}20+4{,}80+6{,}20+3{,}80}{4}$$

$$\therefore\ P_m = S/4{,}50$$

Nota

Para 2 ingredientes, cuando se tiene por dato los precios de estos ingredientes y el precio medio; y el P_m es igual a la $\overline{MA}$ de los precios de los dos ingredientes, se cumple que las cantidades son iguales.

Esto no se cumple cuando se mezclan más ingredientes (de 3 a más).

Aplicación 5

Un comerciante mezcla dos tipos de avena, una le cuesta S/1,8 el kilogramo y la otra le cuesta S/2,4 el kilogramo. Si se venden 60 kg de esta mezcla por S/144,9, con una ganancia del 15%, ¿qué cantidad de avena de cada tipo tiene la mezcla?

Resolución

Como sabemos el precio de venta, calculemos el precio de costo (precio medio).

$$P_V = P_C + \text{ganancia}$$

$$P_V = P_C + 15\%P_C$$

$$144{,}9 = 115\%P_C$$

$$P_C = S/126$$

Entonces S/126 es el costo de 60 kg de la mezcla.

Luego, el costo de cada kilogramo es

$$P_m = \frac{126}{60} = S/2{,}1$$

Tenemos lo siguiente:

Cantidad	Precio	Precio medio
C_1	S/1,8	S/2,1
C_2	S/2,4	

Observamos que

$$2{,}1 = \frac{1{,}8+2{,}4}{2} = \frac{4{,}2}{2}$$

Es decir, el P_m es la $\overline{MA}$ de los precios, lo cual significa que las cantidades son iguales, ya que se trata de dos ingredientes, pues esto no se cumpliría si fueran más de dos ingredientes.

$$\rightarrow\ C_1 = C_2$$

Como

$$C_1 + C_2 = 60$$

$$\rightarrow\ C_1 = 30\text{ kg}\ \text{ y }\ C_2 = 30\text{ kg}$$

Por lo tanto, se tiene 30 kg de cada tipo de avena en la mezcla.

Observación 4

Cuando las cantidades de cada ingrediente son IP a sus precios, el precio medio será la $\overline{MH}$ de los precios respectivos.

$$P_m = \frac{n}{\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_3}+\ldots+\frac{1}{P_n}}$$

donde n es el total de ingrediente que se mezclan.

Demostración

Sean las cantidades y precios.

Cantidad	Precio
C_1	P_1
C_2	P_2
C_3	P_3
$\vdots$	$\vdots$
C_k	P_n

Por condición, las cantidades son IP a los precios, es decir

$$C_1P_1=C_2P_2=C_3P_3=...=C_nP_n=K$$

Se puede observar que

$$C_1=\frac{K}{P_1};\ C_2=\frac{K}{P_2};\ C_3=\frac{K}{P_3};\ ...;\ C_n=\frac{K}{P_n}$$

Ahora hallemos el precio medio.

$$P_m=\frac{C_1P_1+C_2P_2+C_3P_3+...+C_nP_n}{C_1+C_2+C_3+...+C_n}$$

De lo anterior

$$P_m=\frac{\overbrace{K+K+K+...+K}^{n\text{ veces}}}{\frac{K}{P_1}+\frac{K}{P_2}+\frac{K}{P_3}+...+\frac{K}{P_n}}$$

Luego tendremos

$$P_m=\frac{n\cancel{K}}{\cancel{K}\left(\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_3}+...+\frac{1}{P_n}\right)}$$

Simplificamos K.

$$P_m=\frac{n}{\frac{1}{P_1}+\frac{1}{P_2}+\frac{1}{P_3}+...+\frac{1}{P_n}}$$

Es decir

$$P_m=\overline{MH}(P_1;\ P_2;\ P_3;\ ...;\ P_n)$$

Por lo tanto, si las cantidades son IP a los precios unitarios de cada ingrediente, se cumple que

$$\boxed{P_m=\overline{MH}(P_1;\ P_2;\ P_3;\ ...;\ P_n)}$$

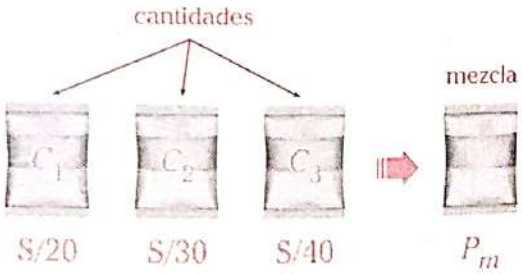
donde $P_1;\ P_2;\ P_3;\ ...;\ P_n$ son los precios por unidad de mezcla de cada ingrediente.

Aplicación 6

Se mezclan 3 tipos de arroz, cuyos precios por kilo son S/20; S/30 y S/40, en cantidades inversas a sus precios. Halle el precio medio aproximado de la mezcla.

Resolución

Graficamos.



Ya que las cantidades son inversas a los precios, se cumple que

$$P_m=\overline{MH}(20;\ 30;\ 40)$$

$$P_m=\frac{3}{\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\frac{1}{40}}$$

$$P_m=\frac{3}{\frac{6}{120}+\frac{4}{120}+\frac{3}{120}}$$

$$P_m=\frac{3}{\frac{13}{120}}=27{,}692...$$

Por lo tanto, el precio medio aproximado es S/27,69.

Aplicación 7

Un comerciante compró 50 kg de café crudo a S/8 el kilogramo. Para venderlo, lo tuesta y luego observa que el café perdió el 20 % de su peso. ¿A cómo debe vender el kilogramo de la mezcla si desea ganar el 30 %?

Resolución

Como se desea ganar el 30 %, al final de la venta se debe obtener

$$130\%(50\times 8) \text{ soles}$$

Además, la cantidad de café que se va a vender no es 50 kg, ya que en el tostado el café pierde el 20 % de su peso, por lo que solo quedaría para la venta

$$80\%(50) \text{ kg}$$

Como queremos el precio de venta por kilogramo, asumimos como P al precio de venta por kilogramo de mezcla.

$$\rightarrow \overbrace{80\%(50)}^{\text{peso al final}}\times P=\overbrace{130\%(50\times 8)}^{\text{monto total que se desea obtener}}$$

$$P=13$$

Por lo tanto, el kilogramo se debe vender a S/13.

Aplicación 8

Un inescrupuloso vendedor ambulante mezcla agua con vinos de S/6 y S/5 el litro, y luego vende el nuevo producto a S/5,5 el litro. Halle la relación entre los volúmenes de vino si la cantidad de agua utilizada es el 20 % de la cantidad del vino de S/5.

Resolución

Sea la cantidad de vino de S/5 igual a $5K$. Como la cantidad de agua es el 20 % de la cantidad de vino de S/5, entonces la cantidad de agua será

$$20\%(5K)=K$$

Para la mezcla se considerará cero soles el precio del agua.

De esta manera se tiene que

Cantidad	Precio	Precio medio
V_1	S/6	pierde
$5K$	S/5	gana S/5,5
K (agua)	S/0	gana

Por ganancia y pérdida,

$$\overbrace{0{,}5(5K)+5{,}5(K)}^{\text{ganancia aparente}}=\overbrace{0{,}5(V_1)}^{\text{pérdida aparente}}$$

Multiplicamos por 10.

$$25K+55K=5V_1$$

$$V_1=16K$$

La relación entre los volúmenes de vino será

$$\frac{V_1}{5K}=\frac{16K}{5K}=\frac{16}{5}$$

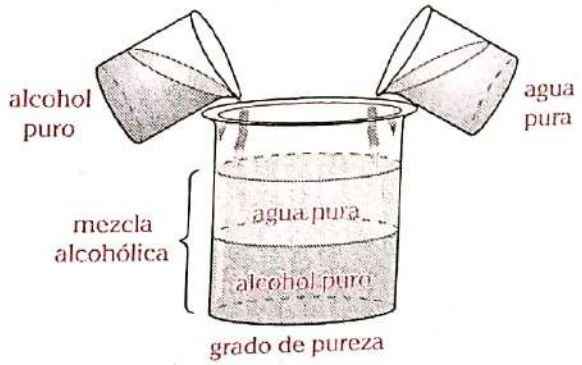
Por lo tanto, la relación será de 16 a 5.

3 ▸ Mezcla alcohólica

Es aquella mezcla en la que intervienen alcohol puro y agua, o en la que los ingredientes contienen cierta cantidad de alcohol puro.

Ejemplos

- Mezcla alcohólica en un recipiente



- Mezcla alcohólica en 2 o más recipientes

A continuación, analizaremos el grado de pureza de un alcohol y el grado medio.

3.1. GRADO O PUREZA DE UN ALCOHOL (°)

Es el tanto por ciento de alcohol puro que contiene una mezcla alcohólica; también se le denominan concentración.

Aplicación 9

Se tiene un recipiente *A* con 30 L de agua y un recipiente *B* con 20 L de alcohol puro. Determine lo siguiente:

I. el grado de pureza en el recipiente *A*

II. el grado de pureza en el recipiente *B*

III. el grado de pureza si se mezclan los contenidos de los recipientes *A* y *B*

Resolución

I. En el recipiente *A*

$$\left(\begin{matrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{matrix}\right)=\frac{0}{30}\times 100\%=0\%$$

(tanto por ciento de alcohol puro)

Se observa que solo hay agua, es decir, la cantidad de alcohol puro es 0 L.

grado de agua <> 0°

II. En el recipiente B solo hay alcohol puro.

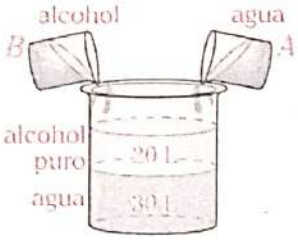
$$\left(\begin{matrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{matrix}\right)=\frac{20}{20}\times 100\%=100\%$$

(tanto por ciento de alcohol puro)

Se tendrá que

grado de alcohol puro <> 100°

III. En la mezcla de *A* y *B*, se tiene que



$$\left(\begin{matrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{matrix}\right)=\frac{20}{50}\times 100\%=40\%$$

(tanto por ciento de alcohol puro)

También se puede escribir 40° en vez de 40%.

Observación

Tenga en cuenta lo siguiente:

- Si tenemos una mezcla de 25°, significa que el 25% de volumen total de la mezcla es alcohol puro.
- Si tenemos una mezcla de 62°, significa que el 62% del volumen total es alcohol puro.

En general, para determinar el grado de alcohol de una mezcla se tiene la siguiente fórmula:

$$\left(\begin{matrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{matrix}\right)=\frac{\text{volumen de alcohol puro}}{\text{volumen total de la mezcla}}\times 100\%$$

3.2. GRADO MEDIO (G_m)

Es el grado resultante de mezclar varios alcoholes, cada uno de ellos con su grado respectivo.

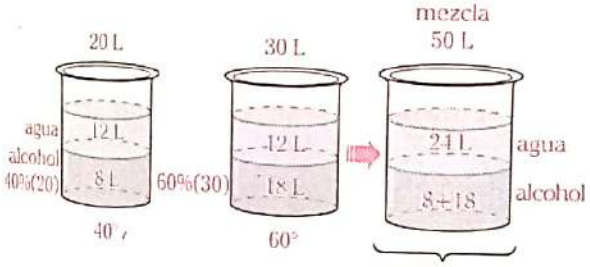
Aplicación 10

Se mezclan 20 L de alcohol de 40° con 30 L de alcohol de 60°. ¿Cuál es el grado de la mezcla resultante?

Resolución

Como tenemos 20 L de alcohol de 40°, significa que el 40%(20) es alcohol puro. Asimismo, 30 L de alcohol de 60° significa que el 60%(30) es alcohol puro.

Graficamos.



$$G_m=\left(\frac{8+18}{50}\right)\times 100\%=52\%$$

$$G_m=52°$$

Analicemos el G_m.

- Volumen de alcohol puro:

$$\underset{40\%(20)}{8} + \underset{60\%(30)}{18}$$

- Volumen total de la mezcla:

$$20+30=50$$

Luego,

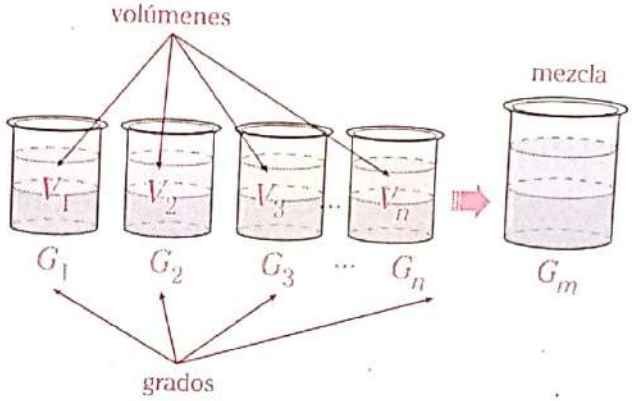
$$\left(\begin{matrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{matrix}\right)=\frac{40\%(20)+60\%(30)}{20+30}$$

$$\therefore \left(\begin{matrix}\text{grado de}\\ \text{alcohol}\end{matrix}\right)=\left(\frac{40(20)+60(30)}{20+30}\right)\%=52\%$$

Observamos que al igual que con el precio medio, en el grado medio también se cumple que

$$\boxed{\text{menor grado} < G_m < \text{mayor grado}}$$

En general, para n ingredientes se tiene que



$$\boxed{G_m=\frac{V_1\times G_1+V_2\times G_2+...+V_n\times G_n}{V_1+V_2+V_3+...+V_n}}$$

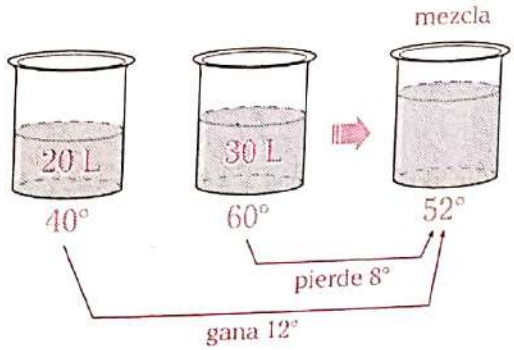
Se puede observar que el grado medio es también un promedio ponderado de grados.

▸▸ Observación

Al igual que en la mezcla de ingredientes, tenga presente lo siguiente:

- Si los volúmenes de los componentes son iguales, el grado medio será la *MA* de los grados de los componentes.
- Si los volúmenes son IP a los grados, o viceversa, el grado medio será la *MH* de los grados de los componentes.

De la aplicación anterior tenemos que



Observemos la ganancia y pérdida en grados.

$$\overbrace{12°(20)}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{8°(30)}^{\text{pérdida aparente}}$$

La ganancia se compensa con la pérdida (en grados) al igual que en la mezcla de ingredientes.

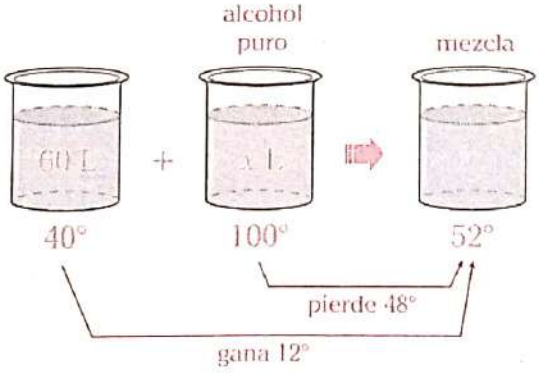
$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

Aplicación 11

¿Cuántos litros de alcohol puro se deben agregar a 60 L de alcohol de 40° para obtener alcohol de 52°?

Resolución

Graficamos.



Aplicamos ganancia y pérdida en grados.

$$\overbrace{12(60)}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{48(x)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$x=15$$

Por lo tanto, se deberá agregar a la mezcla 15 L de alcohol puro.

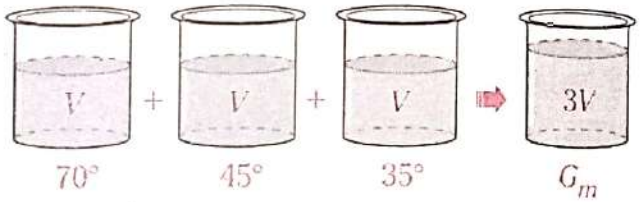
Nótese que no es necesario colocar el símbolo de grado ya que se cancelaría.

Aplicación 12

Se mezclan alcoholes de 70°, 45° y 35° en cantidades iguales. Si a la mezcla se le agregan 87 litros de agua, se obtiene alcohol de 21°, que luego es vendido a S/20 la botella de litro. Determine el ingreso total por la venta.

Resolución

Según los datos, son volúmenes iguales.



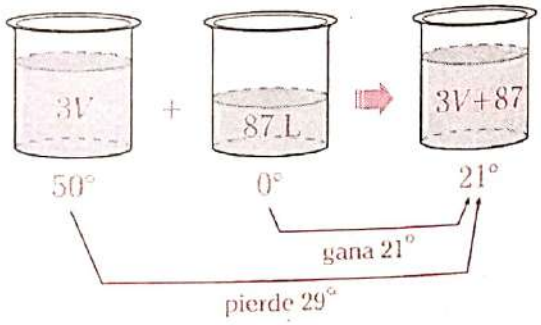
Hallemos el grado medio de esta mezcla.

$$G_m=\frac{70V+45V+35V}{3V}=\frac{150V}{3V}=50°$$

Ya que los volúmenes son iguales, también se pudo haber calculado de la siguiente forma:

$$G_m=\overline{MA}(70°;\ 45°;\ 35°)=50°$$

Luego, se tiene $3V$ litros de 50°, a los cuales, según el enunciado, se les va a agregar 87 litros de agua.



Aplicamos ganancia y pérdida.

$$\overbrace{21(87)}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{29(3V)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$V=21\text{ L}$$

Luego, el volumen total será

$$3V+87=3(21)+87=150\text{ L}$$

Como se cuenta con 150 litros, se tendrán 150 botellas, ya que cada botella es de un litro.

Por lo tanto, el ingreso total es

$$150\times 20=\text{S/}3000$$

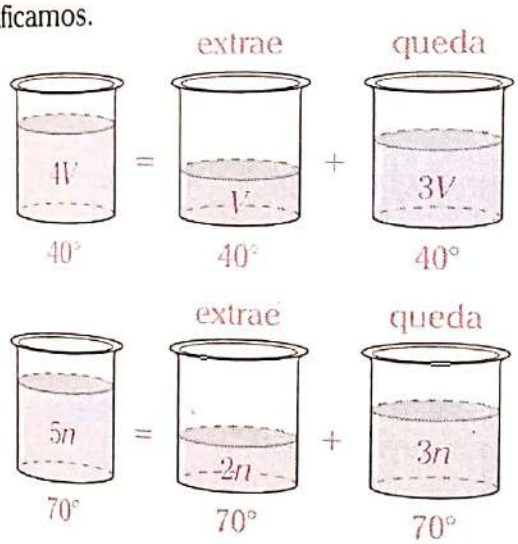
Aplicación 13

Se tienen dos mezclas alcohólicas, una de 40° y la otra de 70°. De la primera se extrae la cuarta parte y se mezcla con los 2/5 de la segunda, con lo que se obtiene alcohol de 60°. Determine la pureza del alcohol que resulta de mezclar los contenidos restantes de cada mezcla.

Resolución

Como de la primera mezcla se extrae la cuarta parte, consideramos su volumen como $4V$; y como de la segunda se extraen 2/5, consideramos su volumen como $5n$.

Graficamos.



Por dato

Cantidad	Grado	Grado medio
V	40°	$g_m=60°$
$2n$	70°	

$$\rightarrow \frac{V(40°)+2n(70°)}{V+2n}=60°$$

$$40V+140n=60V+120n$$

$$20n=20V$$

$$n=V$$

Como $n=V$, en lo que queda se tendrá

Cantidad	Grado	Grado medio
$3V$	40°	G_m
$3V$	70°	

Como son cantidades iguales, el G_m será la $\overline{MA}$ de los grados.

$$\therefore \quad G_m=\frac{40+70}{2}=55°$$

Aplicación 14

Un litro de alcohol de 60° tiene un peso de 940 g. Determine el peso de un litro de alcohol de 48° si se sabe que un litro de agua tiene un peso de 1000 g.

Resolución

Un litro de alcohol de 60° quiere decir que el 40 % del volumen de la mezcla es agua.

→ volumen de agua: 40 %(1000 cc)=400 cc

	Volumen	Peso
Agua	400 cc	400 g
Alcohol	600 cc	540 g
	Peso total	940 g

Observamos que 600 cc de alcohol puro pesa 540 g.

En la segunda mezcla, se tiene un litro de alcohol de 48° y nos piden el peso que debe tener dicha mezcla.

Tengamos presente que si dicho alcohol es de 48°, entonces el 52 % del volumen es agua.

→ volumen de agua: 52 %(1000 cc)=520 cc

De alcohol tenemos 480 cc, de los cuales vamos a averiguar su peso.

Luego, veamos qué relación se cumple entre el peso y el volumen.

(peso) DP (volumen)

$$\rightarrow \frac{540\text{ g}}{600\text{ cc}}=\frac{\text{peso}}{480\text{ cc}}$$

peso=432 g

Luego,

	Volumen	Peso
Agua	520 cc	520 g
Alcohol	480 cc	432 g
	Peso total	952 g

Por lo tanto, el peso de un litro de alcohol de 48° será 952 g.

Aplicación 15

Se mezclan tres ingredientes, el primero es una mezcla alcohólica de 22°, el segundo es agua y el tercero es alcohol puro. Si se obtiene una mezcla de 40°, considerando volúmenes enteros, halle el volumen mínimo de la mezcla.

Resolución

A partir de los datos tenemos

Volumen	Peso
V_1	22°
V_2	0° (agua)
V_3	100° (alcohol puro)

Además, V_1, V_2 y V_3 son enteros mínimos.

Al realizar la mezcla, se observa que es de 40°, de lo cual tenemos lo siguiente:

$$\frac{22V_1+0V_2+100V_3}{V_1+V_2+V_3}=40$$

$$22V_1+0V_2+100V_3=40(V_1+V_2+V_3)$$

$$30V_3=9V_1+20V_2 \qquad \text{(I)}$$

Expresamos en función de $\overset{\circ}{\overline{10}}$.

$$\overset{\circ}{\overline{10}}=9V_1+\overset{\circ}{\overline{10}}$$

Aplicamos el principio de Arquímedes.

$$\rightarrow\ 9V_1=\overset{\circ}{\overline{10}}$$

$$V_1=\overset{\circ}{\overline{10}}$$

Como V_1 es mínimo,

$$\rightarrow\ V_1=10$$

Reemplazamos en (I).

$$30V_3=90+20V_2$$

$$3V_3=9+2V_2 \qquad \text{(II)}$$

Expresamos en función de $\overset{\circ}{3}$.

$$\overset{\circ}{3}=\overset{\circ}{3}+2V_2$$

$$2V_2=\overset{\circ}{3}$$

Aplicamos el principio de Arquímedes.

$$\rightarrow\ V_2=\overset{\circ}{3}$$

Como V_2 es mínimo,

$$\rightarrow\ V_2=3$$

Reemplazamos en (II).

$$3V_3=9+2(3)\ \rightarrow\ V_3=5$$

Finalmente

$$V_1+V_2+V_3=18 \text{ (mínimo)}$$

Por tanto, el volumen mínimo será 18 L.

4 ▸ ALEACIÓN

Es la mezcla de dos o más metales mediante el proceso de fundición (proceso que permite derretir o licuar los metales, minerales u otros cuerpos sólidos). Convencionalmente en las aleaciones tenemos lo siguiente:

- Metales finos: oro, plata, platino
- Metales ordinarios: cobre, hierro, cinc

Para los alcoholes, el grado de un alcohol (pureza de alcohol) está representado por el tanto por ciento de alcohol puro que contiene la mezcla respectiva; mientras que en los metales, la pureza está determinada por la

expresión decimal de la relación existente entre el peso del metal fino y el peso total de la aleación. Esta relación se conoce como **ley de la aleación.**

Ejemplo

Calculemos la ley de aleación de una aleación de 18 g de plata pura con 6 g de zinc.

Sea

Para hallar la ley, dividimos el peso del metal fino entre el peso total.

Así tenemos que

$$\text{ley} = \frac{\text{peso del metal fino}}{\text{peso total}}$$

De lo cual también tenemos

$$(\text{peso del metal fino}) = (\text{ley}) \times (\text{peso total})$$

En el ejemplo anterior

$$\text{ley} = \frac{18}{24} = 0{,}750$$

lo cual se lee: "750 milésimos fino".

En el caso de joyas elaboradas con cierta cantidad de plata, lo más común comercialmente es encontrar joyas de plata de 925 milésimos; es decir, al dividir el peso total en 1000 partes, 925 partes serán de plata pura y el resto será metal ordinario.

Observación

A la relación del peso del metal ordinario con el peso total se le conoce como **liga** de la aleación.

$$\text{liga} = \frac{\text{peso del metal ordinario}}{\text{peso total}}$$

En el ejemplo anterior

$$\text{liga} = \frac{6}{24} = 0{,}250$$

lo cual se lee: "250 milésimos ordinario".

En general, se tiene la siguiente propiedad:

$$\text{ley} + \text{liga} = 1$$

Demostración

Sabemos que

- $\text{ley} = \dfrac{\text{peso del metal fino}}{\text{peso total}}$
- $\text{liga} = \dfrac{\text{peso del metal ordinario}}{\text{peso total}}$

Sumamos.

$$\text{ley} + \text{liga} = \frac{\text{peso del metal fino} + \text{peso del metal ordinario}}{\text{peso total}}$$

$$\text{ley} + \text{liga} = \frac{\text{peso total}}{\text{peso total}} = 1$$

$$\therefore \quad \text{ley} + \text{liga} = 1$$

Observación

La ley de una aleación varía entre 0 y 1, y cuando la aleación está conformada solamente por metal fino, su ley sería 1; y en el caso de que estuviera solamente conformada por metal ordinario, su ley sería cero. Es decir,

- $0 \leq \text{ley} \leq 1$
- ley=1 (solamente metal fino)
- ley=0 (solamente metal ordinario)

En el caso del oro, comercialmente su ley se expresa en quilates, considerando al oro puro de 24 quilates. Veamos ahora una expresión que nos permita trabajar ya sea con una ley expresada en decimales o expresada en quilates. Para ello recurrimos a la comparación de magnitudes: a mayor número de quilates, mayor ley en decimales.

Así tendremos

DP

ley	n.º de quilates
1	24
L	K

Luego

$$\frac{1}{24}=\frac{L}{K} \text{ (por ser DP)}$$

Entonces

$$\boxed{\text{ley}=L=\frac{K}{24}}$$

donde

- K: n.º de quilates ($K=24L$)
- L: ley en decimales

Aplicación 16

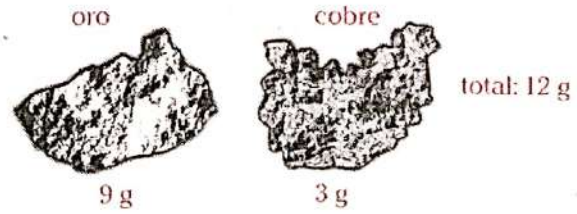
Se tiene una sortija de oro en la cual se han utilizado 9 g de oro puro y 3 g de cobre. Determine lo siguiente:

I. ley en decimales

II. ley en quilates

Resolución

Gráficamente,



I. $\text{ley}=\frac{9}{12}=0{,}750$

750 milésimos fino

II. En quilates

$K=24\times0{,}75=18$ quilates

Diremos que es una aleación de oro de 18 quilates. Es bastante común encontrar de manera comercial oro de 18 quilates en las alhajas (dijes, cadenas, pendientes, sortijas, etc.).

Nota

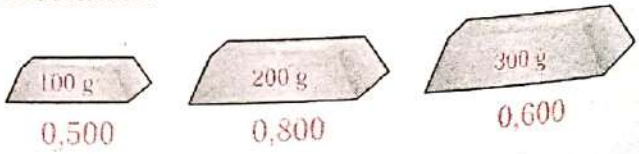
Por lo general, en los problemas de aleaciones, se considera que en el proceso de fundición se mantienen los pesos, tanto del metal fino como del metal ordinario, sin ser precisamente esto lo correcto, ya que en el proceso de fundición se va a elevar a altas temperaturas y lo más probable es que se produzca una merma de los metales en fundición.

Sin embargo, en algunos problemas nos mencionarán la merma producida en el proceso de fundición, en cuyo caso deberemos considerar dicho aspecto con la finalidad de determinar las cantidades reales de los metales en la aleación.

Aplicación 17

Se funden tres barras de plata, cuyas leyes son 0,500; 0,800 y 0,600, y sus pesos respectivos son 100 g, 200 g y 700 g. Calcule la ley de la aleación resultante.

Resolución



Podemos observar que el peso total de la aleación es 1000 g. Solo nos falta saber el peso de metal fino en la aleación total.

Recordemos que

$$\text{ley}=\frac{\text{peso del metal fino}}{\text{peso total}}$$

$\rightarrow$ (peso del metal fino)=(ley)×(peso total)

Procederemos a hallar las cantidades de metal fino que aporta cada barra de plata.

Tenemos lo siguiente:

- 1.ª barra (100 g de plata de 0,500 de ley)
  peso de plata=0,500×100=50 g
- 2.ª barra (200 g de plata de 0,800 de ley)
  peso de plata=0,800×200=160 g
- 3.ª barra (700 g de plata de 0,600 de ley)
  peso de plata=0,600×700=420 g

En resumen, del metal fino se tiene

50 g+160 g+420 g=630 g

Finalmente,

$$\text{ley}=\frac{\text{peso del metal fino}}{\text{peso total}}=\frac{630\text{ g}}{1000\text{ g}}=0{,}630$$

La ley será 630 milésimos fino o simplemente 630 milésimos.

Para determinar la ley de una aleación conformada por varias aleaciones (ley media, L_m), se procederá de la siguiente manera:

Sean

Pesos	Leyes
w_1	L_1
w_2	L_2
w_3	L_3
$\vdots$	$\vdots$
w_n	L_n

$$L_m=\frac{w_1\times L_1+w_2\times L_2+w_3\times L_3+\ldots+w_n\times L_n}{w_1+w_2+w_3+\ldots+w_n}$$

Consideraciones

1. En el caso de que todos los componentes tengan el mismo peso, la L_m será el promedio aritmético de las leyes. Esto ya fue demostrado para la mezcla de ingredientes: cuando se tenían pesos iguales, el precio medio era la $\overline{MA}$ de los precios.
2. En algunos problemas se señala que los pesos son IP a las leyes o viceversa. En este caso, la L_m será la $\overline{MH}$ de las leyes de los componentes de la aleación. Esto ya fue demostrado para la mezcla de ingredientes: cuando los precios de los ingredientes eran IP a los pesos de cada uno de los ingredientes de la mezcla.
3. Al igual que en la mezcla alcohólica y la mezcla de ingredientes, en ciertos problemas también será útil trabajar con ganancia y pérdida aparente con respecto a las leyes de cada uno de los componentes y la ley media de la aleación.

Aplicación 18

Una pulsera de oro de 16 quilates pesa 24 g. Calcule el precio de la pulsera si el gramo de oro puro cuesta S/62 y el gramo de metal ordinario cuesta S/4.

Resolución

Debemos determinar la cantidad de oro puro y de metal ordinario que hay en la aleación, para ello trabajaremos con la ley.

Recordemos que

$$\text{ley}=\frac{\text{peso del metal fino}}{\text{peso total}}=\frac{\text{n.° de quilates}}{24}$$

Como conocemos el número de quilates y el peso total, tendremos

$$\frac{\text{peso de oro puro}}{24}=\frac{16}{24}$$

peso de oro puro=16 g

Entonces

peso del metal ordinario = 8 g

Hallemos ahora el precio.

oro puro	:	$16\times62=992$
metal ordinario	:	$8\times4=\ \ 32$
precio total	:	1024

Por lo tanto, el precio de la pulsera será S/1024.

Aplicación 19

Se funden 450 g de una aleación con 50 g de oro puro y se observa que la ley se incrementa en 0,02 con respecto de la ley primitiva. ¿Cuál es la ley de la aleación inicial?

Resolución

Tenemos lo siguiente:

Peso	Ley	Ley media
450 g	L	$L+0{,}02$ (gana)
50 g	1	(pierde)

Para hallar L, trabajaremos con ganancia y pérdida de las leyes iniciales con respecto de la ley media.

$$\overbrace{0{,}02(450)}^{\text{ganancia aparente}}=\overbrace{[1-(L+0{,}02)](50)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$0{,}02(450)=(0{,}98-L)(50)$$

$$0{,}02\times9=0{,}98-L$$

$$0{,}18=0{,}98-L$$

$$\therefore\ L=0{,}800$$

Aplicación 20

En una aleación de 17 quilates, se ha mezclado oro de 16 quilates, de 18 quilates y de 20 quilates. Si el oro de 16 quilates representa el 60 % del peso total de la aleación, halle en qué relación se encuentran los pesos de oro de 18 y de 20 quilates.

Resolución

Consideremos que el peso total de la aleación es $10n$, entonces tendremos lo siguiente:

Peso	Ley	Ley media
$60\%(10n)=6n$	16 quilates	(gana)
x	18 quilates	(pierde) 17 quilates
y	20 quilates	(pierde)

Además, $x+y=4n$

Aplicamos ganancia y pérdida.

$$\overbrace{1(6n)}^{\text{ganancia aparente}}=\overbrace{1(x)+3y}^{\text{pérdida aparente}}$$

Luego

$$\begin{array}{r} x+3y=6n \\ x+y=4n \\ \hline 2y=2n \\ y=n \end{array}\ (-)$$

Por consiguiente $x=3n$

Nos piden

$$\frac{\text{peso (oro de 18 quilates)}}{\text{peso (oro de 20 quilates)}}=\frac{3n}{n}=\frac{3}{1}$$

Por lo tanto, estarán en la relación de 3 a 1.

Aplicación 21

Se funde un objeto de cobre de 28 kg con otro objeto de plata de ley 0,820 y se obtiene un lingote de ley 0,740. ¿Cuántas monedas con dicha ley y de peso 41 g cada una se pueden fabricar con este lingote?

Resolución

Debemos averiguar el peso del objeto de plata y para ello vamos a aplicar ganancia y pérdida. Tengamos presente que el cobre es un metal ordinario, por lo tanto, su ley es cero.

Peso	Ley	Ley media
28 kg	0	gana
w	0,820	0,740
		pierde

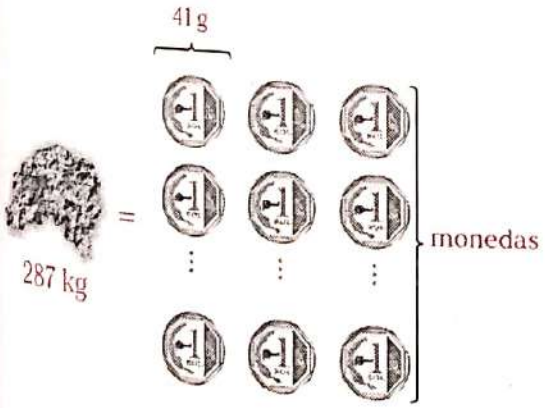
$$\underbrace{0{,}74(28)}_{\text{ganancia aparente}}=\underbrace{0{,}08(w)}_{\text{pérdida aparente}}$$

$$20{,}72=0{,}08(w)$$

$$w=259 \text{ kg}$$

Luego, el peso total del lingote será

$$259+28=287 \text{ kg}$$



Para hallar la cantidad de monedas, basta con dividir el peso total del lingote entre el peso de cada moneda; pero antes, el peso de cada moneda habría que expresarlo en kilogramos. Entonces tenemos que

$$41 \text{ g} <> 0{,}041 \text{ kg}$$

Luego,

$$\text{n.}^{\text{o}} \text{ de monedas}=\frac{287}{0{,}041}=7000$$

Por lo tanto, se pueden fabricar 7000 monedas.

Aplicación 22

Se tienen tres barras de plata, de 200 g, de 800 g y de 1200 g, cuyas ligas son 0,300; 0,800 y a, respectivamente. Después se funde la cuarta parte de cada una de ellas y se obtiene una aleación con 342 g de plata pura. Halle el valor de a.

Resolución

Graficamos.

Liga:	0,300	0,800	a
Ley:	0,700	0,200	$1-a$

Recordemos que para hallar el peso del metal fino basta con multiplicar la ley con el peso total de la aleación, ya que se toma la cuarta parte de cada uno de ellos. En el problema tendremos lo siguiente:

Peso	Ley	Peso de plata pura
50 g	0,700	$0{,}700\times50=35$
200 g	0,200	$0{,}200\times200=40$
300 g	$1-a$	$(1-a)\times300$
Peso total		342 g (dato)

Luego,

$$35+40+(1-a)300=342$$

$$(1-a)\times300=267$$

$$1-a=0{,}89$$

$$\therefore\ a=0{,}11$$

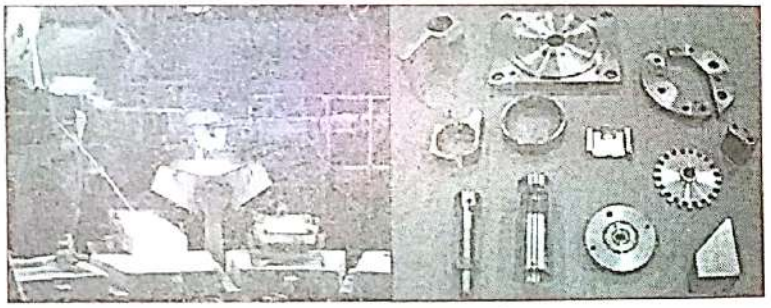
LECTURA

Aleación y metales del siglo XX

Se considera aleación a la mezcla sólida homogénea de dos o más metales con algunos elementos no metálicos. La aleación se consigue al fundir los elementos a temperaturas muy altas.

Dentro de las características de las aleaciones se tienen:

- Presentan brillo metálico.
- Cuentan con alta conductividad eléctrica y térmica.
- Presentan propiedades mecánicas tales como dureza, ductilidad y tenacidad.
- No tienen una temperatura de fusión única.

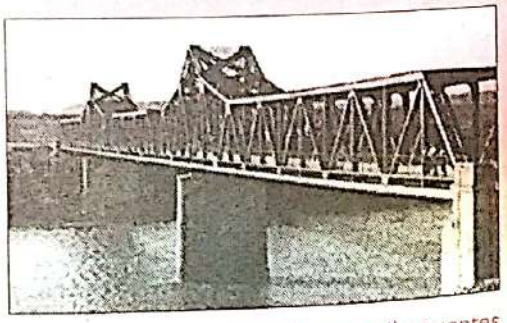


Las aleaciones pueden estar constituidas por elementos metálicos en estado elemental o en estado de oxidación nulo o contener algunos elementos no metálicos.

El desarrollo de la industria ha estado estrechamente vinculado con los avances conseguidos en la tecnología de los metales. La Primera Revolución Industrial, que tuvo lugar en Inglaterra, comenzó cuando Abraham Darby utilizó coque para producir hierro de primera calidad en grandes cantidades (a partir de 1709).

En 1850, la introducción del proceso Bessemer (en honor a Henry Bessemer) hizo posible la producción masiva de acero (forma más dura y resistente de hierro por el agregado de carbono).

En poco tiempo, en Estados Unidos y Gran Bretaña, el acero sustituyó al hierro en sectores tan diversos como las construcciones navales, las vías de ferrocarril y la ingeniería civil.



Uso del acero en vías del ferrocarril y puentes

Los últimos años del siglo XIX y los primeros del XX fueron testigos de la introducción de nuevos metales y de una explosión en el número de aleaciones disponibles. El primero de los nuevos metales importantes fue el aluminio. Se utilizó por primera vez en la industria en los años 80 del siglo pasado, pero al principio la ventaja de su ligereza se veía contrarrestada por su blandura.

El punto de inflexión se produjo en Alemania, en 1909, cuando se descubrió que la dureza del aluminio, en aleaciones con pequeñas cantidades de cobre y magnesio, aumentaba radicalmente con el tiempo (librado al endurecimiento espontáneo). La aleación resultante recibió el nombre de duraluminio.

Adaptado de "Nuevas aleaciones y métodos del siglo XX". En <historiaybiografias.com>.

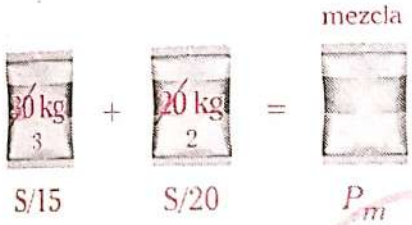
Problemas resueltos

Problema 1

Si se mezclan 30 kg y 20 kg de 2 tipos de café, cuyos costos son S/15 y S/20, respectivamente, ¿a qué precio debe venderse la mezcla para ganar el 20 %?

Resolución

Graficamos.



Entonces

$$P_m = \frac{3(15)+2(20)}{3+2} = \frac{85}{5}$$

$$P_m = 17$$

Luego, reemplazamos P_m en la siguiente expresión teniendo en cuenta que se quiere ganar el 20 %.

$$\boxed{P_V = P_m + G}$$

$\rightarrow$ $P_V = 17 + 20\%(17)$

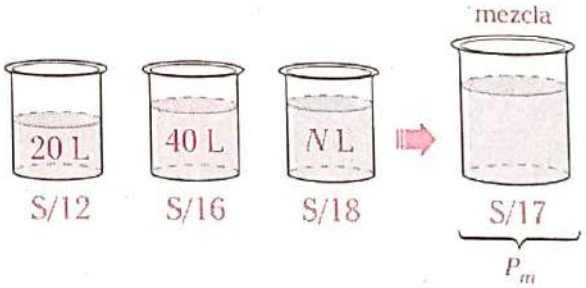
$\therefore$ $P_V = S/20{,}4$

Problema 2

Se han mezclado 20; 40 y N litros de vinos, cuyos costos por litros son S/12, S/16 y S/18, respectivamente. Si el precio medio es S/17, calcule el valor de N.

Resolución

Graficamos.



Luego,

$$P_m = \frac{20(12)+40(16)+N(12)}{20+40+N}$$

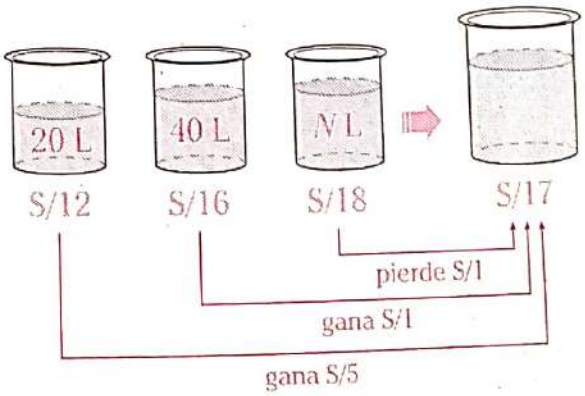
$$17 = \frac{880+18N}{60+N}$$

$$1020+17N = 880+18N$$

$\therefore$ $N = 140$

Otra forma

Utilizaremos los precios que se conocen.



Luego, se sabe que

$$\boxed{\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}}$$

$\rightarrow$ $5(20)+1(40) = 1(N)$

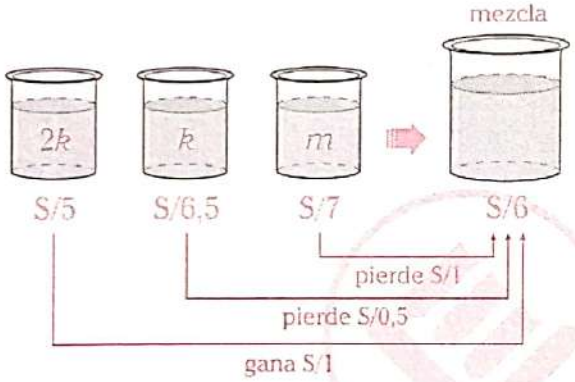
$\therefore$ $N = 140$

Problema 3

Un bodeguero mezcla tres tipos de vino, cuyos precios por litro son S/5; S/6,5 y S/7. Si la relación de las cantidades de los dos primeros es de 2 a 1, ¿cuántos litros de vino de S/7 se emplearán para obtener 180 litros de mezcla cuyo precio por litro sea S/6?

Resolución

Por dato del problema tenemos que



Luego,

$$\overbrace{1(2k)}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{0{,}5(k)+1(m)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$1{,}5k = m$$

Además,

$$2k+k+1{,}5k=180$$

$$4{,}5k=180$$

$$k=40$$

Por lo tanto, la cantidad de vino de S/7 es

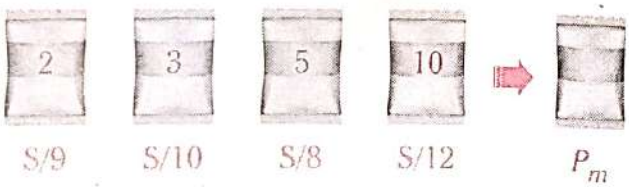
$$m=1{,}5(40)=60\text{ L}$$

Problema 4

Se mezclan cuatro ingredientes en la relación de 2; 3; 5 y 10, cuyos precios por kilogramo son S/9; S/10; S/8 y S/12, respectivamente. ¿Cuál es el costo de 60 kg de la mezcla?

Resolución

Por dato del problema tenemos



Tengamos en cuenta que para calcular el precio medio no se requiere las cantidades exactas, solo es suficiente la relación entre ellas.

$$P_m = \frac{2(9)+3(10)+5(8)+10(12)}{20}$$

$$P_m=10{,}4$$

El precio medio es el precio de costo de un kilogramo de la mezcla.

Por lo tanto, el costo de 60 kg de la mezcla es

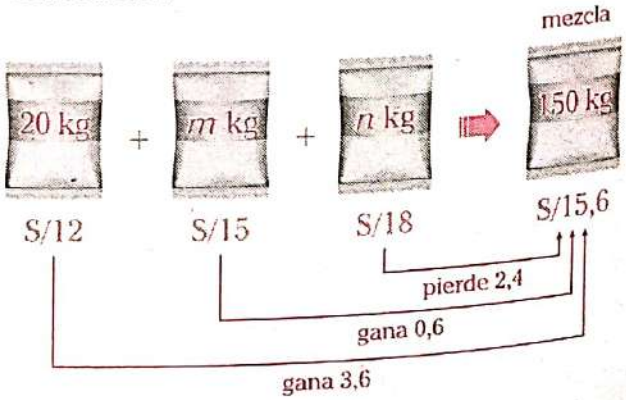
$$10{,}4(60)=\text{ S/624}$$

Problema 5

Si se mezclan 20 kg, m kg y n kg de café, cuyos costos por kilogramo son S/12, S/15 y S/18, respectivamente, se obtienen 150 kg de café cuyo costo por kilogramo es S/15,6. Halle $m-n$.

Resolución

Graficamos.



donde

$$m=130-n$$

Luego,

$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$\rightarrow$ $3{,}6(20)+0{,}6(130-n)=2{,}4(n)$

$150=3n$

$n=50$

$\rightarrow$ $m=130-50=80$

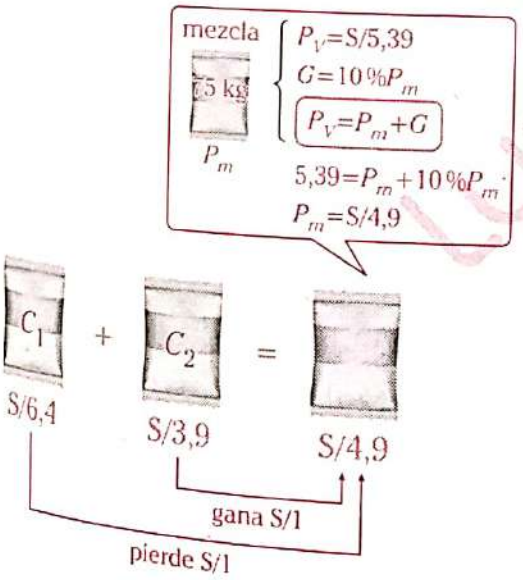
$\therefore$ $m-n=80-50=30$

Problema 6

Katty quiere obtener una mezcla de 75 kilogramos de trigo cuyo precio de venta al público sea de S/5,39, con una ganancia del 10 %. Mezclando dos tipos de trigo, cuyos precios son de S/6,4 y S/3,9, ¿cuántos kilogramos del trigo de mayor precio utiliza Katty en la mezcla?

Resolución

A partir de los datos, tenemos



Luego,

$$\overbrace{1(C_2)}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{1{,}5(C_1)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$\frac{C_1}{C_2}=\frac{2}{3}$$

Entonces

$C_1+C_2=75$

$2k+3k=75$

$5k=75 \rightarrow k=15$

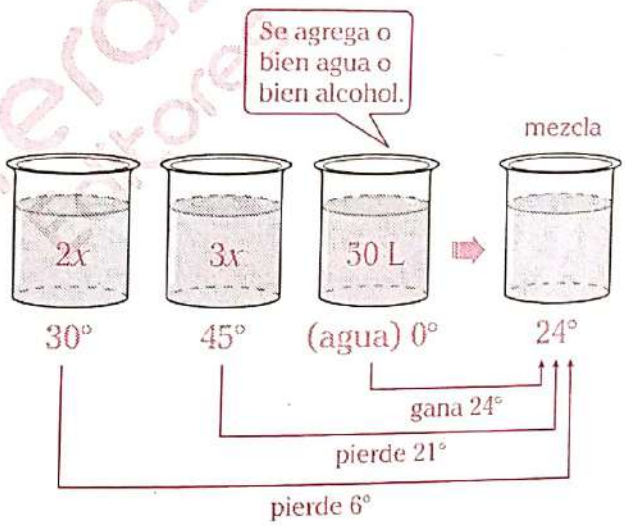
Por lo tanto, el trigo de mayor precio tiene una cantidad de kilogramos igual a $2(15)=30$.

Problema 7

Se mezclan vinos de 30° y 45° de alcohol en la misma proporción que sus grados; luego se agregan 50 litros de una sustancia pura (o bien agua o bien alcohol) y se obtiene vino de 24° de alcohol. Halle el volumen de la mezcla final.

Resolución

Por dato, tenemos



Observe que la sustancia que se agrega es agua para que así haya un equilibrio entre la ganancia aparente y la pérdida aparente.

$$\overbrace{24\times 50}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{21(3x)\times 6(2x)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$24\times 50=75x$

$x=16$

Por lo tanto, el volumen total de la mezcla es

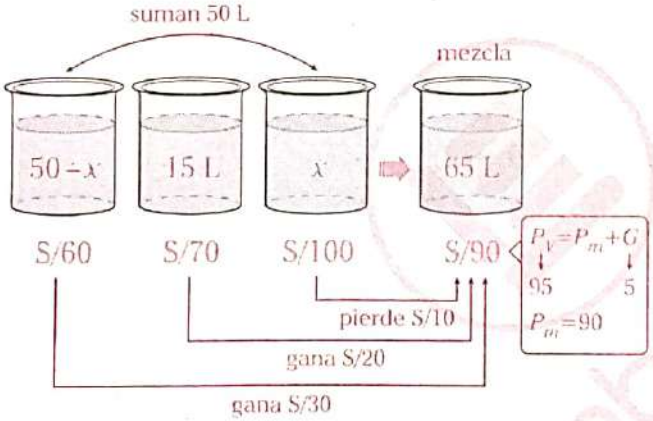
$2(16)+3(16)+50=130$ L

Problema 8

Se quiere preparar 65 litros de vino para venderlo a S/95 cada litro, ganando S/5 por cada litro. Para ello se hace una mezcla con vino de S/60, de S/70 y de S/100 el litro. La mezcla debe tener 15 litros del vino de S/70, y por lo menos un litro de cada tipo de vino. ¿Cuántos litros de vino de S/100 el litro se necesitan si se sabe que los volúmenes de las 3 calidades son números enteros?

Resolución

Del enunciado del problema tenemos



Entonces

$$\overbrace{30(50-x)+20(15)}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{10x}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$1800 = 40x$$

$$x = 45$$

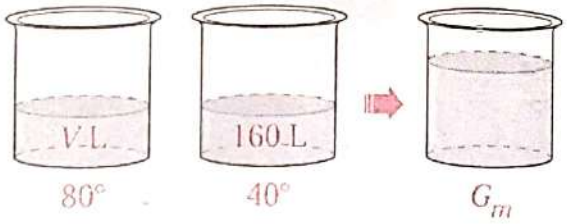
Por lo tanto, el volumen de vino de S/100 es 45 L.

Problema 9

Se tienen V litros de una mezcla alcohólica de 80°, la cual se mezcla con 160 litros de un alcohol de 40°. Si los volúmenes de alcohol y agua en la mezcla están en la relación de 3 a 2, halle V.

Resolución

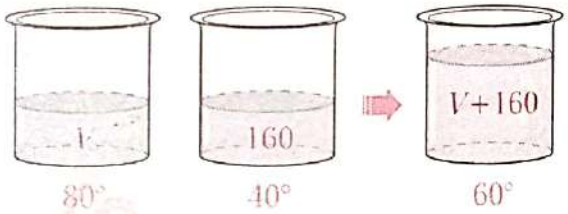
Graficamos.



Dado que en la mezcla final el volumen de alcohol puro y agua están en la relación de 3 a 2

$$\rightarrow \; G_m = \left(\frac{3}{3+2}\right) \times 100° = \left(\frac{3}{5}\right) \times 100° = 60°$$

Luego,



$$\begin{pmatrix}\text{ganancia}\\ \text{aparente}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{pérdida}\\ \text{aparente}\end{pmatrix}$$

$$20V = 20 \times 160$$

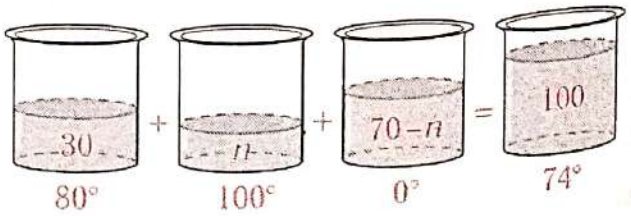
$$\therefore \; V = 160$$

Problema 10

Se quiere obtener 100 litros de alcohol de 74°, mezclando 30 litros de alcohol de 80° con cantidades convenientes de alcohol puro y agua, pero por error estas cantidades se intercambiaron. ¿Cuál será el grado de la mezcla resultante?

Resolución

Graficamos.

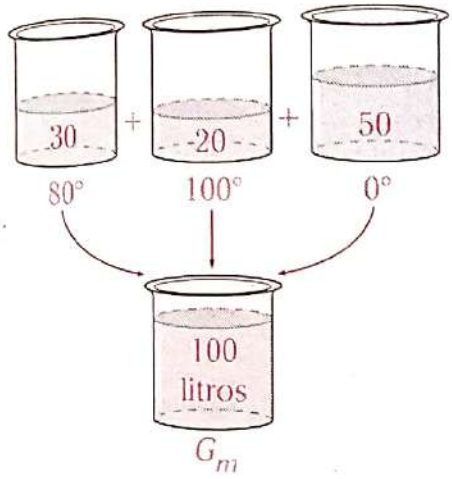


$$\overbrace{74(70-n)}^{\text{ganancia aparente}} = \overbrace{6(30)+26(n)}^{\text{pérdida aparente}}$$

Operando se tiene

$n=50$

Ya que hubo un error con el alcohol puro y el agua, se tiene



Hallemos el grado de la mezcla (G_m).

$$G_m=\frac{30(80°)+20(100°)+50(0°)}{100}$$

$\therefore\ G_m=44°$

Problema 11

Se mezcló vino de S/28, de S/35 y de S/40, de tal manera que se obtienen 570 litros, los que se han vendido al precio de S/30,60 con una pérdida del 10%. Determine la cantidad de vino de S/35 que interviene si esta es la misma cantidad de vino de S/40.

Resolución

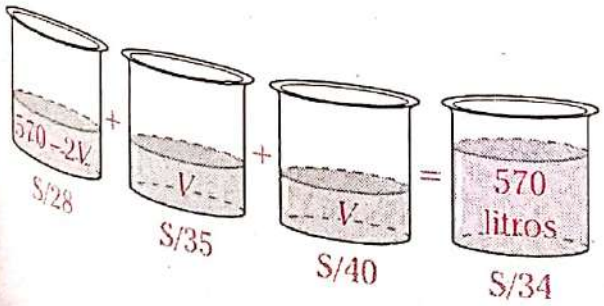
Por dato se sabe que

$P_V=30{,}60$

$P_V=P_m-\text{pérdida}$

$30{,}60=P_m-10\%P_m$

$\rightarrow P_m=34$



Luego,

$$\underbrace{6(570-2V)}_{\text{ganancia aparente}} = \underbrace{V+6V}_{\text{pérdida aparente}}$$

$6\times570=19V$

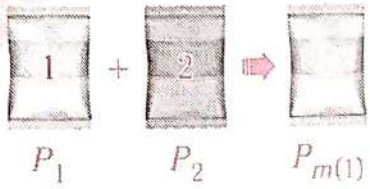
$\therefore\ V=180\text{ L}$

Problema 12

Se mezclan dos clases de café en la proporción de 1 a 2 y la mezcla se vende con el 5% de beneficio sobre el precio de compra. Después se mezclan en la proporción de 2 a 1 y se vende con el 10% de beneficio, siendo el precio de venta en ambos casos iguales. Calcule en qué relación están los precios de cada ingrediente.

Resolución

En el caso de la primera mezcla se tiene



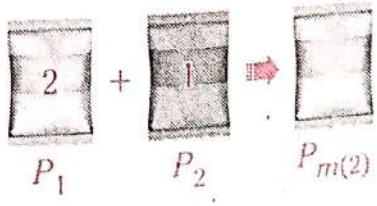
Luego,

$$P_{m(1)}=\frac{1(P_1)+2(P_2)}{3}$$

Además se gana el 5%. Entonces para el precio de venta de la primera mezcla se tiene que

$$P_{V(1)}=105\%\left(\frac{P_1+2P_2}{3}\right)$$

En el caso de la segunda mezcla se tiene



Luego,

$$P_{m(2)} = \frac{2(P_1)+1(P_2)}{3}$$

Además se gana el 10%. Entonces en el precio de venta de la segunda mezcla se tiene que

$$P_{V(2)} = 110\%\left(\frac{2P_1+P_2}{3}\right)$$

Por dato, los precios de venta de ambas mezclas son iguales.

$\rightarrow$ $P_{V(1)} = P_{V(2)}$

$$105\%\left(\frac{P_1+2P_2}{3}\right) = 110\%\left(\frac{2P_1+P_2}{3}\right)$$

$$21(P_1+2P_2) = 22(2P_1+P_2)$$

$$21P_1+42P_2 = 44P_1+22P_2$$

$$20P_2 = 23P_1$$

$$\frac{P_1}{P_2} = \frac{20}{23}$$

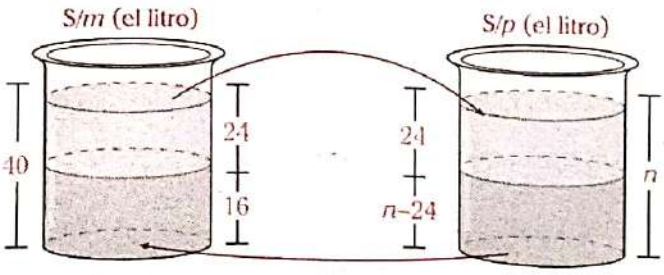
Por lo tanto, la relación de los precios es de 20 a 23.

Problema 13

De dos recipientes, de 40 y n litros (diferentes calidades), se extraen 24 litros de cada uno para luego vaciarlos de uno al otro recipiente. Si las dos mezclas resultan de igual calidad, ¿cuánto vale n?

Resolución

Graficamos.



$$\rightarrow\ G_m = \frac{m\times 16+p\times 24}{40} = \frac{p(n-24)+24m}{n}$$

$$\frac{2m+3p}{5} = \frac{pn-24p+24m}{n}$$

$$2mn+3pn = 5pn-120p+120m$$

$$2n(m-p) = 120(m-p)$$

$\therefore\ n=60$

Otra forma

Como las mezclas tienen la misma calidad, sus ingredientes por precio deben estar en la misma relación.

Luego,

$$\frac{24}{16} = \frac{n-24}{24} \quad\rightarrow\quad \frac{3}{2} = \frac{n-24}{24}$$

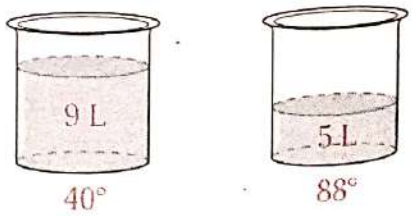
$\therefore\ n=60$

Problema 14

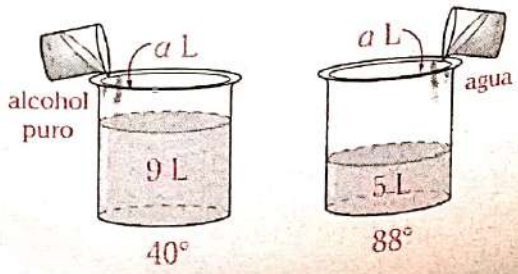
Dos recipientes contienen 9 y 5 litros de alcohol de 40° y 88°, respectivamente. Se agrega cierta cantidad de alcohol puro en el primer recipiente e igual cantidad de agua en el otro y se obtiene alcoholes de igual grado en ambos recipientes. ¿Cuántos litros de agua o alcohol se agregan a los recipientes?

Resolución

Al inicio se tiene



Luego



Entonces

- $G_{m(1)}=\dfrac{9\times 40+a100}{9+a}$ (primer recipiente)
- $G_{m(2)}=\dfrac{5\times 88}{5+a}$ (segundo recipiente)

Por condición

$$G_{m(1)}=G_{m(2)}$$

$$\rightarrow \frac{9\times 40+a100}{9+a}=\frac{5\times 88}{5+a}$$

$$\therefore\ a=3$$

Problema 15

Se mezclan 10 litros de aceite de S/8 el litro con aceite de S/6 el litro y otro de S/4 el litro para obtener 60 litros de aceite cuyo costo por litro es de S/5. ¿Cuántos litros del segundo y tercer aceite se han utilizado en la mezcla? Dé como respuesta la diferencia entre ellos.

Resolución

A partir de los datos, se tiene que

	Cantidad	Costo por litro	Precio medio
1.er aceite	10 L	S/8	P_m=S/5
2.° aceite	x L	S/6	
3.er aceite	$(50-x)$ L	S/4	

Luego, se cumple que

$$\underbrace{1(50-x)}_{\text{ganancia aparente}}=\underbrace{3\times 10+1\times x}_{\text{pérdida aparente}}$$

$$50-x=30+x$$

$$x=10$$

→ 2.° aceite: 10 L ; 3.er aceite: 40 L

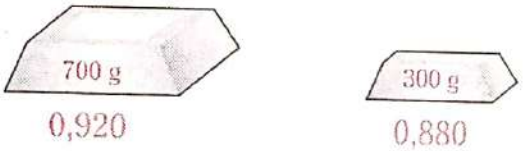
Por lo tanto, la diferencia es 30 L.

Problema 16

Se funden dos lingotes de oro, uno de 700 gramos de peso y 0,920 de ley y el otro de 300 gramos de peso y 0,880 de ley. Luego se extraen n gramos de esta aleación que se reemplazan por n gramos de una aleación de 0,833 de ley y resulta que la ley de la aleación es ahora 0,893. Halle n.

Resolución

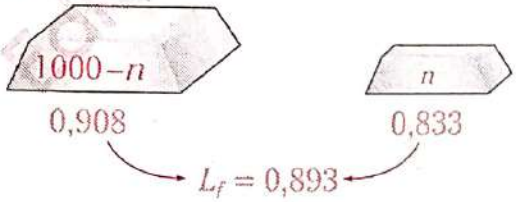
En la primera fundición



$$\rightarrow L_1=\frac{0{,}920\times 700+0{,}880\times 300}{700+300}$$

$$L_1=0{,}908$$

En la segunda fundición



$$\underbrace{(0{,}908-0{,}893)(1000-n)}_{\text{pérdida aparente}}=\underbrace{(0{,}893-0{,}833)n}_{\text{ganancia aparente}}$$

$$\therefore\ n=200$$

Problema 17

El motor de una maquinaria está diseñado para consumir gasolina de 91 octanos. En el Perú se vende solo gasolina de 95 octanos a S/15 el galón y de 83 octanos a S/12 el galón. ¿Cuánto se gastará al mezclar ambas gasolinas para llenar el tanque de nueve galones de dicha maquinaria?

Resolución

Se tiene gasolina de diferente octanaje.

Se desea llenar el tanque de una maquinaria.

Se deduce que

$$\overbrace{b(91-83)}^{\text{ganancia aparente}}=\overbrace{a(95-91)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$\frac{b}{4}=\frac{a}{8}$$

Como $a+b=9$

$$\rightarrow \overbrace{\underbrace{\frac{a}{2}=\frac{b}{1}}_{(+)}}^{(+)}=\frac{9}{3}=3$$

$$a=6 \ \wedge \ b=3$$

Por lo tanto, lo que se gastará es

$$6(15)+3(12)=S/126$$

Problema 18

Una persona deja a un joyero una cadena de 14 quilates con el encargo de que luego de fundirla le confeccione una pulsera de 4 quilates más que la cadena. Si el joyero empleó 16 g de oro puro adicional, ¿cuánto pesaba la cadena?

Resolución

Por condición se tiene que

Se desea confeccionar

Efectuamos lo siguiente:

$$\overbrace{n(18-14)}^{\text{ganancia aparente}}=\overbrace{16(24-18)}^{\text{pérdida aparente}}$$

$$4n=16\times 6$$

$$n=24$$

Por lo tanto, la cadena pesaba 24 g.

Test

1. Se mezclan 12 kg y 8 kg de 2 tipos de café, cuyos costos son S/8 y S/15, respectivamente. ¿Cuál será el precio de la mezcla?

A) S/10,8 B) S/11,6 C) S/9,4
D) S/13,5 E) S/10,4

2. Un comerciante tiene dos calidades de vino, de S/90 y S/75 el litro. Si los mezcla en relación de 5 a 7, respectivamente, ¿cuál es el precio de 1 litro de la mezcla?

A) S/80,6 B) S/82,90 C) S/81,25
D) S/85,24 E) S/79,25

3. Se han mezclado 80 y N litros de dos vinos, cuyos costos por litro son S/15 y S/22, respectivamente. Si el precio medio es S/18, calcule el valor de N.

A) 70 B) 40 C) 50
D) 60 E) 45

4. Si se mezclan 40; 60 y 50 litros de tres tipos de pisco, cuyos costos por litro son S/24, S/30 y S/18, respectivamente, ¿cuál será el precio de equilibrio?

A) S/20,6 B) S/21,8 C) S/24,2
D) S/23,6 E) S/24,4

5. Se tienen 50 litros de alcohol de 60°. ¿Cuántos litros se deben extraer para que al agregarle 30 litros de agua la nueva mezcla sea de 30°?

A) 12 B) 18 C) 20
D) 24 E) 32

6. ¿Cuántos litros de alcohol de 72° se deben añadir a 432 litros de alcohol de 36° para obtener cierta cantidad de alcohol de 45°?

A) 116 B) 216 C) 144
D) 168 E) 166

7. Si mezclamos 32 litros de agua y 18 litros de alcohol, ¿cuál será el grado del alcohol resultante?

A) 36° B) 64° C) 45°
D) 52° E) 60°

8. Se tiene una cadena de 16 quilates, la cual pesa 40 gramos, y otra de 22 quilates, cuyo peso es de 20 gramos. Si se quiere elaborar una sortija con las cadenas fundidas, ¿cuántos quilates tendrá dicha sortija?

A) 19 B) 18 C) 20
D) 16 E) 17

9. Se tiene una cadena de 18 quilates, la cual pesa 32 gramos. ¿Cuántos gramos de oro puro se deben agregar para elaborar con la cadena fundida una sortija de 22 quilates?

A) 68 B) 80 C) 58
D) 56 E) 64

10. Se funden tres barras de plata, cuyas leyes son 0,600; 0,500 y 0,400, cuyos pesos respectivos son 300 g; 500 g y 200 g. Calcule la ley de la aleación resultante.

A) 0,610 B) 0,510 C) 0,580
D) 0,600 E) 0,560

Claves

1 A 2 C 3 D 4 E 5 C 6 C 7 A 8 B 9 E 10 B

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Se mezclan 56 kg de café de S/90 el kilogramo con café de S/72 y se obtiene café de S/80. ¿Cuántos kilogramos de café de S/72 se han utilizado para la mezcla?

A) 50 B) 60 C) 70
D) 75 E) 80

2. Se mezclan 20 litros de vino de S/4 el litro con 50 litros de vino de S/6 el litro y 30 litros de vino de S/8 el litro. ¿Cuál será el costo de 10 litros de la mezcla?

A) S/52 B) S/56 C) S/60
D) S/62 E) S/64

3. Cecilia, una vendedora de abarrotes muy hábil, mezcla dos tipos de arroz, el primero de 45 kg a S/2,30 el kilogramo con otro que representa el 25% del peso total de la mezcla. Si se ha obtenido como precio medio S/2,10, ¿cuál fue el precio por kilogramo de este último tipo de arroz?

A) S/1,90 B) S/1,70 C) S/1,80
D) S/1,50 E) S/1,60

4. Se tienen dos tipos de café: 50 kg de S/15 el kilogramo y el otro de S/10 cada kilogramo. Si se vende la mezcla a S/15,6 ganando el 30%, determine la cantidad de kilogramos que se utiliza del segundo tipo de café.

A) 75 B) 45 C) 40
D) 48 E) 60

5. Se mezclan dos tipos de arroz en la misma proporción, cuyos precios por kilogramo son de S/$(K+1)$ y S/$(K-1)$, y se obtiene una mezcla de S/3 el kilogramo. Calcule el precio medio si se mezcla el doble de la cantidad inicial del primer tipo de arroz con el triple de la cantidad del segundo tipo de arroz.

A) S/3,2 B) S/2,5 C) S/2,9
D) S/2,4 E) S/2,8

6. Un comerciante compró 3 sacos de arroz de S/4,40; S/4,50 y S/4,80 por kilogramo, cuyos pesos están en la relación de 3; 4 y 5. Si el comerciante mezcla los tres sacos de arroz y quiere ganar el 20%, ¿cuál es el precio en que debe vender cada kilogramo de la mezcla?

A) S/5,12 B) S/5,24 C) S/5,48
D) S/5,52 E) S/5,64

7. Se mezclan vinos de S/15; S/20 y S/25 el litro en cantidades que están en la relación de 1; 2 y 7, respectivamente. Si se sabe que al realizar la venta se obtuvo una ganancia del 10%, halle el precio de venta por unidad de mezcla.

A) S/25,3 B) S/25,4 C) S/26,1
D) S/26,5 E) S/26,7

8. Se quiere obtener 100 kg de cierta calidad de café al mezclar 25 kg de café de 6 soles el kilogramo con 40 kg de café de 4 soles el kilogramo y con otra clase de café cuyo precio excede en S/2,10 al precio medio. Calcule este precio medio.

A) S/5,3 B) S/5,6 C) S/5,8
D) S/5,9 E) S/6,3

9. ¿Cuál debe ser la pureza del alcohol que deberá añadirse a 64 litros de alcohol de 96° para obtener 80 litros de alcohol al 90 % de pureza?

A) 51° B) 53° C) 60°
D) 64° E) 66°

10. Se mezclan 20 litros de alcohol de 50° con 50 litros de alcohol de 70° y 30 litros de alcohol al 80 % de pureza. ¿Cuántos litros de agua se le debe añadir a esta mezcla para que el volumen de agua represente el 40 % del volumen total?

A) 6 B) 8 C) 10
D) 12 E) 15

11. Al mezclarse alcoholes de 40°, 30° y 20°, se observa que el volumen del alcohol de 20° es el 20% del volumen de alcohol de 40°. ¿Cuántos litros de alcohol de 30° intervienen en la mezcla si esta tiene un volumen de 80 litros y su grado alcohólico es de 35°?

A) 15 B) 12 C) 20
D) 25 E) 30

12. Un joyero tiene dos tipos de lingotes de oro. El primero contiene 270 g de oro y 30 g de cobre; el segundo tiene 200 g de oro y 50 g de cobre. Determine los pesos, en gramos, que deben considerarse de cada lingote para obtener 200 g de una aleación cuya ley sea 0,825.

A) 50 y 150 B) 50 y 120 C) 60 y 140
D) 90 y 110 E) 75 y 125

13. Un joyero tiene una cadena de 16 quilates, la cual pesa 20 gramos y la va a fundir para obtener una sortija. ¿Cuántos gramos de oro puro se deben agregar para obtener una sortija de 22 quilates?

A) 24 B) 40 C) 48
D) 56 E) 60

14. En una aleación, el 30 % es cobre. ¿Cuántas libras de cobre deben añadirse a 40 libras de esta aleación para que resulte una aleación con 50 % de cobre?

A) 12 B) 15 C) 16
D) 20 E) 25

15. ¿Cuántos kilogramos de un lingote de oro de ley 0,650 serán necesarios fundir con otro lingote de oro de 4 kg y 18 quilates para obtener una liga de 310 milésimos?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 8 E) 10

Nivel intermedio

16. Un kilogramo de trigo de primera sumado a un kilogramo de trigo de segunda cuestan S/26. Se mezclan 10 kg del primero con 20 kg del segundo y se obtiene un precio menor en dos soles que el que se habría obtenido si se mezclaban 20 kg del primero con 10 kg del segundo. ¿Cuál es el precio de 1 kg del primero?

A) S/17 B) S/19 C) S/27
D) S/35 E) S/16

17. Un comerciante quiere mezclar tres tipos de frijol, de S/2,40; de S/3 y de S/3,60 el kilogramo. ¿Cuánto deberá utilizar del primer tipo si desea obtener una mezcla de 240 kilogramos que pueda vender a S/3,84 el kilogramo, ganando el 20 %, y si los pesos de los dos primeros tipos están en la relación de 3 a 4, respectivamente?

A) 40 kg B) 42 kg C) 45 kg
D) 48 kg E) 51 kg

18. Se mezclan tres harinas de calidades distintas, cuyos costos por kilogramo son de S/9; S/10 y S/15, y se obtiene una mezcla cuyo costo es de S/12 por kilogramo. ¿Cuántos kilogramos tiene la mezcla? Considere que se utilizaron 24 kg del más caro y, además, se sabe que las cantidades del primero y el segundo son entre sí como 2 es a 3.

A) 50 B) 52 C) 54
D) 56 E) 58

19. Un comerciante ha mezclado 97 kg de café de S/7,5 el kilogramo con cierta cantidad de café de S/8,9 el kilogramo. Si vendió la mezcla a S/9,35, ganando el 10% del precio de venta, ¿qué cantidad del segundo tipo de café utilizó?

A) 183 kg B) 156 kg C) 150 kg
D) 176 kg E) 194 kg

20. Un comerciante compró tres tipos de harina en cantidades proporcionales a 4; 2 y 3. Los precios del segundo y tercero son 7 y 8 soles el kilo, respectivamente. El precio del primer tipo es S/2 menos que el precio que tendría la mezcla. Si se perdió un cuarto, un medio y un tercio de las cantidades que se tenía, respectivamente, ¿a qué precio debe venderse la mezcla de lo restante para ganar el 40%?

A) S/10,8 B) S/7,8 C) S/8,17
D) S/8,47 E) S/8,67

21. Se tienen tres ingredientes, *A*, *B* y *C*, cuyos costos por kilogramo de cada uno son S/20; S/50 y S/100, respectivamente. Estos ingredientes se mezclan y se obtiene que cada kilogramo de la mezcla tiene un costo de S/30, entonces se mezclan en total 440 kg. ¿Cuántos kilogramos del producto *A* intervienen si se utilizan cantidades iguales de los ingredientes *B* y *C*?

A) 220 B) 360 C) 260
D) 180 E) 280

22. Se mezclan 45 litros de vino de S/40 el litro con vinos de S/24 y S/36 el litro, y el resultante tiene un precio medio de S/34 el litro. Si se sabe que por cada 5 litros del segundo hay 7 litros del tercero, halle la cantidad total de la mezcla.

A) 130 L B) 135 L C) 140 L
D) 145 L E) 150 L

23. Se ha obtenido 1000 kg de arroz al precio de S/12,36 el kilogramo, mezclando cuatro clases distintas de precios: S/9,60; S/12; S/14,40 y S/10,80 el kilogramo. De la segunda clase se ha utilizado el doble de la primera; de la tercera se ha utilizado el doble de la segunda. ¿Cuántos kilogramos de la tercera clase de arroz se han utilizado en la mezcla?

A) 300 B) 350 C) 400
D) 600 E) 800

24. Se compran dos recipientes con pisco. El primero ha costado S/32,40 el litro, y 7 litros del primero ha costado lo que cuesta 9 litros del segundo; además, el volumen del primer recipiente excede al del segundo en 1/4. Si se mezclan los contenidos de los dos recipientes, calcule el precio al que debe venderse el litro para ganar 1/4 del precio de compra.

A) S/32,5 B) S/34 C) S/36,5
D) S/35 E) S/37,5

25. Se tienen dos recipientes con el mismo volumen de líquido, en uno hay alcohol puro y en el otro hay solo agua. De cada recipiente se extrae la mitad, luego 1/3, y por último, 1/4, y se intercambian. ¿Cuántos litros de lo que queda en cada recipiente se debe extraer para mezclarlos y obtener 65 L de alcohol de 45°?

A) 39 y 26 B) 40 y 25 C) 60 y 5
D) 30 y 35 E) 50 y 15

26. Se mezclan 6 L de alcohol de 60° con otros volúmenes enteros en litros de 87° y 80°, y se obtiene una mezcla de 75°. ¿Cuántos litros de agua hay que agregar a esta mezcla para obtener una mezcla de 51°?

A) 8 B) 9 C) 10
D) 12 E) 14

27. Se mezclan alcoholes de 40°; 30° y 20° para obtener alcohol de 35°. Si se quiere que en la mezcla el alcohol de 20° sea la quinta parte del alcohol de 40°, ¿cuántos litros de alcohol de 30° se utilizarán si la mezcla posee un volumen total de 80 L?

A) 10 B) 20 C) 35
D) 30 E) 40

28. Un recipiente contiene 40 litros de alcohol de 25% de pureza. Luego este recipiente se llena, mediante un grifo, con un alcohol de 16° a razón de 2 litros por minuto. ¿Qué tiempo deberá pasar para que se obtenga un alcohol de 20%?

A) 15 min B) 20 min C) 25 min
D) 28 min E) 32 min

29. Se tienen dos recipientes, *A* y *B*, completamente llenos. El primero tiene el triple de capacidad que el segundo y ambos contienen la misma cantidad de agua, pero *A* contiene 2,5 veces más alcohol que *B*. Si se mezclan ambos contenidos en un tercer recipiente, ¿qué pureza de alcohol se obtendrá?

A) 90° B) 85° C) 70°
D) 60° E) 55°

30. Se desea mezclar tres tipos de alcohol, de 25°; 40° y 30°, para obtener alcohol de 32°. Si se sabe que las cantidades, en litros, de agua y de alcohol puro de cada tipo son enteras y mínimas, ¿qué cantidad de alcohol puro hay en el segundo tipo?

A) 5 L B) 8 L C) 4 L
D) 10 L E) 1 L

31. A 40 litros de alcohol de 40° se le agrega agua para reducir su pureza a la tercera parte. Si la nueva mezcla se quiere vender ganando el $33,\widehat{3}\%$, calcule el precio de venta. Considere que el precio de alcohol puro es S/30.

A) S/3,3 B) S/3,5 C) S/4
D) S/4,3 E) $S/5,\widehat{3}$

32. Se tienen tres lingotes de plata y cobre; uno es de ley 0,700, otro es de ley 0,820, y el tercero es de ley 0,900. Se quiere obtener un lingote de ley 0,850, que contenga 730 gramos del segundo lingote y que pese 2130 gramos. ¿Cuántos gramos es preciso utilizar del primer lingote?

A) 240,5 B) 230 C) 235,6
D) 481 E) 145,7

Nivel avanzado

33. Se tiene plata de ley 0,900 y plata de ley 0,750. ¿Cuántos gramos hay que tomar de cada una para obtener 0,06 kg de plata de ley 0,800? Indique como respuesta el tanto por ciento que representa la cantidad que participa de la primera plata respecto de la segunda.

A) 25% B) 40% C) 50%
D) 60% E) 75%

34. Se ha preparado dos soldaduras de zinc y cobre, una contiene 48% de zinc y 52% de cobre; y la otra, 75% de zinc y 25% de cobre. Si se quiere elaborar a 1275 kg de soldadura, con 57% de zinc y 43% de cobre, ¿qué peso ha de tomarse de la primera?

A) 800 kg B) 810 kg C) 820 kg
D) 830 kg E) 850 kg

35. Se tiene una aleación de oro y cobre en la proporción de m a n, respectivamente, y otra aleación que también tiene oro y cobre en cantidades que están de forma inversa a la proporción de la primera aleación, entonces se observa que la diferencia de las leyes es 0,600. Calcule el valor de la ley, en quilates, al fundir 120 g de la primera aleación y 240 g de la segunda.

A) 8,4 B) 15,6 C) 14,4
D) 12,6 E) 9,6

36. Se funden 3 aleaciones. Se sabe que las leyes de las dos últimas son 0,600 y 0,900; además, los pesos de los dos primeros están en la relación de 1 a 5, respectivamente. Si se obtiene 500 gramos de una aleación de ley 0,735, ¿cuántos gramos de la tercera aleación se emplearon si al fundir la primera y tercera aleación se obtiene una aleación de ley 0,870?

A) 50 B) 100 C) 150
D) 200 E) 250

37. Se disponen de varios lingotes iguales de 1 kg y de 0,650 de ley; además, se tienen otros lingotes de 1 kg de 0,900 de ley. ¿Cuántos lingotes de cada tipo hay que tomar para que luego de efectuar una aleación se obtenga un lingote de 0,750 de ley, cuyo peso esté comprendido entre 35 y 44 kg?

A) 21 y 18 B) 20 y 18 C) 20 y 16
D) 24 y 16 E) 24 y 18

38. Se desea variar la ley de un lingote de 30 kg en cuatro quilates. Si la cantidad de oro puro que se necesitaría para ello excede en 8 kg a la cantidad de cobre que se podría utilizar para el mismo fin, halle la ley, en quilates, de la aleación que resultaría al fundir las cantidades de oro puro y de cobre indicados.

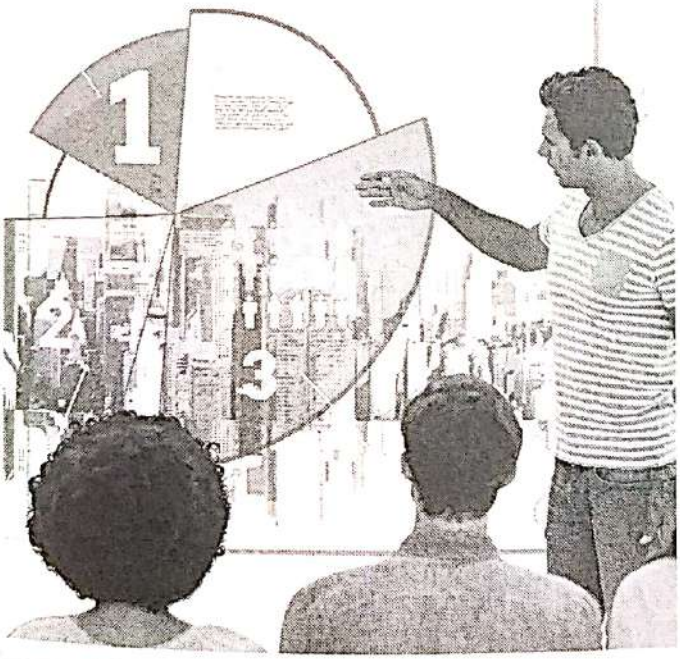
A) 12 B) 14 C) 15
D) 16 E) 18

39. Se funden cuatro lingotes de oro de 12 K, 14 K, 16 K y 18 K, y se obtiene una aleación de 15 K. Si por cada 2 g del primero hay 4 g del segundo y 6 g del tercero, ¿cuántos gramos del cuarto lingote habrá en una aleación de 1 kg?

A) 80 B) 100 C) 120
D) 140 E) 150

Capítulo

XIX



Introducción a la estadística

Ángel Sánchez Oré

CAPÍTULO XIX

INTRODUCCIÓN A LA ESTADÍSTICA

Objetivos

- Conocer los elementos que intervienen en la investigación estadística.
- Elaborar, describir e interpretar correctamente la información estadística a través de los cuadros y gráficos estadísticos.
- Aprender a calcular e interpretar las medidas de tendencia central y de dispersión.

Introducción

La estadística se remonta a épocas muy antiguas y se caracteriza por encontrarse asociada a los censos poblacionales y registros de bienes y servicios de un determinado pueblo. El término *estadística* se deriva del vocablo *Estado*, ya que la función primordial de los Estados es elaborar registros de la población, nacimientos, defunciones, impuestos, egresos, etc.

En la antigüedad, conforme la población iba creciendo, resultaba casi imposible obtener información de cada persona, es por ello que surge la necesidad de buscar un método que ayude a realizar estimaciones de acuerdo con un conjunto de muestra tomado de la población. Es desde ese entonces que nace la estadística.

Por ejemplo, los periodistas de radio o televisión comentan: "El PBI de la industria manufacturera del Perú creció en 3,7 % en marzo de este año", "Según el INEI, el nivel acumulado de la inflación durante el primer semestre de este año llegó a 1,27 %". Una persona cualquiera puede preguntar: "¿Has visto las últimas estadísticas acerca del empleo?". Se puede observar en los comentarios que cada persona utiliza la palabra *estadística* en forma correcta, sin embargo, lo utilizan en una forma diferente, ya que la materia prima de la estadística como disciplina es el grupo de datos numéricos o indicadores numéricos.

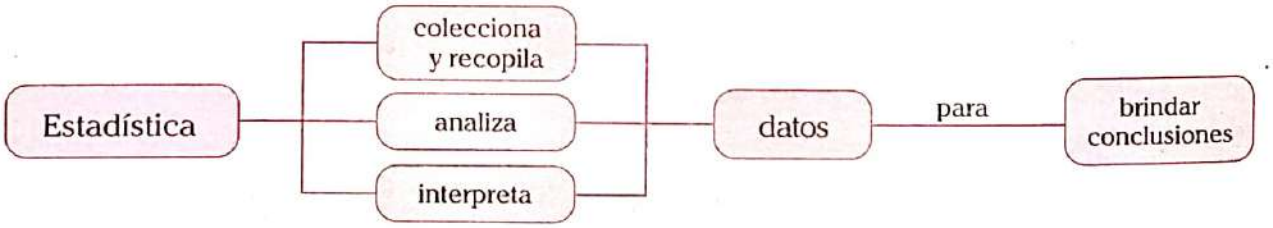
El presente capítulo nos permitirá conocer la importancia de la estadística descriptiva, los pasos a seguir para elaborar un cuadro de distribución de frecuencias a partir de la recolección de datos y clasificarlos adecuadamente. Además, a partir del cuadro de distribución de frecuencias (cuadro estadístico) se puede elaborar los diferentes gráficos estadísticos con su respectiva interpretación. Se aprenderá también a calcular las principales medidas de dispersión para datos clasificados y no clasificados para poder comparar dos o más grupos de datos a estudiar.

1▸ ¿QUÉ ES LA ESTADÍSTICA?

Se entiende por estadística a un conjunto de datos. Se puede hablar de estadística de ingresantes a universidades, de nivel de desempleo, de crecimiento del PBI, etc. Es por ello que no existe una definición específica, sino varias, de las cuales mencionaremos algunas.

- Es la disciplina relacionada con los métodos científicos destinados a recopilar, organizar, clasificar, presentar, resumir y analizar los datos, tanto para la deducción de conclusiones como para tomar decisiones.
- Es la rama de la matemática encargada de recopilar, organizar y procesar datos con el fin de inferir las características de la población objetiva.
- Es la ciencia que estudia un fenómeno mediante la recolección de un gran número de datos referentes al mismo, para su posterior tratamiento, con la finalidad de obtener conclusiones sobre aquel.
- Es la ciencia que nos proporciona un conjunto de métodos y procedimientos para la recolección, clasificación e interpretación de datos en forma confiable para tomar una adecuada decisión.

Si bien es cierto que hay varias definiciones para la estadística, todos coinciden en que esta se encarga de recopilar datos, analizar y brindar conclusiones con la finalidad de tomar decisiones. Esto podemos resumirlo en un gráfico.



La estadística es un potente auxiliar de las ciencias y actividades humanas, como la sociología, la psicología, la geografía humana, la economía, etc. Es una herramienta indispensable para la toma de decisiones; además, es ampliamente empleada para mostrar los aspectos cuantitativos de una situación muy particular. La estadística está relacionada con el estudio de procesos, cuyo resultado es más o menos imprescindible, y con la finalidad de obtener conclusiones para tomar decisiones razonables según lo observado.

El resultado del estudio de dichos procesos, denominados procesos aleatorios, puede ser de naturaleza cualitativa o cuantitativa y, en este último caso, discreta o continua. Son muchas las predicciones de tipo sociológico o económico que pueden hacerse a partir de la aplicación exclusiva de razonamientos probabilísticos a conjuntos de datos objetivos, como por ejemplo los de naturaleza demográfica.

Las **predicciones estadísticas** difícilmente se refieren a sucesos concretos, pero sí describen con considerable precisión el comportamiento global de grandes conjuntos de sucesos particulares. Son predicciones que, en general, no son útiles para saber quién de entre los miembros de una población importante encontrará trabajo o se quedará sin él, o en cuáles miembros va a verse aumentada o disminuida una familia concreta en los próximos meses. En cambio, puede proporcionar estimaciones fiables del próximo aumento o disminución de la tasa de desempleo referido al conjunto de la población o de la posible variación de los índices de natalidad o mortalidad.

2▸ CLASES DE ESTADÍSTICA

2.1. ESTADÍSTICA DESCRIPTIVA

Se encarga de recopilar, clasificar, presentar, analizar e interpretar un conjunto de datos.

Ejemplos

- El gerente de un bazar realiza mensualmente un balance de los ingresos que obtiene. En los meses de junio, julio, agosto y septiembre obtuvo S/1300, S/1000, S/1200 y S/1300, respectivamente. El gerente desea conocer el promedio mensual de sus ingresos obtenidos, para lo cual realiza la siguiente operación:

$$\frac{1300+1000+1200+1300}{4}=S/1200$$

- Durante sus seis últimas compras, un ama de casa lleva un control de la duración de su balón de gas, tal como se muestra en el cuadro siguiente:

	1.ª	2.ª	3.ª	4.ª	5.ª	6.ª
N.º de días	28	26	30	32	28	24

Con estos datos se puede decir que el balón de gas dura en promedio 28 días, ya que

$$\frac{28+26+30+32+28+24}{6}=28$$

2.2. ESTADÍSTICA INFERENCIAL

Llamada también inductiva o de pronóstico, es la que nos proporciona la teoría necesaria para inferir o estimar la generalización o toma de decisiones sobre la base de una información parcial mediante técnicas descriptivas.

Ejemplos

- Consideremos el ejemplo anterior del gerente y digamos que ahora desea predecir su ingreso mensual para el mes de octubre. El proceso de estimación corresponde a la estadística inferencial. Se podría predecir que su ingreso mensual en octubre será alrededor de S/1200, pero cabe señalar que todo proceso de predicción está afectado por un determinado error, denominado error de estimación. Cuando dicho error sea más pequeño o cercano al valor real, significa que la muestra con la que se trabajó es la adecuada.

- En épocas de elecciones, muchas compañías de estudio de mercado lanzan sus predicciones sobre el candidato que tiene tanto por ciento de aceptación y cuenta con la mayor posibilidad de ganar. Puede ser que todas estas compañías coincidan en el primer lugar, pero va a ser más confiable aquella que haya tenido el mayor acercamiento, es decir, el menor margen de error en el proceso de predicción. Por lo tanto, ello significará que la muestra con la que han trabajado es la más representativa posible, ya que ha reflejado de manera más próxima la intención de voto de los electores.

3▸ CONCEPTOS DE TÉRMINOS USADOS EN ESTADÍSTICA

3.1. POBLACIÓN

Es el conjunto universal del cual se van a obtener datos. Son los objetos u observaciones que presentan en común una determinada característica particular a ser analizada de la cual se desea información.

Ejemplo

Los alumnos que cursan el 5.º año de educación secundaria en Lima Metropolitana

3.2. MUESTRA

Es un subconjunto de la población. Una muestra debe ser representativa, de manera que se pueda hacer deducciones de ella respecto de la población completa.

Ejemplo

Los alumnos del colegio Bertolt Brecht que cursan el 5.° año de educación secundaria

3.3. VARIABLE

Una variable estadística es una característica de la población que interesa al investigador y que puede tomar diferentes valores. Las variables se clasifican en cualitativas y cuantitativas.

3.3.1. Variable cualitativa

Es aquella que está asociada con una característica cualitativa; es decir, es una variable cuyos valores son cualidades, propiedades o atributos que presenta la población y que son objeto de estudio. A su vez, esta variable se clasifica en nominal y ordinal.

a. Variable cualitativa nominal

Es aquella variable que surge cuando se define la categoría y no lleva ninguna ordenación de las posibles modalidades, es decir, no existe jerarquía: todas se consideran en un mismo nivel.

Ejemplo

Variable	Dominio de la variable
Profesión que desean estudiar los alumnos al terminar el 5.° año de educación secundaria	Ingeniería Medicina Derecho Educación Administración

b. Variable cualitativa ordinal

Se da cuando el investigador no solo busca un nivel de clasificación, sino que también busca ordenar sus casos en términos del grado de una determinada característica que poseen. Por lo general, en este caso existe una jerarquía.

Ejemplos

Variable	Dominio de la variable
Nivel socioeconómico	bajo medio alto

Variable	Dominio de la variable
Nivel de educación alcanzado	primaria secundaria superior incompleta superior completa maestría doctorado

3.3.2. Variable cuantitativa

Se llama así a la variable que está asociada con una característica cuantitativa, es decir, que se obtiene como resultado de mediciones o conteos. A su vez, la variable cuantitativa se clasifica en discreta y continua.

a. Variable cuantitativa discreta

Es aquella que se obtiene por el procedimiento de conteo (necesariamente toma valores enteros no negativos).

Variable	Dominio de la variable
Número de hermanos	0 1 2 ⋮

b. Variable cuantitativa continua

Es aquella que se obtiene por el procedimiento de una medición (puede tomar valores no necesariamente enteros).

Variable	Dominio de la variable
Peso	52 kg 57,2 kg 61,3 kg 64 kg ⋮

3.4. DATO

Representa el valor o respuesta que adquiere la variable en cada unidad de análisis. Asimismo, es el resultado de la observación, entrevista o recopilación en general. Los datos son la materia prima de la estadística, elemento primario de toda observación o búsqueda.

> **Nota**
> El dato puede expresarse por un número (cuantitativo) o por una palabra (cualitativo); además, el dato tiene un significado más allá del simple valor estadístico.

El dato tiene las siguientes características:

- Tiene contexto, ya que pertenece a una realidad.
- Tiene naturaleza, que es la unidad de medida.
- Tiene historia, antecedentes, causas, etc.
- Tiene significado o valor frente a una realidad.
- Tiene perspectiva o comportamiento futuro.
- Puede ser interpretado con un significado dentro de una teoría, objetivos, etc.

Ejemplo

Se detallan los tres elementos básicos de la investigación estadística y puede apreciarse que cada categoría de las seis variables tiene su código numérico específico (1; 2; 3; ...).

Muestra

Padres de familia del C. E. 1775

Unidad de análisis

Padres de familia

Variables

- Sexo:
  1. varón
  2. mujer
- Edad:
  1. 20 - 29
  2. 30 - 39
  3. 40 - 49
  4. 50 - 59
  5. 60 - 69
- Nivel educativo:
  1. analfabeto
  2. primaria
  3. secundaria
  4. superior
- Tenencia de vivienda:
  1. alquilada
  2. propia
  3. otra
- Número de hijos:
  1. 1 a 3
  2. 4 a más
- Tipo de trabajo:
  1. dependiente
  2. independiente

4 INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

El objetivo de la investigación estadística es descubrir respuestas a determinadas interrogantes a través de la aplicación de procedimientos científicos. El punto de partida de la investigación es la existencia de un problema que habrá que definir, examinar, valorar y analizar críticamente para luego formular y entender su solución.

La investigación es un proceso de producción de conocimientos científicos; es un proceso sistemático a través del cual se recogen datos e información de la realidad objetiva para dar respuesta a las interrogantes que se plantean. No hay investigación grande o pequeña, simplemente investigar es buscar respuestas para plantear soluciones.

Cuando se aplica el método científico al estudio de los problemas económicos, se habla de investigación económica; asimismo, se tiene investigación educativa, investigación agropecuaria, etc. Toda investigación requiere de datos, sin datos no hay investigación, entonces surge la necesidad de definir métodos de análisis o tratamiento de datos, con el propósito de obtener algunas medidas o indicadores que expresen la dimensión o niveles de las variables estudiadas, es decir, realizar la operacionalización de las variables.

En este contexto, la estadística surge como ciencia auxiliar de la investigación; además, por su naturaleza, estructura y métodos, en este proceso, el análisis estadístico también cumple con los diversos pasos de toda investigación.

En este contexto, también se habla de la investigación estadística aplicada, la cual está orientada al análisis estadístico de los fenómenos sociales, económicos y demográficos, dentro de los tres objetivos de la estadística, como son la descripción, el análisis experimental y la predicción.

4.1. ETAPAS DE LA INVESTIGACIÓN ESTADÍSTICA

Es importante distinguir entre investigación estadística y la estadística como técnica o ciencia auxiliar para la investigación científica, social, educativa, económica, etc.

La investigación social, económica, o de otro tipo, estudia el fenómeno en su totalidad dentro de un marco teórico y conceptual, con el propósito de contribuir al conocimiento científico; por ejemplo, hay que distinguir entre hecho estadístico y hecho social, económico, educativo, etc. Por su parte, la investigación estadística se preocupa fundamentalmente por la dimensión y la relación de los elementos que caracterizan al fenómeno en estudio.

La investigación estadística, por su naturaleza, es en su primera etapa de tipo descriptiva; se preocupa por la confiabilidad, la validez y el significado de los datos de las muestras, así como de los métodos y técnicas de recolección y análisis estadísticos. La investigación estadística es un proceso en el cual se distinguen cinco etapas: planteamiento, recopilación de datos, organización de los datos, análisis de los datos y formulación de conclusiones.

4.1.1. Planeamiento o preparación

Se tienen en cuenta los siguientes aspectos:

- Fundamentación y comprensión del estudio e identificación de las variables
- Determinación de los objetivos
- Organización de las variables, precisión de los datos e información requerida

4.1.2. Recopilación o recolección de los datos

Es el momento en el cual el investigador se pone en contacto con los objetos o elementos sometidos a estudio, con el propósito de obtener los datos o respuestas de las variables analizadas. Los métodos de recolección son diversos y dependen de las posibilidades de acceso o contacto con los elementos investigados, del tamaño de la población o muestra, de la oportunidad de obtener datos del presupuesto y de las exigencias del tiempo. Métodos de recolección son, por ejemplo, la entrevista, el censo, la encuesta, etc.

4.1.3. Organización y presentación de los datos

Después de la recopilación de los datos, se procede a su organización, clasificación y tabulación, de modo que se facilite la presentación en tablas, cuadros o gráficos.

Como tarea previa a la organización es indispensable realizar una evaluación, crítica, corrección y ajuste de los datos. El propósito es superar las omisiones e inconsistencias y desechar las respuestas no significativas o erróneas que puedan afectar luego al análisis de manera significativa.

Realizadas las correcciones o ajustes, se procede a la clasificación o establecimiento de categorías o intervalos para la agrupación de los datos. Finalmente, se procede a la tabulación o procesamiento de los datos. El avance tecnológico permite hoy en día que medios mecánicos, como la computadora, permitan manipular los datos de una manera más rápida, inclusive hay paquetes estadísticos (*software*) que permiten realizar un estudio bastante rápido de las variables a investigar, así como la elaboración de diagramas y cuadros, en algunos casos hasta permiten elaborar ciertas conclusiones del análisis de las muestras correspondientes.

Los cuadros estadísticos, como primera fase de la reducción de datos, facilitan el cálculo de los indicadores (porcentajes, promedios, proporciones, índices, tasas, etc.), con los cuales se inicia la descripción, análisis e interpretación de los datos, las variables y la información estadística.

4.1.4. Análisis e interpretación de los datos

En esta etapa se aplican los argumentos matemáticos y teóricos de la estadística. A través de métodos estadísticos se calculan indicadores o medidas de resumen, se establecen relaciones entre variables, se estiman valores, se ejecutan pruebas estadísticas, etc. Todas estas operaciones generan elementos de referencia para la descripción, análisis e interpretación del comportamiento de los datos.

Los métodos de análisis de datos estadísticos son numerosos y pueden consistir desde una simple observación hasta recurrir a métodos más elaborados o sofisticados matemáticamente. Es importante destacar que al estadista le corresponde, fundamentalmente, proporcionar indicadores, modelos estadísticos e información estadística de un determinado fenómeno para el desarrollo de las investigaciones en general.

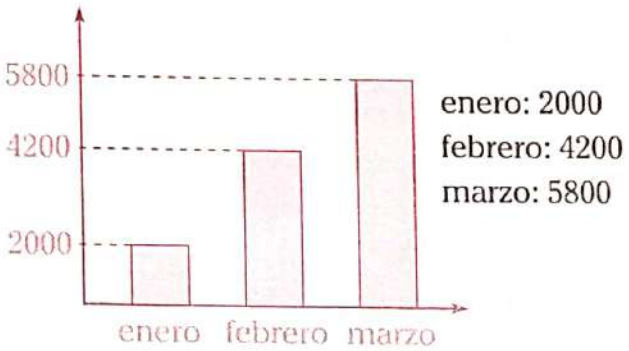
4.1.5. Formulación de conclusiones y preparación del informe

En toda investigación debe analizarse el cumplimiento de los objetivos en función de los resultados fundamentales. Esta contrastación permite elaborar un resumen de los aspectos sustantivos, que luego se expresarán en forma de conclusiones y sugerencias orientadoras en la toma de decisiones.

Estos informes estarán acompañados de cuadros y gráficos con su debida interpretación, de manera que permitan una visión real del problema en concreto; además de establecer un análisis, deben también sugerir alternativas de solución que permitan posteriormente tomar una decisión adecuada.

Ejemplo

Informe de la venta de cuadernos en el trimestre enero - marzo



5 ▸ Recolección de datos

El trabajo de recolección de datos se puede realizar mediante dos modalidades:

- técnica de investigación documental o bibliográfica
- técnica del trabajo de campo

  Por su parte, el trabajo de campo puede realizarse de dos maneras:

  - observación y la exploración en el terreno, que consiste en el contacto directo del investigador con el objeto de estudio.
  - encuesta y entrevista, que consisten en el acopio de testimonios orales y escritos de personas vivas.

5.1. Técnicas de recolección de datos

Como ya se mencionó anteriormente, el uso de tales técnicas depende de muchos aspectos, por lo que a continuación detallamos las técnicas más frecuentes.

5.1.1. Observación

En el proceso de investigación, es la acción de mirar con rigor, en forma sistemática y profunda, con el interés de describir la importancia de aquello que se observa. La observación es el método básico que se utiliza para adquirir información acerca del mundo que nos rodea y, por lo tanto, constituye la técnica primordial de la investigación científica.

5.1.2. Técnica documental

La técnica documental es un tipo de observación que recopila o busca sus datos en documentos, fuentes escritas o gráficas de todo tipo. Entre estos tenemos los siguientes:

- **Documentos académicos.** Constituidos por la bibliografía más importante para conocer el estado del conocimiento de una ciencia.
- **Actas e informes.** Las actas son documentos que recogen lo ocurrido en el momento mismo en que está pasando, en tanto que los informes son documentos escritos después de ocurrido el acontecimiento.
- **Documentos personales.** Son las autobiografías, los diarios, las cartas, las historias de vidas y los estudios de casos.
- Fotografías, planos, videos, etc.

5.1.3. Entrevista

La entrevista es un diálogo intencionado entre personas. Es una situación de interrelación o diálogo entre personas. Es una técnica en la que una persona, llamada entrevistador, encuestador o empadronador, solicita al entrevistado que le proporcione algunos datos o información. El éxito de la entrevista como técnica de recolección depende de la eficiencia del trabajo del entrevistador y de las preguntas adecuadas que haya considerado para el estudio o investigación.

5.1.4. Cuestionario

Es un instrumento constituido por un conjunto de preguntas sistemáticamente elaboradas que se formulan al encuestado o entrevistado, con el propósito de obtener los datos de las variables consideradas en el estudio

Cuando las preguntas se organizan y se imprimen, se obtiene el formulario cédula, que es el instrumento que se utiliza para registrar las respuestas o datos. Posteriormente, este será utilizado para el almacenamiento de los datos en un medio mecánico.

¿Cómo se prepara un cuestionario?

La preparación y presentación del cuestionario suponen elaborar el formulario, que es el diseño de los documentos en los que se registran los datos referentes a la unidad de investigación; además, permite obtener los datos para llenar los cuadros estadísticos establecidos. Su preparación se efectúa durante la fase del planeamiento de la encuesta, después de que estén definidos aquellos aspectos que son fundamentales para conseguir información de buena calidad y fácil de procesar.

Sobre las formas y clases de preguntas se tienen las siguientes:

a. Preguntas abiertas

Llamadas también ilimitadas, son aquellas preguntas que el investigado responde con su propio vocabulario, sin que se le dé alguna alternativa, conjunto de palabras o frases.

Ejemplos

- Describa brevemente las tareas que realiza en el cargo que ocupa.
- Anote la temática de las revistas especializadas que usted conoce.
- ¿Cuáles son los cursos que más le agradan?
- ¿Qué programas de televisión suele ver?
- ¿Qué actividades realiza los fines de semana?
- ¿Qué obras ha leído en los últimos seis meses?
- ¿Qué opinión le merece la política del actual gobierno?
- ¿Qué opina del TLC?

b. Preguntas cerradas dicotómicas

Son aquellas preguntas que solo pueden responderse con un SÍ o un NO, o simplemente cuando solo presentan dos alternativas.

Ejemplos

- Sexo
  Masculino ( ) Femenino ( )
- ¿Trabaja actualmente?
  Sí ( ) No ( )
- ¿Está usted de acuerdo con el aborto?
  Sí ( ) No ( )
- ¿Ha viajado al extranjero?
  Sí ( ) No ( )
- Nacionalidad
  Peruana ( ) Extranjera ( )
- ¿Cuenta en su domicilio con el servicio de internet?
  Sí ( ) No ( )

c. Preguntas cerradas de elección múltiple

Son aquellas que proponen un conjunto de alternativas en la respuesta.

Ejemplos

- Edad
  Menor de 20 años ( )
  De 20 a 29 años ( )
  De 30 a 39 años ( )
  De 40 a 49 años ( )
  De 50 años a más ( )
- ¿A qué se debe que seamos un país poco desarrollado?
  ( ) Poco esfuerzo de sus habitantes
  ( ) Dominio de los países desarrollados
  ( ) Falta de conocimientos y tecnología
  ( ) Errores de los gobernantes
  ( ) Herencia colonial
  ( ) Otros

- ¿Qué cosa buena para el país quisieras que ocurra en el siguiente año?
  ( ) Más inversión y trabajo
  ( ) Menos pobreza
  ( ) Menos corrupción y delincuencia
  ( ) Aumento de salarios
  ( ) Mejora de la educación

d. Preguntas literales

Son preguntas abiertas cuyas respuestas se expresan con una palabra o cantidad.

Ejemplos

- ¿Cuál es su estado civil?
- ¿Cuál es su ocupación actual?
- ¿Cuál es su lugar de nacimiento?
- ¿Cuántos hijos tiene?
- ¿Qué grado de instrucción tiene?
- ¿A cuánto asciende su gasto diario?

e. Preguntas con respuesta en grados de intensidad

Sus respuestas indican un grado de intensidad dentro de una escala creciente o decreciente, ascendente o descendente.

Ejemplos

- ¿Está usted de acuerdo con la política económica del gobierno?
  Muy de acuerdo ( )
  De acuerdo ( )
  En desacuerdo ( )
  No responde ( )

- ¿Qué le parece el servicio que se brinda?
  Muy bueno ( )
  Bueno ( )
  Regular ( )
  Malo ( )
  No sabe, no opina ( )

- ¿Cómo calificaría la situación económica en nuestro país?
  Muy buena ( )
  Buena ( )
  Regular ( )
  Mala ( )
  No sabe, no opina ( )

5.1.5. Encuesta

La encuesta o investigación estadística es una técnica de recolección de datos en la que se obtiene la información tal como se necesita, preparada ex profeso y con objetivos estadísticos. Permite observar y registrar características en las unidades de análisis de una determinada población o muestra, delimitada en el tiempo y en el espacio. En toda encuesta se hace uso de un cuestionario, cuyas respuestas se registran en el formulario o cédula.

Cuando una encuesta está dirigida a la totalidad de elementos de una población, se llama **censo**; en tanto, cuando está dirigida a una parte representativa (muestra de una población) se llama **encuesta por muestreo**.

Hay cuatro maneras de obtener los datos y la información con la técnica de la encuesta:

- Con una entrevista o diálogo con el encuestado sobre la base de un cuestionario.
- Por empadronamiento, así el empadronador pregunta o encuesta al empadronado y registra los datos en el formulario.
- Por correo, cuando se envían los formularios por correo al domicilio del empadronado o unidad de análisis.
- Por teléfono o fax, cuando las preguntas se formulan telefónicamente.

Veamos un ejemplo de encuesta.

Estudio: PERFIL SOCIOECONÓMICO Y ACADÉMICO DEL ESTUDIANTE UNIVERSITARIO

Esta encuesta es estrictamente confidencial, tiene como finalidad recolectar datos sobre aspectos socio económicos, familiares y académicos del estudiante, a fin de disponer de un marco de referencia; por tanto, agradecemos responder con la mayor sinceridad y seriedad. Coloque una "×" en el paréntesis de su respuesta.

CÓDIGO o MATRÍCULA: Especialidad:	AÑO o CICLO:

I. DATOS GENERALES

1.1. SEXO: Hombre ( ) Mujer ( )	1.2. EDAD en años: Fecha de nacimiento:	1.3. ¿En qué distrito vive o reside actualmente?

1.4. LUGAR DE NACIMIENTO: Provincia: Departamento: Distrito:	1.5. ESTADO CIVIL: Soltero ( ) Casado ( ) Viudo ( ) Divorciado ( ) Conviviente ( ) Separado ( )

II. ANTECEDENTES EDUCATIVOS DE LA SECUNDARIA

2.1. ¿En qué colegio terminó la educación secundaria? Estatal ( ) No estatal ( )	2.2. ¿Dónde está ubicado su colegio? Distrito: Provincia:
2.3. ¿Cuándo (fecha) terminó la educación secundaria?	2.4. ¿Qué año de estudio repitió alguna vez? (1.º) (2.º) (3.º) (4.º) (5.º)
2.5. Indique las tres asignaturas que más le agradaban durante la secundaria. 1. 2. 3.	2.6. ¿Qué asignaturas desaprobó alguna vez en secundaria? 1. 2. 3.
2.7. ¿Está Ud. siguiendo la profesión que pensó estudiar? SÍ ( ) NO ( ) ¿Qué carrera profesional le gustaría seguir?	

III. ANTECEDENTES ECONÓMICOS DEL ESTUDIANTE

3.1. ¿Trabaja actualmente en algo? SÍ ( ) NO ( ) ¿Dónde?	3.2. ¿Qué hace o qué cargo desempeña?
3.3. Si trabaja, ¿en cuántos soles estima sus ingresos mensuales? ( ) menos de 500 ( ) de 500 a 1000 ( ) de 1001 a 1500 ( ) de 1501 a 2000 ( ) de 2001 a 3000 ( ) más de 3000	3.4. Si no trabaja, ¿de quién depende económicamente? 3.5. ¿Cuándo (año) empezó a trabajar por primera vez?

IV. ASPECTOS ACADÉMICOS UNIVERSITARIOS

4.1. ¿Cuándo postuló por primera vez a una universidad?

4.2. ¿Cuándo ingresó por primera vez a esta universidad?

4.3. ¿En qué asignaturas o cursos está matriculado actualmente?

1.
2.
3.
4.
5.
6.

4.4. ¿Qué asignaturas de semestres o años anteriores le falta aprobar?

1.
2.
3.

4.5. ¿En qué ciclo o año de estudios está matriculado ahora?

4.6. Indique cuánto estima que gasta al mes en

Derecho de enseñanza: S/

Material de enseñanza: S/

Pasajes, refrigerios, etc.: S/ _____

Total

4.7. ¿Ha seguido otra profesión?

SÍ ( ) NO ( )

¿Cuál? .....

4.8. ¿Cómo calificaría la enseñanza que viene recibiendo en la facultad?

Muy buena ( ) Buena ( )

Regular ( ) Mala ( )

V. ASPECTOS SOCIOFAMILIARES

5.1. ¿Cuántos miembros integran su familia?

5.2. ¿Vive actualmente con sus padres?

Con ambos ( ) Con uno de ellos ( )

Con ninguno ( )

5.3. Nivel educativo de sus padres

	Padre	Madre
Primaria incompleta	( )	( )
Primaria completa	( )	( )
Secundaria incompleta	( )	( )
Secundaria completa	( )	( )
Superior incompleta	( )	( )
Superior completa	( )	( )

5.4. Señale en qué intervalo se encuentran los ingresos mensuales de sus padres.

Soles	Padre	Madre
menos de 1000	( )	( )
1001 - 1500	( )	( )
1501 - 2000	( )	( )
2001 - 2500	( )	( )
2501 - 3000	( )	( )
3001 - 3500	( )	( )
más de 3500	( )	( )

5.5. Actividad económica de sus padres

	Padre	Madre
Comercio ambulatorio	( )	( )
Obrero	( )	( )
Empleado público	( )	( )
Empleado privado	( )	( )
Empresa propia	( )	( )
Profesional independiente	( )	( )
Agricultor	( )	( )
Trabajador eventual	( )	( )

5.6. La casa donde vive actualmente es

Alquilada ( ) Compra venta ( )

Propia ( )

5.7. Su familia tiene

Equipo de sonido	( )
Automóvil	( )
Televisor plasma	( )
Computadora	( )
Internet	( )

Observaciones y comentarios:

Fecha: Responsable:

6. ORGANIZACIÓN Y PRESENTACIÓN DE LOS DATOS

Cuando se realiza la recopilación de antecedentes con fines estadísticos, se obtiene una gran cantidad de datos, algunas veces estos están en su forma natural o empírica (fuentes primarias) y otras ya están organizados en tablas, cuadros y gráficos (fuentes secundarias). Los datos pueden estar incompletos, incorrectos, desordenados, pero en todos los casos constituyen los datos básicos para iniciar un estudio, además permiten conocer y analizar el comportamiento y las características de los elementos de una población.

En el trabajo estadístico siempre se dispone de muchos datos que definitivamente tienen que ser clasificados, ordenados y presentados adecuadamente, de tal manera que facilite la comprensión, la descripción y el análisis del fenómeno estudiado y sea posible obtener conclusiones válidas para la toma de decisiones.

En el trabajo estadístico, lo que se tiene disponible en un primer momento es un material numérico, producto de la observación o recopilación de datos que son categorizados, ordenados, procesados y presentados en cuadros o gráficos. Hay un proceso de resumen estadístico que se concreta con el cálculo de indicadores.

Hay dos formas de presentar ordenadamente los datos estadísticos:

- En forma tabular, como son los cuadros y tablas estadísticas
- Mediante gráficos y diagramas

Fundamentalmente, se usa la forma tabular; los gráficos se utilizan complementariamente para ilustrar mediante figuras el comportamiento de las variables y facilitar la comprensión de los fenómenos estudiados.

6.1. CUADRO ESTADÍSTICO

En general, un cuadro estadístico completo consta de ocho partes. Veamos cuáles son.

6.1.1. Número del cuadro

Es el código o elemento de identificación que permite ubicar el cuadro en el interior de un documento. El número se anota junto con la palabra "cuadro".

6.1.2. Título

Es la descripción resumida del contenido del cuadro. La redacción del título debe ser breve, clara y completa, de modo que se pueda deducir sin ambigüedad qué tipo de información contiene el cuadro.

Un título completo debe indicar lo siguiente:

- **¿Qué?** ¿Qué hay en el cuadro? Se refiere al hecho observado o la característica principal. Por ejemplo, viviendas particulares, población económicamente activa de 15 años a más, indicadores económicos, alumnos matriculados, etc.
- **¿Dónde?** Se refiere al lugar geográfico o institución a la que corresponde la información. Por ejemplo, del Perú, del departamento de Tacna, de América, de la empresa textil Cahuide S.A., de la ciudad de Trujillo, del sector minero, etc.

- **¿Cómo?** Indica cómo están ordenados o clasificados los datos en el cuadro. La variable ubicada en la fila se identifica con la preposición "por" y la variable que está en la columna se identifica con la palabra "según". Por ejemplo: por material predominante en las paredes exteriores según región natural y área; por nivel educativo según ramas de actividad; por fuentes de financiamiento según programas; por sexo según estado civil, etc.
- **¿Cuándo?** A qué momento o periodo de tiempo está referida la información, puede ser un momento específico o puntual, como también un periodo de varios años, meses o semanas, etc. Por ejemplo, censo de población periodo 1980 - 1995.

Ejemplos

Cuadro 1

PERÚ: POBLACIÓN CENSADA DE 12 Y MÁS AÑOS DE EDAD, POR NIVEL EDUCATIVO, SEGÚN ESTADO CIVIL O CONYUGAL, 1993, 2007 Y 2017 (Absoluto y porcentaje)

ESTADO CIVIL O CONYUGAL[3]	TOTAL	NIVEL EDUCATIVO								
		Total	Sin nivel	Inicial	Primaria	Secundaria	Básica especial[1]	Superior no universitario	Superior universitario	Maestría/ Doctorado[2]
Conviviente	6 195 795	100,0	3,8	0,2	22,4	47,9	0,2	13,6	11,2	0,7
Separado/a	968 413	100,0	5,6	0,3	24,4	43,1	0,1	13,8	11,6	1,0
Casado/a	5 959 966	100,0	6,3	0,2	25,5	31,7	0,1	14,7	18,7	2,9
Viudo/a	940 437	100,0	27,3	0,1	40,4	20,2	0,0	5,2	6,3	0,6
Divorciado/a	209 707	100,0	3,2	0,1	12,3	25,7	0,1	19,7	32,8	6,1
Soltero/a	8 922 073	100,0	1,8	0,2	13,1	49,5	0,3	13,0	21,0	1,0
Total	**23 196 391**	**100,0**	**4,7**	**0,2**	**20,3**	**42,8**	**0,2**	**13,4**	**16,9**	**1,5**

[1] Comprende a personas que tienen un tipo de discapacidad que dificulta un aprendizaje regular, niñas/os y adolescentes superdotadas/os o con talentos específicos.

[2] Estudios de especialización que se pueden realizar una vez concluidos los estudios del pregrado, con una duración no menor de 1 año.

[3] Excluye a la población que no especificó su estado civil o conyugal.

Fuente: INEI-Censos Nacionales de Población y Vivienda 1993, 2007 y 2017

6.1.3. Concepto o encabezamiento

Es la descripción de las filas y columnas de un cuadro estadístico. El encabezamiento se ubica en la parte superior del cuerpo del cuadro. Indica las variables y sus categorías o intervalos, también puede indicar un periodo de tiempo.

Número de cuadro → **Cuadro 2**

Título → **PERÚ: POBLACIÓN CENSADA Y CENTROS POBLADOS SEGÚN REGIÓN NATURAL**

Encabezamiento o conceptos →

Cuerpo

REGIÓN NATURAL[1]	CANTIDAD DE CENTROS POBLADOS	VIVIENDAS PARTICULARES	
		Absoluto	%
Chala	6153	4 928 821	48,8
Yunga marítima	5960	528 684	5,2
Yunga fluvial	4383	249 360	2,5
Quechua	25 042	2 017 906	20,0
Suni	20 500	1 015 187	10,0
Puna	19 984	228 627	2,3
Janca	479	13 005	0,1
Rupa Rupa	6849	551 925	5,5
Omagua	5572	569 334	5,6
Total	**94 922**	**10 102 849**	**100,0**

Nota de pie → [1] Zona delimitada por criterios geográficos, en este caso, el piso altitudinal.

Por ejemplo, en el cuadro 2, los conceptos se refieren a las regiones naturales del Perú, clasificadas en nueve categorías.

6.1.4. Cuerpo del cuadro

Es el contenido numérico del cuadro, la parte en la cual se colocan los datos correspondientes a las características o variables indicados en el encabezamiento o en los conceptos; es decir, presenta la distribución de los elementos según la clasificación en categorías de las variables.

Es recomendable colocar las cifras de los grandes totales en forma horizontal y en la parte inferior del cuerpo del cuadro.

6.1.5. Notas de pie de página o llamadas

Se usa para aclarar algunos términos o siglas y también para indicar qué elementos están o no incluidos en algunos de los conceptos del cuadro.

6.1.6. Fuente

Es la indicación al pie del cuadro que sirve para nombrar la publicación, entidad, estudio o fuente del cual se obtuvieron los datos utilizados.

La identificación de la fuente permite, si fuera el caso, comprobar la información u obtener información complementaria.

6.1.7. Nota de unidad de medida

Se escribe debajo del título original y se usa cuando se abrevia la escritura de las cifras y para expresar en qué unidades está expresada la variable.

6.1.8. Elaboración

Es una indicación que se coloca debajo de la fuente y sirve para mencionar al responsable que, utilizando datos originales o de la fuente, elaboró el cuadro estadístico final. Indica, además, la responsabilidad de la población del cuadro. A veces resulta útil indicar la fecha de elaboración.

Ejemplo

Número de cuadro → **Cuadro 3**

Título → **LA LIBERTAD: MATRIMONIOS REGISTRADOS POR AÑO DE INSCRIPCIÓN SEGÚN PROVINCIA (2007 - 2013)**

Encabezamiento o conceptos →

Cuerpo

PROVINCIA	AÑO DE INSCRIPCIÓN							VARIACIÓN 2012-2013
	2007	2008	2009	2010	2011	2012	2013	
Trujillo	2724	3058	2782	1833	309	3136	2189	-947
Ascope	627	416	451	424	617	514	473	-41
Bolívar	22	21	26	35	22	37	15	-22
Chepén	281	316	376	274	340	286	249	-37
Julcán	90	96	68	61	137	57	52	-5
Otuzco	190	260	307	208	298	290	213	-77
Pacasmayo	349	370	322	364	435	384	301	-83
Pataz	128	85	87	112	154	142	83	-59
Sánchez Carrión	221	249	285	259	405	470	332	-138
Santiago de Chuco	153	193	113	109	152	121	134	-13
Gran Chimú	100	92	112	86	96	95	53	-42
Virú	508	411	378	373	577	478	436	-42
Total	**5393**	**5567**	**5307**	**4138**	**6331**	**6010**	**4530**	**-1480**

Fuente → Fuente: Registro Nacional de Identificación y Estado Civil-Reniec

Elaboración → Elaboración: Oficina Departamental de Estadística e Informática La Libertad

6.2. TABLA ESTADÍSTICA

La tabla de frecuencias o de distribución es una tabla de trabajo estadístico que presenta la distribución de un conjunto de elementos agrupados o clasificados en las diversas categorías de la variable.

En estas tablas, como producto de la operación de tabulación, se observa cuántos elementos (frecuencias o repetición) hay en cada categoría, valor o intervalo de la variable.

La tabla de frecuencia constituye la agrupación de elementos que tienen características comunes. Estas tablas presentan diversos tipos de frecuencia (absolutas, relativas o acumuladas).

6.2.1. Tablas de frecuencias para variables cuantitativas

Realizadas las observaciones o la recopilación de datos, denotaremos la variable por X y los datos originales por X_1; X_2; X_3; ...; X_n; además, X_i representa la i-ésima observación de la variable con

i: 1; 2; 3; 4; ...; n

Esto quiere decir lo siguiente:

X_1=dato de la primera observación
X_2=dato de la segunda observación
X_3=dato de la tercera observación
⋮ ⋮ ⋮
X_n=dato de la n-ésima observación

En este caso, el subíndice i es un número entero que expresa el orden de la observación. Asimismo, este conjunto de n observaciones constituye una muestra de tamaño n. No olvidemos que habrá tantos valores de X como elementos tenga la población o muestra.

Por ejemplo, si se tienen X_1; X_2; X_3; X_4; X_5; X_6 observaciones, entonces, n=6 constituye el número de observaciones realizadas, es decir, la muestra tiene seis elementos.

En general, para construir una tabla de frecuencias se requiere realizar dos operaciones: clasificación y tabulación.

Clasificación

Consiste en determinar las categorías, los distintos valores que toman las variables o los intervalos de clase.

Tabulación

Consiste en distribuir los elementos de la población en la respectiva categoría o intervalo. Aquí se contabiliza cuántos elementos hay en cada categoría, es decir, se determina cuántas veces se repite (frecuencia) cada valor.

a. Tabla de frecuencias de variables discretas

Es aquella tabla cuyos intervalos toman valores enteros, generalmente positivos.

Aplicación 1

En la siguiente muestra de 20 pequeñas empresas, se considera el número de trabajadores por empresa.

6; 6; 4; 4; 3; 3; 4; 4; 5; 5; 4; 5; 6; 2; 4; 3; 4; 6; 5; 3

Con estos datos, determine la distribución (tabla de frecuencia) de las empresas según el número de trabajadores.

Resolución

Reconocemos los siguientes elementos:

Población o muestra: 20 empresas (n=20)

Variable:

X=número de trabajadores por empresa

Datos:

X_i (i: 1; 2; 3;... ; 20)

Esto significa que hay 20 datos cuyos valores son los siguientes:

$X_1=6$	$X_2=6$	$X_3=4$	$X_4=4$	$X_5=3$
$X_6=3$	$X_7=4$	$X_8=4$	$X_9=5$	$X_{10}=5$
$X_{11}=4$	$X_{12}=5$	$X_{13}=6$	$X_{14}=2$	$X_{15}=4$
$X_{16}=3$	$X_{17}=4$	$X_{18}=6$	$X_{19}=5$	$X_{20}=3$

Para la construcción de la tabla de frecuencias, tal como se indicó anteriormente, primero se clasifican o determinan los distintos valores de X_i y luego se tabula. Veamos.

Clasificación

Se identifican los distintos valores de X_i.

Primero se ubican el mayor y menor valor de X_i.

$X_{mín}=2$ y $X_{máx}=6$

Esto quiere decir que los valores de la variable van de 2 a 6, y que al final se obtienen 2; 3; 4; 5 y 6 empleados.

La variable original X_i tiene cinco valores distintos, los cuales se denotan como y_i.

Así resulta que

$y_1=2 \quad y_2=3 \quad y_3=4 \quad y_4=5 \quad y_5=6$

En este caso,

y_i (i: 1; 2; 3; 4; 5)

Sea m el número de valores distintos de X_i

$\rightarrow m=5$

En general,

y_i (i: 1; 2; ...; m); además $m \leq n$

En la aplicación,

$n=20$ y $m=5$

Es decir, los y_i son menos que las X_i. Esto conduce a una reducción de datos.

Tabulación

Se determina cuántas empresas hay en cada una de las cinco categorías, es decir, cuántas veces se repite cada valor de y_i.

El número de veces que se repite cada y_i se denomina **frecuencia absoluta** o repetición, y se denota por f_i.

En la aplicación, como se trata de una muestra muy pequeña, se puede tabular usando rayitas o tarjados (véase cuadro 4).

En ningún caso, la construcción de una tabla de frecuencias supone pérdida de información. Al final, la suma de las repeticiones o frecuencias debe ser igual al número total de observaciones o datos originales.

Finalmente, construimos la tabla de frecuencias con los datos dados.

Cuadro 4

DISTRIBUCIÓN DE 20 EMPRESAS SEGÚN EL NÚMERO DE TRABAJADORES (2018)

Número de trabajadores	Número de veces que se repiten los distintos valores de la variable	
Valores de y_i	Tabulación con rayitas	Repeticiones o frecuencias absolutas f_i
$y_1=2$	|	$f_1=1$
$y_2=3$	||||	$f_2=4$
$y_3=4$	~~||||~~ ||	$f_3=7$
$y_4=5$	~~||||~~	$f_4=5$
$y_5=6$	|||	$f_5=3$
		$n=20$

Fuente: Registro de pequeñas empresas. Julio, 2018

Las dos columnas de la tabla que hemos construido constituyen las columnas básicas de toda tabla de frecuencias, a partir de las cuales se puede determinar otros elementos o frecuencias.

b. Tabla de frecuencias de variables continuas

Sean $X_1; X_2; X_3;...; X_n$ los datos originales, en los que X_i(i: 1; 2; ...; n) es la i-ésima observación y n es el número de observaciones.

Para construir estas tablas se deben realizar las operaciones de clasificación y tabulación.

Considerando que la variable continua toma valores racionales, se acostumbra presentar los datos utilizando intervalos de clase. Por lo tanto, la clasificación consistirá en determinar el número de intervalos (K) y la amplitud de cada intervalo (w).

En todo conjunto de valores de la variable X_i, es posible conocer el máximo y el mínimo valor de X_i.

$$X_{máx}-X_{mín}=R$$

donde R es el recorrido de la variable.

Gráficamente, el recorrido es un gran segmento.

¿Qué se puede dividir en un número arbitrario de intervalos o segmentos?

Sea K el número de intervalos, entonces la amplitud de cada intervalo (w) es

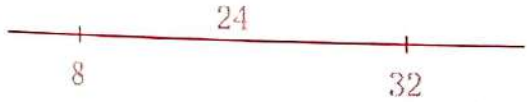
$$w=\frac{\text{recorrido total}}{\text{número de intervalos}}=\frac{X_{máx}-X_{mín}}{K}$$

$$\rightarrow \boxed{w=\frac{R}{K}}$$

El punto medio de cada intervalo se llama marca de clase y se denota por x_i (i: 1; 2; ...;K).

Ejemplo

Sea $X_{mín}=8$ y $X_{máx}=32$

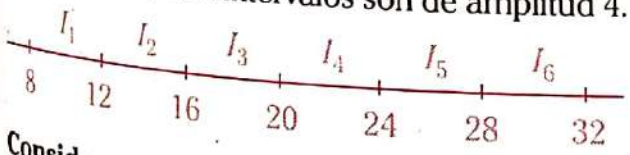


$\rightarrow R=X_{máx}-X_{mín}=32-8=24$

Luego si se divide en 6 intervalos, resulta que la amplitud de cada intervalo es

$$w=\frac{32-8}{6}=\frac{24}{6}=4$$

Gráficamente, los 6 intervalos son de amplitud 4.



Consideraciones

1. La amplitud o longitud de los intervalos no siempre es igual; pueden utilizarse amplitudes desiguales pero siempre relacionadas con una amplitud de intervalo como unidad. En general, según la amplitud, hay tres tipos de intervalos:
   a. intervalos de igual amplitud
   b. intervalos de diferente amplitud
   c. intervalos abiertos

Ejemplos

(a) Peso (kg)	(b) Edad (años)	(c) Ingresos (soles)
20,1 - 30	3 - 5	menos de 500
30,1 - 40	6 - 14	501 - 1000
40,1 - 50	15 - 24	1001 - 2000
50,1 - 60	25 - 39	2001 - 3000
60,1 - 70		3001 - 4000
		4001 a más

2. El número de intervalos (K) es arbitrario; sin embargo, es recomendable tener presente los siguientes criterios:
   - naturaleza de la variable
   - número de valores observados
   - recorrido de la variable
   - sensibilidad de la variable (unidad de medida)
   - objetivos del estudio que usa la información
3. El número y la amplitud de los intervalos de clase de una tabla exigen estar en relación con la naturaleza y el contexto del estudio. Sin embargo, algunos prefieren determinar el número de intervalos mediante la fórmula propuesta por H. A. Sturges.

$$\boxed{K=1+3{,}322\log n}$$

donde n es el número de datos.

4. Para facilitar los cálculos, se recomienda redondear la amplitud de los intervalos al número entero más cercano e inmediato superior. Esto significa que el cociente R/K es exacto. En muchos casos será necesario ampliar ligeramente el recorrido, de modo que

$$\boxed{w=\frac{X_{máx}-X_{mín}}{K}}$$

tenga un valor exacto y con el menor número de decimales; nunca se reduce la amplitud del recorrido.

5. Definidos los intervalos, cada uno de ellos se denota por $(L_i\text{-}L_s)$, donde L_i es el límite inferior y L_s es el límite superior del intervalo. Entonces la marca de clase (x_i) se calcula como

$$x_i=\frac{1}{2}(L_i+L_s)$$

6. Los extremos de un intervalo deben estar perfectamente definidos, de modo que no exista duda o ambigüedad en el momento de la tabulación. Un valor de X_i debe pertenecer a un único intervalo.
   Denominaremos el intervalo como $[L_i\text{-}L_s\rangle$, que significa que es cerrado por la izquierda y abierto por la derecha. Por ejemplo, si la variable es discreta y entera, el intervalo $[6; 9\rangle$ o $[6 - 9\rangle$ significará que la variable puede tomar valores como 6; 7 u 8.

Aplicación 2

Los sueldos mensuales (en soles) de 60 empleados de la empresa Pirámide S. A., en el año 1998, son los siguientes:

440	560	335	587	613	400	424	466	565	393
453	650	407	376	469	560	321	500	528	526
569	430	618	537	409	595	550	432	591	428
440	340	558	455	560	607	382	667	512	492
450	530	501	471	660	469	364	634	580	450
574	500	462	380	518	480	625	507	645	382

Agrupe los datos en una tabla de frecuencias.

Resolución

Identificamos los siguientes elementos:

Población: empleados de la empresa Pirámide S. A.; $n=60$

Variable: X=sueldo mensual en soles

Datos: X_i=sueldos mensuales en soles

$X_i(i: 1; 2; 3;...; 60)$; $n=60$ trabajadores

En este caso, es fácil advertir algunos datos.

$X_1=440$; $X_{10}=393$; $X_{29}=591$;

$X_{44}=471$; $X_{60}=382$

Clasificación

Se define el número y la amplitud de los intervalos de clase. Se sugiere seguir los siguientes pasos:

1. Determinar el valor máximo y mínimo de X_i
   El sueldo más alto $X_{máx}$ y el sueldo mínimo $X_{mín}$ son

   $$X_{38}=X_{máx}=S/667 \;;\quad X_{17}=X_{mín}=S/321$$

   Además, el recorrido es

   $$R=X_{máx}-X_{mín}=667-321=346$$

2. Elejir el número de intervalos (K)
   La diferencia entre el sueldo mayor y menor es 346 soles. Si aplicamos la fórmula de Sturges, se tiene

   $$K=1+3{,}322\log n$$

   $$K=1+3{,}322\log 60=6{,}9$$

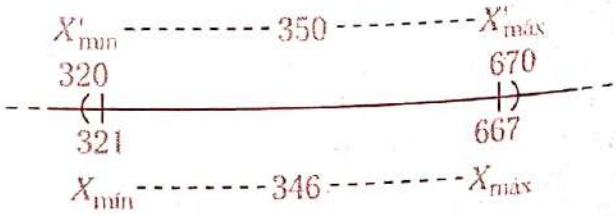
   $\rightarrow$ $K=7$ intervalos

3. Determinar la amplitud de los intervalos (w)
   Dado que $K=7$,

   $$\rightarrow\; w=\frac{X_{máx}-X_{mín}}{K}=\frac{667-321}{7}=49{,}4285$$

   Como este cociente no es exacto, se recomienda redondear, por ejemplo a 50; esto significaría ampliar ligeramente el recorrido R, de manera que la amplitud w pueda ser un número sencillo como $w=50$. Aquí el recorrido 346 se puede ampliarse a 350, que provoca una modificación de los extremos.

   Gráficamente

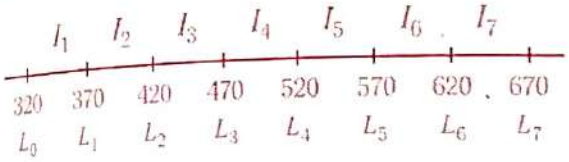


   Luego

   $$w=X'_{máx}-X'_{mín}=\frac{670-320}{7}=\frac{350}{7}=50$$

4. Construir los intervalos

Como $w=50$, el recorrido se divide en 7 intervalos o segmentos, cuyos extremos son



El extremo inferior del primer intervalo es $L_0=320$ y el extremo superior del último intervalo es $L_7=670$.

Como los extremos, según el gráfico, pertenecen a dos intervalos, es necesario precisar a qué intervalo pertenecerán. Téngase presente que un valor de X_i debe pertenecer a uno y solo uno de los intervalos.

Hay dos formas de expresar los intervalos:

Primera forma

$[L_i ; L_s\rangle$
[320; 370⟩
[370; 420⟩
[420; 470⟩
[470; 520⟩
[520; 570⟩
[570; 620⟩
[620; 670]

Segunda forma

	L_i - L_s
I_1	320 - 369,9
I_2	370 - 419,9
I_3	420 - 469,9
I_4	470 - 519,9
I_5	520 - 569,9
I_6	570 - 619,9
I_7	620 - 669,9

En la primera forma se usa un concepto matemático, el de intervalo abierto e intervalo cerrado, en el cual $[L_i; L_s\rangle$ o $[L_i\text{-}L_s\rangle$ significa que es cerrado por la izquierda y abierto por la derecha, es decir, en cada intervalo está incluido el extremo inferior (L_i), pero no el extremo superior (L_s).

La segunda forma, numéricamente, es más práctica, puesto que indica directamente los valores comprendidos en cada intervalo. En este capítulo, usaremos preferentemente la primera forma.

5. El punto medio de cada intervalo es la marca de clase que se denota con x_i, en la cual encontraremos lo siguiente:

$$x_1=\frac{320+370}{2}=345$$

$$x_2=\frac{370+420}{2}=395$$

$$x_3=\frac{420+470}{2}=445$$

$$x_4=\frac{470+520}{2}=495$$

$$x_5=\frac{520+570}{2}=545$$

$$x_6=\frac{570+620}{2}=595$$

$$x_7=\frac{620+670}{2}=645$$

6. Finalmente, organizar la tabla con el primer elemento que es la variable y sus categorías.

Intervalo de clase $[L_i ; L_s\rangle$	Marca de clase (x_i)
[320; 370⟩	$x_1=345$
[370; 420⟩	$x_2=395$
[420; 470⟩	$x_3=445$
[470; 520⟩	$x_4=495$
[520; 570⟩	$x_5=545$
[570; 620⟩	$x_6=595$
[620; 670⟩	$x_7=645$

Otra forma de plantear la atabla anterior es la siguiente:

Intervalo de clase (I_i)	Marca de clase (x_i)
[320; 370⟩	$x_1=345$
[370; 420⟩	$x_2=395$
[420; 470⟩	$x_3=445$
[470; 520⟩	$x_4=495$
[520; 570⟩	$x_5=545$
[570; 620⟩	$x_6=595$
[620; 670⟩	$x_7=645$

Tabulación

Definidos los intervalos de clases o categorías, se distribuyen los empleados según el sueldo en cada uno de los intervalos, es decir, se contabiliza (tabula) cuántos elementos o empleados se encuentran comprendidos en cada intervalo. Luego de tabular los 60 valores, se tiene el siguiente cuadro:

DISTRIBUCIÓN DE LOS SUELDOS EN CADA INTERVALO

$[L_i - L_s\rangle$	Valores de la variable (sueldos) (sueldo de cada empleado)	Número de casos (empleados) Frecuencia absoluta (f_i)
I_1: [320;370⟩	321; 335; 340; 364	4
I_2: [370;420⟩	376; 380; 382; 382; 393; 400; 407; 409	8
I_3: [420;470⟩	424; 428; 430; 432; 440; 440; 450; 450; 453; 455; 462; 466; 469; 469	14
I_4: [470;520⟩	471; 480; 492; 500; 500; 501; 507; 512; 518	9
I_5: [520;570⟩	526; 528; 530; 537; 550; 558; 560; 560; 560; 565; 569	11
I_6: [570;620⟩	574; 580; 587; 591; 595; 607; 613; 618	8
I_7: [620;670⟩	625; 634; 645; 650; 660; 667	6
$K=7$		$n=60$

Cuando se cuenta con un medio mecánico, bastará con digitar cada uno de los datos. El programa se encargará de la tabulación correspondiente en el número de intervalos indicado.

La frecuencia representa el número de empleados en cada intervalo según el sueldo.

De este modo se obtienen las frecuencias o repeticiones (f_i) y resulta el cuadro 5, en el cual se aprecian los intervalos, las marcas de clase (x_i) y las frecuencias absolutas (f_i) con $K=7$ intervalos.

Cuadro 5

DISTRIBUCIÓN DE 60 EMPLEADOS DE LA EMPRESA PIRÁMIDE S. A. POR SUELDOS MENSUALES, 2018

Intervalos $[L_i ; L_s\rangle$	Marca de clase (x_i)	N.° de trabajadores (f_i)
[320 ; 370⟩	345	4
[370 ; 420⟩	395	8
[420 ; 470⟩	445	14
[470 ; 520⟩	495	9
[520 ; 570⟩	545	11
[570 ; 620⟩	595	8
[620 ; 670⟩	645	6
	Total	$n=60$

Para cinco intervalos, la tabla de frecuencia es

$[L_i; L_s\rangle$	x_i	f_i
[320; 390⟩	355	8
[390; 460⟩	425	14
[460; 530⟩	495	16
[530; 600⟩	565	13
[600; 670⟩	635	9
$K=5$		$n=60$

¿Las tablas de frecuencia con intervalos se usan solamente para variables continuas?

No, las variables discretas también se pueden presentar en tablas con intervalos, como se aprecia en el cuadro 6.

Cuadro 6

DISTRIBUCIÓN DE 115 FAMILIAS DE LA CIUDAD DE TRUJILLO SEGÚN EL NÚMERO DE HIJOS POR FAMILIA, 1998

N.º de hijos	Marca de clase	N.º de familias
$L_i - L_s$	x_i	f_i
0 - 2	1	44
3 - 5	4	50
6 - 8	7	16
9 - 11	10	5
$K=4$		$n=115$

Por otra parte, las variables discretas también se pueden presentar en tablas sin intervalos, como se ilustra con las edades en el cuadro 7.

Cuadro 7

DISTRIBUCIÓN DE LOS ALUMNOS DEL CEP GODOFREDO GARCÍA SEGÚN EDAD - JUNIO 2017

x_i	f_i
5	3
6	18
7	12
8	9
9	7
10	4
11	6
12	7
13	14
14	10
15	8
16	13
$K=12$	$n=111$

Fuente: Fichas de matrícula (2017)
Elaboración: Estudios y Ediciones C.V.

6.2.2. Tablas de frecuencias para variables cualitativas

Un atributo es una propiedad o característica; por tanto, si se eligen n elementos para determinar los elementos que poseen la propiedad A, es posible distinguir dos grupos, los que tienen la propiedad A y los que no la tienen. Por ejemplo, consideremos la propiedad o atributo "estado civil" (variable cualitativa); si C significa "casado", se puede designar a S como "no casado". Además, numéricamente, la cantidad de casados más los no casados es igual al número total de elementos.

Ejemplo

Se encuesta a 20 personas sobre su estado civil y se obtuvo lo siguiente:

$C, S, C, C, S, S, C, C, S, C, C, S, C, C, S\ S, C, C, S, C$

Entonces, se tiene

	Cantidad	%
Casados	12	60%
Solteros	8	40%

Veamos cómo se construyen las tablas de frecuencias de estadísticas de atributos. En este caso también se designan los datos originales por $X_1; X_2; ...; X_n$.

Ejemplo

Las nacionalidades de los participantes en el Seminario Internacional de Pedagogía, realizado en Lima, fueron las siguientes:

X_1=C	X_2=B	X_3=P	X_4=E	X_5=P
X_6=Pa	X_7=P	X_8=V	X_9=C	X_{10}=B
X_{11}=P	X_{12}=Ch	X_{13}=P	X_{14}=C	X_{15}=E
X_{16}=P	X_{17}=B	X_{18}=B	X_{19}=V	X_{20}=Pa
X_{21}=Ch	X_{22}=B	X_{23}=P	X_{24}=C	X_{25}=C
X_{26}=E	X_{27}=P	X_{28}=P	X_{29}=P	X_{30}=V
X_{31}=P	X_{32}=V	X_{33}=Ch	X_{34}=C	X_{35}=P
X_{36}=V				

donde

- B: boliviano
- C: colombiano
- E: ecuatoriano
- Pa: paraguayo
- P: peruano
- Ch: chileno
- V: venezolano

Como resultado de la clasificación y tabulación, se tiene el siguiente cuadro:

Cuadro 8

DISTRIBUCIÓN DE LOS PARTICIPANTES EN EL SEMINARIO INTERNACIONAL DE PEDAGOGÍA SEGÚN NACIONALIDAD, AGOSTO 2017

Nacionalidad	f_i
Bolivianos	5
Colombianos	6
Chilenos	3
Ecuatorianos	3
Peruanos	12
Paraguayos	2
Venezolanos	5
K=7	36

6.3. ELEMENTOS DE UNA TABLA DE FRECUENCIAS

6.3.1. Valor de la variable o intervalo de clase (I_i)

Resulta de la clasificación o categorización de la variable y se representa por I_i.

6.3.2. Frecuencia absoluta (f_i)

Es el número de veces que se repite un determinado valor de la variable. En el caso de intervalos, es el número de observaciones comprendidos en dicho intervalo.

Se representa por f_i con (i: 1; 2; ... ; K); donde K representa el número de valores distintos que toma la variable X_i o el número de intervalos considerados ($K \leq n$).

6.3.3. Frecuencia relativa (h_i)

Es el cociente $\frac{f_i}{n}$ representado por h_i con (i: 1; 2;...; K), donde

$$h_i=\frac{f_i}{n}=\frac{\text{frecuencia absoluta o repetición}}{\text{número de observaciones}}$$

Es decir,

$$h_1=\frac{f_1}{n};\quad h_2=\frac{f_2}{n}$$

6.3.4. Frecuencia absoluta acumulada (F_i)

Resulta de acumular sucesivamente las frecuencias absolutas y se representa por F_i (i: 1; 2; ...; K).

$$F_1=f_1$$
$$F_2=f_1+f_2=F_1+f_2$$
$$F_3=f_1+f_2+f_3=F_2+f_3$$
$$F_4=f_1+f_2+f_3+f_4=F_3+f_4$$
$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$
$$F_K=f_1+f_2+f_3+...+f_K=F_{K-1}+f_K=n$$

6.3.5. Frecuencia relativa acumulada (H_i)

Resulta de acumular o sumar sucesivamente las frecuencias relativas. Se representa por H_i (i: 1; 2; ...; K), tal como los siguientes:

$$H_1=h_1$$

$$H_2=h_1+h_2=H_1+h_2$$

$$H_3=h_1+h_2+h_3=H_2+h_3$$

$$H_4=h_1+h_2+h_3+h_4=H_3+h_4$$

$$H_5=h_1+h_2+h_3+h_4+h_5=H_4+h_5$$

$$\vdots \qquad \vdots \qquad \vdots$$

$$H_K=h_1+h_2+h_3+...+h_K=H_{K-1}+h_K=1$$

Considerando estos elementos, se construirán las tablas de frecuencias (cuadros 9 y 10) correspondientes a los ejemplos. Observando estas tablas, puede deducirse qué condiciones cumplen los elementos de una tabla de frecuencias, las que se pueden enunciar como propiedades de las frecuencias.

6.3.6. Marca de clase (x_i)

Es el punto medio de cada intervalo.

Cuadro 9

DISTRIBUCIÓN DE 20 PEQUEÑAS EMPRESAS, SEGÚN EL NÚMERO DE TRABAJADORES, 2017

Valor de la variable (I_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia relativa (h_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)	Frecuencia relativa acumulada (H_i)
$I_1=2$	$f_1=1$	$h_1=0,05$	$F_1=1$	$H_1=0,05$
$I_2=3$	$f_2=4$	$h_2=0,20$	$F_2=5$	$H_2=0,25$
$I_3=4$	$f_3=7$	$h_3=0,35$	$F_3=12$	$H_3=0,60$
$I_4=5$	$f_4=5$	$h_4=0,25$	$F_4=17$	$H_4=0,85$
$I_5=6$	$f_5=3$	$h_5=0,15$	$F_5=20$	$H_5=1,00$
	$n=20$	1,00		

Fuente: Registro de pequeñas empresas, julio 2018
Elaboración: Estudios y ediciones R.A.

Cuadro 10

DISTRIBUCIÓN DE 60 EMPLEADOS DE LA EMPRESA PIRÁMIDE S. A. SEGÚN SUELDOS 2018

Intervalo de clase $[L_{i-1}; L_i\rangle$	Marca de clase (x_i)	Frecuencia absoluta (f_i)	Frecuencia relativa (h_i)	Frecuencia absoluta acumulada (F_i)	Frecuencia relativa acumulada (H_i)
[320; 370⟩	$x_1=345$	$f_1=4$	$h_1=0{,}067$	$F_1=4$	$H_1=0{,}067$
[370; 420⟩	$x_2=395$	$f_2=8$	$h_2=0{,}133$	$F_2=12$	$H_2=0{,}200$
[420; 470⟩	$x_3=445$	$f_3=14$	$h_3=0{,}234$	$F_3=26$	$H_3=0{,}434$
[470; 520⟩	$x_4=495$	$f_4=9$	$h_4=0{,}150$	$F_4=35$	$H_4=0{,}584$
[520; 570⟩	$x_5=545$	$f_5=11$	$h_5=0{,}183$	$F_5=46$	$H_5=0{,}767$
[570; 620⟩	$x_5=595$	$f_6=8$	$h_6=0{,}133$	$F_6=54$	$H_6=0{,}900$
[620; 670⟩	$x_7=645$	$f_7=6$	$h_7=0{,}100$	$F_7=60$	$H_7=1{,}000$
$K=7$		$n=60$	1,000		

Fuente: Registro de pequeñas empresas, julio 2018 Elaboración: Estudios y ediciones C.V.

Propiedades

1. Las frecuencias absolutas (f_i) y la frecuencia absoluta acumulada (F_i) son números enteros no negativos y no mayores que n.

$$0 \le f_i \le n \qquad 0 \le F_i \le n$$

2. Las frecuencias relativas (h_i) y la frecuencia relativa acumulada (H_i) son, por lo general, decimales no negativos y no mayores que la unidad

$$0 \le h_i \le 1 \qquad 0 \le H_i \le 1$$

3. La suma de todas las frecuencias absolutas es igual al tamaño de la muestra.

$$f_1+f_2+f_3+\ldots+f_K=\sum_{i=1}^{K} f_i=n$$

4. La suma de todas las frecuencias relativas es igual a la unidad.

$$h_1+h_2+h_3+\ldots+h_K=\sum_{i=1}^{K} h_i=1$$

5. La última frecuencia absoluta acumulada es igual al tamaño de la muestra, puesto que incluye a todos los valores.

$$F_K = n$$

6. La última frecuencia relativa acumulada es igual a la unidad.

$$H_K = 1$$

7. Toda frecuencia acumulada (absoluta o relativa) es mayor o igual que una anterior y menor o igual que una posterior.

$$f_1 = F_1 \leq F_2 \leq F_3 \leq \ldots \leq F_{K-1} \leq F_K = n$$

$$h_1 = H_1 \leq H_2 \leq H_3 \leq \ldots \leq H_{m-1} \leq H_m = 1$$

6.4. REPRESENTACIÓN GRÁFICA

Un gráfico estadístico es la representación de un fenómeno estadístico por medio de figuras geométricas (puntos, líneas, rectángulos, paralelepípedos, etc.), cuyas dimensiones son proporcionales a la magnitud de los datos representados. El gráfico es un auxiliar del cuadro estadístico y no lo sustituye, sino que lo complementa.

6.4.1. Representación gráfica de variables cuantitativas

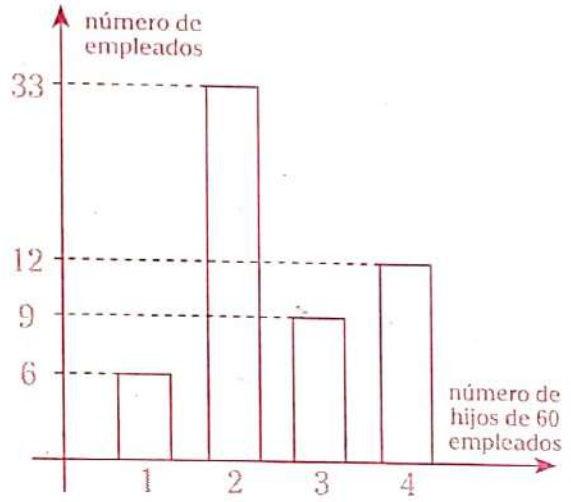
Veamos ejemplos de variables cuantitativas.

1. Número de hijos de los 60 empleados de una empresa (variable cuantitativa discreta).
2. Pesos de los 60 empleados de una empresa (variable cuantitativa continua).

a. Diagrama de barras

Esta representación gráfica se usa cuando se tienen muchos datos pero pocos valores distintos de la variable. Dicho diagrama se elabora colocando en el eje de las abscisas los distintos valores de la variable y sobre cada una de ellas se levanta una línea perpendicular (barra), cuya altura es la frecuencia (absoluta o relativa) del valor correspondiente.

Grafiquemos el ejemplo 1.

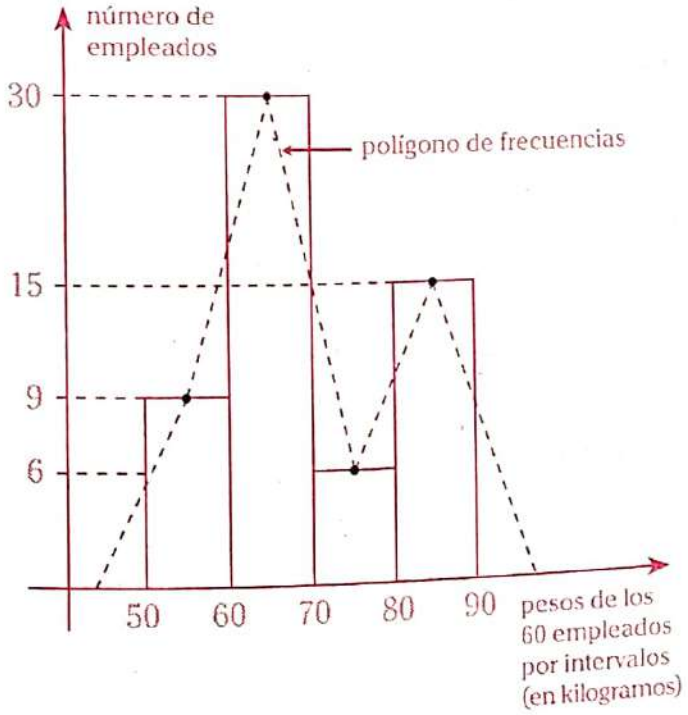


Este diagrama no tiene uso si la variable es continua.

b. Histograma

Es la representación gráfica de una distribución de frecuencias agrupadas en intervalos de clase, mediante una serie de rectángulos contiguos que tienen sus bases sobre el eje horizontal, con centros en las marcas de clase y de longitud igual al tamaño de los intervalos de clase, mientras que las alturas son proporcionales a la frecuencia (absoluta o relativa) tomadas sobre el eje vertical.

Grafiquemos el ejemplo 2.



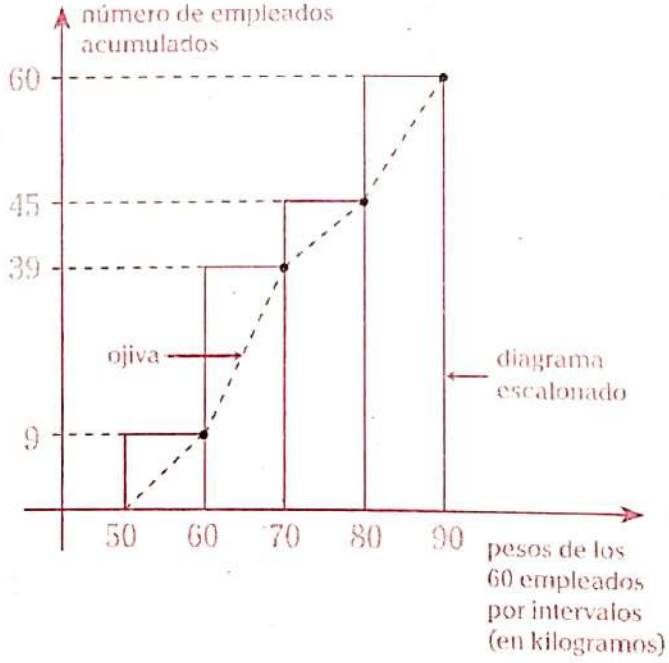
En el diagrama anterior se observa lo siguiente:

- No tiene uso si la variable es discreta.
- Los polígonos de frecuencias absolutas o relativas se obtienen uniendo los puntos medios de las bases superiores de los rectángulos en el histograma de frecuencias absolutas o relativas, respectivamente. También notamos que se ha agregado un intervalo de clase, de cero observaciones en cada extremo de la distribución, lo cual permite al polígono alcanzar el eje horizontal en ambos extremos.
- El área encerrada por los rectángulos del histograma coincide con el área encerrada por el polígono de frecuencias.

c. Diagrama escalonado

Es la representación gráfica de una distribución de frecuencias absolutas o frecuencias relativas acumuladas.

Grafiquemos el ejemplo 2.



En el diagrama anterior se observa lo siguiente:

- Este diagrama se genera de manera similar a un histograma, con la diferencia de que las alturas de los rectángulos correspondientes a cada intervalo de clase son frecuencias absolutas o relativas acumuladas.
- La ojiva es la representación gráfica de una distribución de frecuencias absolutas o frecuencias relativas acumuladas.

d. Diagrama circular

Este sistema de representación, conocido también como gráfico de sectores o de pastel, se emplea, principalmente, con fines comparativos cuando se quiere mostrar los diversos componentes de una serie de valores de la variable comparada con el total.

Para construir el gráfico de sector se utiliza una circunferencia, que tiene un círculo que se divide en sectores, y esta división es tal que sus medidas angulares centrales y la superficie del sector circular son proporcionales a los valores de la variable que representa. Al total le corresponde el círculo completo, es decir, los 360° de la circunferencia.

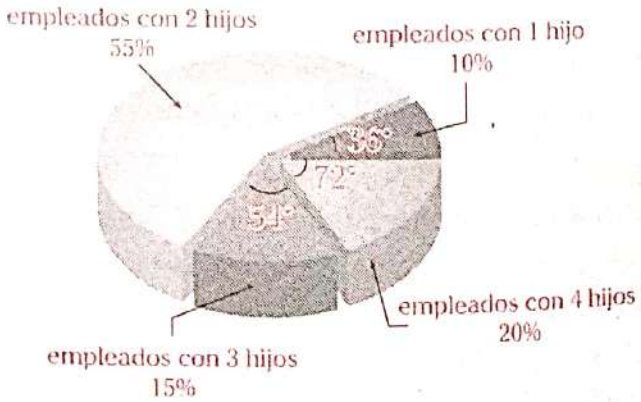
(n.° de datos) DP (ángulo)

Del ejemplo 1, para los empleados que tienen 4 hijos se tiene que

$$\frac{\overset{\text{n.° de datos}}{60}}{12} = \frac{\overset{\text{ángulo central}}{360°}}{x}$$

$\rightarrow \quad x = 72°$

Grafiquemos.



Total = 60 empleados

Este diagrama no tiene uso si la variable es continua.

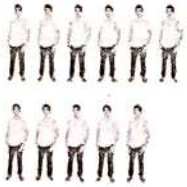
e. Pictograma

Es la representación por medio de símbolos y que por su forma sugiere la naturaleza de los datos. Consiste en tomar como unidad un símbolo arbitrario para el que se debe fijar previamente el valor que se le asignó como tal unidad.

Del ejemplo 1, tomamos la siguiente unidad:

=3 empleados

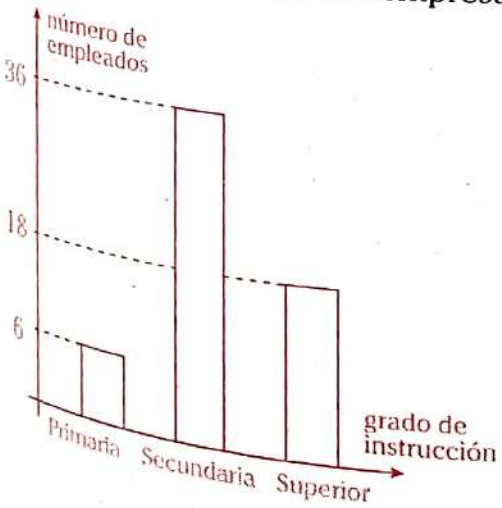
Entonces se tiene que

- empleados con 1 hijo:
- empleados con 2 hijos: 
- empleados con 3 hijos:
- empleados con 4 hijos:

6.4.2. Representación gráfica de variables cualitativas

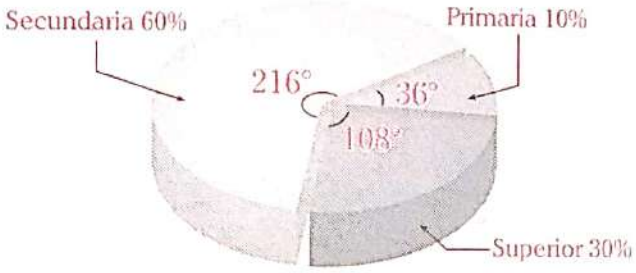
a. Diagrama de barras

Evaluemos y grafiquemos el grado de instrucción de los 60 empleados de una empresa.



b. Diagrama circular

Grafiquemos el ejemplo anterior.



c. Pictograma

Consideremos los siguientes datos:

- $\begin{pmatrix}\text{n.º de empleados} \\ \text{procedentes de la Costa}\end{pmatrix} = 20$
- $\begin{pmatrix}\text{n.º de empleados} \\ \text{procedentes de la Sierra}\end{pmatrix} = 30$
- $\begin{pmatrix}\text{n.º de empleados} \\ \text{procedentes de la Selva}\end{pmatrix} = 10$

Tomando como unidad =10 empleados, se tiene lo siguiente:

- empleados provenientes de la Costa:
- empleados provenientes de la Sierra:
- empleados provenientes de la Selva:

7 ▸ MEDIDAS DE POSICIÓN

Dado un conjunto de datos, se sabe que el promedio de ellos es un valor que representa el centro del conjunto de los valores dados, por lo que afirmamos que los promedios son medidas de centralización.

7.1. MEDIA ARITMÉTICA ($\overline{MA}$; $\overline{X}$)

Se le conoce también como **media** o **promedio aritmético**; este es el promedio más usado por todos nosotros y el más fácil de calcular. Podemos determinar, por ejemplo, el salario medio, el precio medio, el rendimiento medio, la temperatura media, etc. La media aritmética se utiliza tanto en datos no tabulados como en datos tabulados.

7.1.1. Para datos no tabulados

Dado un conjunto de N números

$a_1; a_2; a_3; ...; a_N$

la media aritmética se define como

$$\bar{x}=\frac{a_1+a_2+a_3...+a_N}{N}=\frac{\sum_{i=1}^{N} a_i}{N}$$

Ejemplos

- Los gastos diarios en movilidad de una persona son 3; 2; 5; 4; 6; 3. Su promedio de gastos en movilidad será

$$\bar{x}=\frac{3+2+5+4+6+3}{6}=3{,}8\widehat{3}$$

- Las notas de un alumno obtenidas en 6 materias son 11; 13; 14; 14; 16; 16. Entonces su promedio será

$$\bar{x}=\frac{11+13+14+14+16+16}{6}=14$$

7.1.2. Para datos tabulados

Sean $x_1; x_2; x_3; ...; x_K$ las marcas de clase de los K intervalos de una distribución; además, $f_1; f_2; f_3; ...; f_K$ son las frecuencias absolutas de los N intervalos, respectivamente. Entonces la media aritmética se define como

$$\bar{x}=\frac{x_1\times f_1+x_2\times f_2+x_3\times f_3+...+x_K\times f_K}{n} \quad (*)$$

$$\bar{x}=\frac{\sum_{i=1}^{K} x_i\times f_i}{n}$$

Ya que también se sabe que $\left(\frac{f_i}{n}=h_i\right)$,

reemplazamos en (*).

$$\bar{x}=x_1\times\frac{f_1}{n}+x_2\times\frac{f_2}{n}+x_3\times\frac{f_3}{n}+...+x_K\times\frac{f_K}{n}$$

$$\rightarrow \quad \bar{x}=x_1\times h_1+x_2\times h_2+x_3\times h_3+...+x_K\times h_K$$

De ahí se tiene que

$$\bar{x}=\sum_{i=1}^{K} x_i\times h_i \quad ; \; h_i\text{: frecuencia relativa}$$

Ejemplo

La siguiente tabla corresponde al ingreso mensual promedio, en soles, de cierto número de familias.

I_i	x_i	f_i	h_i
[300; 500⟩	400	40	40%
[500; 700⟩	600	36	36%
[700; 900⟩	800	14	14%
[900; 1100⟩	1000	10	10%
		100	

$$\rightarrow \quad \bar{x}=\frac{400\times 40+600\times 36+800\times 14+1000\times 10}{100}$$

$$\bar{x}=4(40)+6(36)+8(14)+10(10)$$

$$\bar{x}=588$$

Otra forma

$$\bar{x}=\sum h_i x_i$$

$$\bar{x}=40\,\%(400)+36\,\%(600)+14\,\%(800)+10\,\%(1000)$$

$$\bar{x}=588$$

7.1.3. Características de la $\overline{MA}$

1. En su cálculo intervienen todos los datos, por lo tanto, dichos datos se ven alterados por la variación de cualquiera de ellos. En particular, la variación de los valores extremos producen grandes modificaciones.
2. Es la media más utilizada en comparación con la media geométrica, además la $\overline{MA}$ es más adecuada cuando se trata de promediar incrementos porcentuales.

3. La media aritmética ponderada es bastante útil cuando se considera que los distintos valores promediados tienen una importancia desigual.

7.2. MEDIANA (Me)

Es el valor que divide el total de observaciones (n), debidamente ordenadas o tabuladas, en dos partes de igual tamaño. La mediana dependerá de la cantidad de datos, mas no de los valores de estos.

7.2.1. Para datos no tabulados

Para datos obtenidos de una muestra, se tienen dos casos:

Caso 1

Cuando se tiene un número impar de datos, la mediana será igual al valor del término central.

Ejemplo

Se tiene los números de hijos de siete familias, los cuales son 5; 1; 6; 1; 2; 1; 4.

Ordenamos los datos.

$$1;1;1;\boxed{2};4;5;6$$

Notamos que el dato central es 2, por lo que el cuarto dato es la mediana.

$\rightarrow Me=2$

Caso 2

Cuando se tiene un número par de datos, la mediana es igual a la semisuma de los dos términos centrales.

Ejemplo

Se tienen las cantidades de alumnos que asistieron a un aula de clases en los últimos seis días: 26; 20; 21; 30; 25; 21.

Ordenamos los datos.

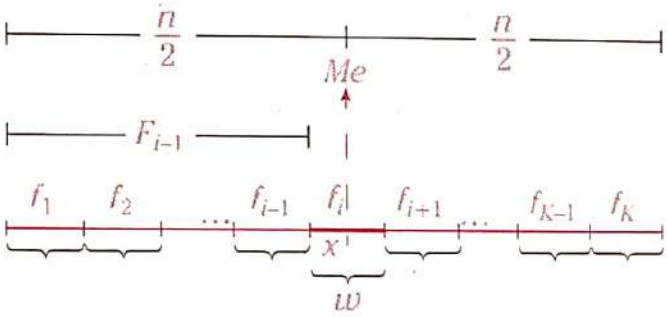
$$20;21;\boxed{21;25};29;30$$

$$\rightarrow Me=\frac{21+25}{2}=23$$

7.2.2. Para datos tabulados

Cuando se tengan datos clasificados por una cantidad de intervalos, se tiene que hallar el dato que divide en dos partes de igual tamaño la muestra y, para ello, nos ayudaremos de la proporcionalidad.

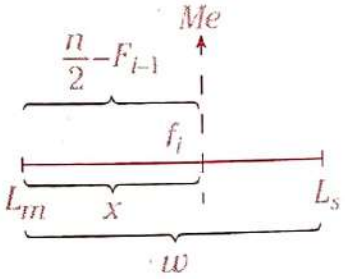
Se tiene una distribución de K intervalos de ancho de clase común con frecuencias absolutas $f_1; f_2; f_3; ..; f_K$, en donde $F_K=n$.



donde

- n: total de datos
- w: ancho de clase común
- x: cantidad de datos dentro de un intervalo

Notamos que la mediana se encuentra en el i-ésimo intervalo, por lo que en ese intervalo se tiene que



donde

- L_m: límite inferior del intervalo en el que está la Me
- L_s: límite superior del intervalo en el que está la Me

Por proporcionalidad diremos que

$$\frac{\frac{n}{2}-F_{i-1}}{f_i}=\frac{x}{w} \rightarrow x=\frac{w\left(\frac{n}{2}-F_{i-1}\right)}{f_i}$$

Finalmente, se obtiene que

$$Me = L_m + x = L_m + w \times \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

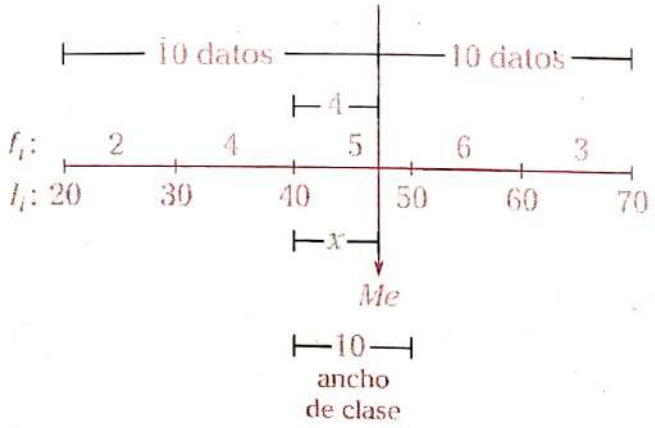
Aplicación 3

Halle la mediana de los siguientes datos clasificados:

I_i	f_i	F_i
[20; 30⟩	2	2
[30; 40⟩	4	6
[40; 50⟩	5	11
[50; 60⟩	6	17
[60; 70]	3	20

Resolución

Acomodamos los datos de la siguiente manera:



Por proporcionalidad se cumple que

$$\frac{4}{5} = \frac{x}{10} \rightarrow x = 8$$

$$\therefore \quad Me = 40 + x = 48$$

Otra forma

I_i	f_i	F_i	H_i
[20; 30⟩	2	2	0,10
[30; 40⟩	4	$\boxed{6}$	0,30
[40; 50⟩	5	11	0,55
[50; 60⟩	6	17	0,85
[60; 70]	3	20	1,00
	$n=20$		

Determinamos primero el intervalo de la clase mediana. Este es aquel primer intervalo cuya frecuencia relativa acumulada es igual o excede a 0,5.

Aplicamos la fórmula.

$$Me = L_m + w \times \left(\frac{\frac{n}{2} - F_{i-1}}{f_i} \right)$$

$$\rightarrow \quad Me = 40 + 10 \times \left[\frac{\frac{20}{2} - 6}{5} \right]$$

$$Me = 40 + 8$$

$$\therefore \quad Me = 48$$

En el caso de la mediana, encontramos un valor que divide en dos partes de igual tamaño la distribución, pero también la podemos dividir en 4; 10; 100 partes que tengan el mismo tamaño.

7.2.3. Propiedades de la mediana

1. Utiliza menos información que la media, ya que solo depende del orden de los datos; sin embargo, su mayor ventaja es que no se ve influida por los valores extremos.
2. La relación entre la media y la mediana determina la simetría de la distribución.

   $Me < \bar{x}$: La distribución es asimétrica positiva.

   $Me = \bar{x}$: La distribución es simétrica.

   $Me > \bar{x}$: La distribución es asimétrica negativa.

7.3. MODA (*Mo*)

Es el valor que se presenta con mayor frecuencia en un grupo de datos.

Tenga en cuenta lo siguiente:

- A la distribución que tiene una sola moda se le llama **unimodal**.
- A la distribución que tiene dos modas se le llama **bimodal**.
- A la distribución que tiene más de dos modas se le llama **multimodal** (trimodal, tetramodal, etc.).
- En el caso de que ningún valor se repita más que los otros, se dice que no existe moda.

7.3.1. Para datos no tabulados

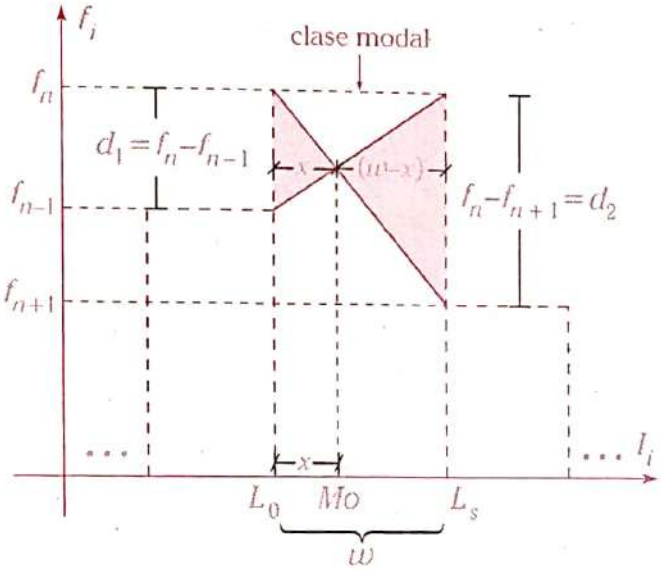
Cuando se tengan datos no clasificados, solo se tiene que ver cuál se repite más.

Ejemplos

- Sean las edades de 9 personas: 17; 18; 16; 15; 18; 16; 18; 15; 17. Entonces se dirá que la edad 18 es la que más se repite (3 veces). En este caso, la distribución es unimodal; por consiguiente, $Mo=18$.
- Sean las notas, en el curso de Matemática, de 10 alumnos: 17; 11; 12; 12; 16; 12; 13; 16; 15; 16. Entonces se dirá así que las notas 12 y 16 se repiten la misma cantidad de veces (3 veces). En este caso la distribución es bimodal.
- Se tiene el número de infracciones cometidas por una persona en estos siete últimos meses a bordo de su automóvil en las autopistas del Cercado de Lima: 12; 1; 5; 10; 3; 7; 4. Entonces se dirá que no existe un dato que se repita más que otro, por lo que en este caso no existe moda.

7.3.2. Para datos tabulados

Cuando se tengan datos clasificados en una cierta cantidad de intervalos, para poder hallar la moda, será necesario construir el histograma de la distribución e identificar la clase modal (aquella clase con mayor altura). Tenga en cuenta que la distribución puede ser multimodal. Veamos.



donde

- L_0: límite inferior de la clase modal
- L_s: límite superior de la clase modal
- w: ancho de la clase común
- f_n: frecuencia de la clase modal
- f_{n-1}: frecuencia de la clase inmediata anterior a la clase modal
- f_{n+1}: frecuencia de la clase inmediata posterior a la clase modal

Se observa que

$$Mo=L_0+x$$

Realizamos semejanza con los triángulos sombreados.

$$\rightarrow \quad \frac{w-x}{d_2}=\frac{x}{d_1}=\frac{w}{d_1+d_2} \quad \rightarrow \quad x=w\times\left[\frac{d_1}{d_1+d_2}\right]$$

Finalmente, se tiene que

$$\boxed{Mo=L_0+w\times\left[\frac{d_1}{d_1+d_2}\right]}$$

siendo $d_1=f_n-f_{n-1} \quad \wedge \quad d_2=f_n-f_{n+1}$

Aplicación 4

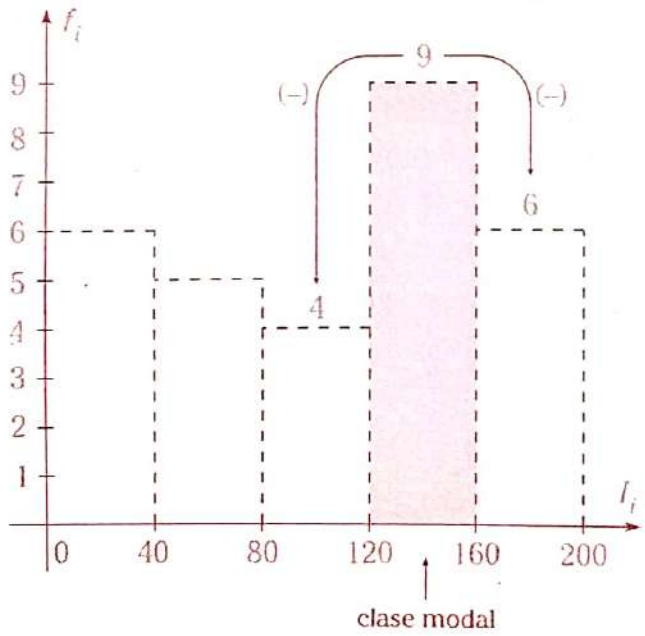
Sea la siguiente tabla con datos clasificados:

I_i	f_i
[0; 40⟩	6
[40; 80⟩	5
[80; 120⟩	4
[120; 160⟩	9
[160; 200]	6

Halle la moda.

Resolución

Graficamos.



A partir del gráfico se tiene que

- $d_1=9-4=5$
- $d_2=9-6=3$
- $w=40$

$\rightarrow \quad Mo=L_0+w\left[\dfrac{d_1}{d_1+d_2}\right]$

$$Mo=120+40\left[\frac{5}{5+3}\right]$$

$\therefore \quad Mo=145$

Aplicación 5

Se tienen los siguientes datos:

9; 9; 10; 10; 11; 12; 13; 14; 14; 14; 16; 20

Halle $\bar{x}+Me+Mo$.

Resolución

Debemos hallar independientemente $\bar{x}$; Me y Mo.

Veamos.

$$\bar{x}=\frac{9+9+10+10+11+12+13+14+14+14+16+20}{12}$$

$\rightarrow \quad \bar{x}=12,\widehat{6}$

Dado que el número de datos es par y están ordenados, entonces

$$Me=\frac{12+13}{2}=12,5$$

El valor que se repite con mayor frecuencia es 14.

$\rightarrow \quad Mo=14$

$\therefore \quad \bar{x}+Me+Mo=39,1\widehat{6}$

Aplicación 6

Las edades de seis personas presentan como media 22,5; además, como moda y mediana presentan 19. ¿Cuál es la máxima edad que podría tener alguno de ellos si ninguno es menor de 14 años?

Resolución

Sean las edades $14\leq a\leq b\leq c\leq d\leq e\leq f$, de las cuales f es máximo.

Por dato

$$\bar{x}=\frac{a+b+c+d+e+f}{6}=22,5$$

$\rightarrow \quad a+b+c+d+e+f=135$

Como $Me=Mo=19$ y f tiene que ser máximo, entonces el resto de valores deben ser mínimos.

$$\begin{array}{cccccc} a & b & c & d & e & f \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ 14+ & 14+ & 19+ & 19+ & 19+ & f=135 \end{array}$$

$\therefore \quad f_{\text{máximo}}=50$

Aplicación 7

Las notas de un examen rendido por 10 alumnos fueron 6; 7; 7; 8; 9; 11; 12; 14; 14 y 15. Si para aprobar, la nota debe ser mayor que la media y la mediana, ¿cuál es el tanto por ciento de aprobados en dicho examen?

Resolución

Primero hallemos $\bar{x}$ (media).

$$\bar{x}=\frac{6+7+7+8+9+11+12+14+14+15}{10}$$

$\rightarrow \bar{x}=10{,}3$

Como la cantidad de datos es par, entonces

$$Me=\frac{9+11}{2}=10$$

Por consiguiente, aprobarán todos los que tengan notas mayores a 10,3. Se observa entonces que habrá 5 aprobados.

$$\therefore \text{ \% de aprobados}=\frac{5}{10}\times 100\,\%=50\,\%$$

Aplicación 8

Las estaturas, en centímetros, de 200 personas se muestran en la tabla adjunta. Según ello, determine lo siguiente:

I. ¿Qué tanto por ciento tiene una estatura comprendida entre 150 cm y menos de 170 cm?

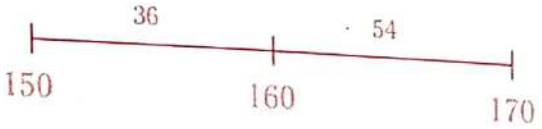
II. ¿Cuántas personas tienen una estatura entre 155 cm y 175 cm?

III. ¿Qué tanto por ciento tiene una estatura comprendida entre 152,5 cm y 187,5 cm?

Estatura	N.° de personas
[140 - 150⟩	30
[150 - 160⟩	36
[160 - 170⟩	54
[170 - 180⟩	48
[180 - 190⟩	32

Resolución

I. Para este caso basta con analizar los siguientes intervalos:



En dicho intervalo hay

$36+54=90$ personas

Como deseamos saber qué tanto por ciento representa, tendremos

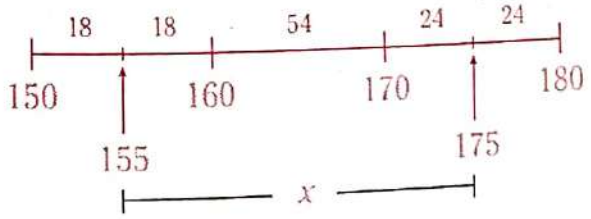
$$\frac{90}{200}\times 100\,\%=45\,\%$$

Como la variable es continua, obtendríamos el mismo resultado si la pregunta fuera entre 150 cm y 170 cm.

Por lo tanto, la respuesta es 45 %.

II. Cuando los valores no se encuentran entre los límites inferior o superior de alguna clase, formamos una proporción.
Veamos ahora para estaturas entre 155 cm y 175 cm.

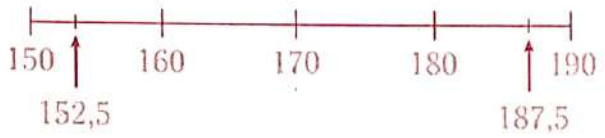
Observamos que tanto 155 como 175 se ubican en la mitad de su respectivo intervalo, por lo cual se acumulará hasta dicho punto la mitad del total de datos correspondientes a dicho intervalo. En nuestro gráfico anterior tendremos lo siguiente:



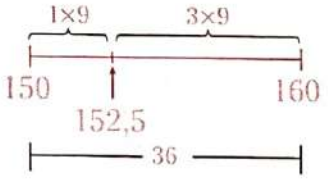
$\rightarrow x=18+54+24$

Por lo tanto, el número de personas es 96.

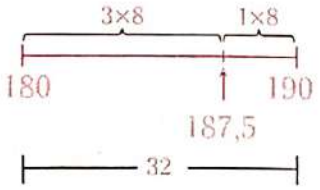
III. Ahora veamos para todo el intervalo comprendido entre 152,5 cm y 187,5 cm.



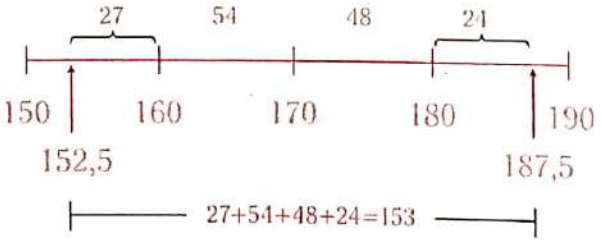
Vemos que 152,5 divide al intervalo [150-160⟩ en la relación de 1 a 3, entonces de la misma forma se distribuirán los datos en dicho intervalo.



También 187,5 divide al intervalo [180-190⟩ en la relación de 3 a 1, entonces de la misma forma se distribuirán los datos en dicho intervalo.



Finalmente,



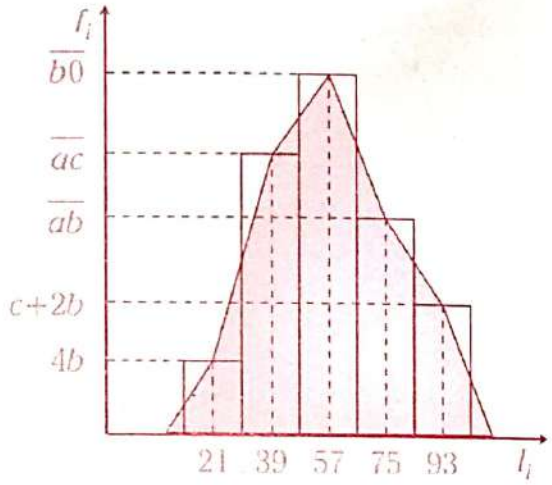
Luego, el tanto por ciento con estatura entre 152,5 cm y 187,5 cm será

$$\frac{153}{200}\times 100\,\%=76{,}5\,\%$$

Por lo tanto, el porcentaje es 76,5 %.

Aplicación 9

Dado el siguiente histograma, en el cual el área de la región sombreada es $\overline{aacb}$ u^2, calcule la mediana.



Resolución

Del gráfico se obtiene que el ancho de clase es 18.

Entonces

l_i	f_i
[12 - 30⟩	$4b$
[30 - 48⟩	$\overline{ac}$
[48 - 66⟩	$\overline{b0}$
[66 - 84⟩	$\overline{ab}$
[84 - 102⟩	$c+2b$

Además,

$$4b < (c+2b) < \overline{ab} < \overline{ac} < \overline{b0}$$

De lo anterior, se deduce que

$$a < b \quad \text{y} \quad 2b < c < 10 \qquad \text{(I)}$$

Por dato

$$\text{área}=\overline{aacb}$$

Como $\text{área}=\sum_{i=1}^{5} f_i w$

$$\rightarrow\ 18(4b+\overline{ac}+\overline{b0}+\overline{ab}+c+2b)=\overline{aacb}$$

$$18(17b+20a+2c)=\overline{aacb}$$

Luego,

$$\overline{aacb}=\overset{\circ}{2} \ \rightarrow\ b=2 \ \text{ o } \ b=4$$

Además, se verifica que

$$\overline{aacb}=\overset{\circ}{9} \ \rightarrow\ 2a+c+b=9 \qquad \text{(II)}$$

Verifiquemos con ambos valores de b.

- Si $b=2$

  $\rightarrow a=1$; pues $a<b$

  $c=5$ (en II)

- Si $b=4$

  $\rightarrow c=9$ (en I)

  $a=7$ (en II) No cumple, ya que $a<b$

$\rightarrow a=1;\ b=2;\ c=5$

Reemplazamos en la tabla de frecuencias.

I_i	f_i	F_i
[12 - 30⟩	8	8
[30 - 48⟩	15	23
[48 - 66⟩	20	43
[66 - 84⟩	12	55
[84 - 102]	9	64

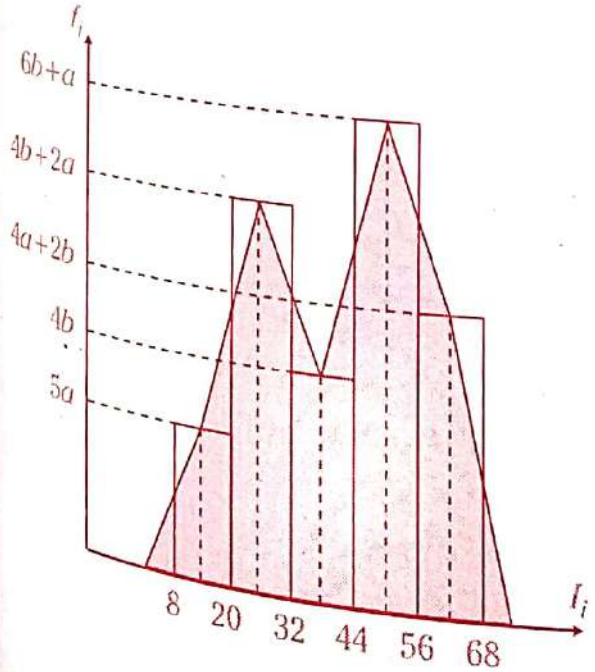
Nos piden la mediana. Sabemos que

$$Me=\underbrace{L_m}_{48}+\underbrace{w}_{18}\left(\frac{\overbrace{\boxed{\frac{n}{2}}}^{32}-\overbrace{F_{i-1}}^{23}}{\underbrace{f_i}_{20}}\right)$$

$\therefore\ Me=56{,}1$

Aplicación 10

Se tiene el siguiente histograma, en el cual a y b son enteros positivos.



Si la mediana es 42 y el área del polígono de frecuencias es mínima, ¿qué tanto por ciento del total de datos se encuentran en el intervalo [29 - 53]?

Resolución

Del gráfico obtenemos la siguiente tabla:

I_i	f_i	F_i
[8 - 20⟩	$5a$	$5a$
[20 - 32⟩	$4b+2a$	$7a+4b$
[32 - 44⟩	$4b$	$7a+8b$
[44 - 56⟩	$6b+a$	$8a+14b$
[56 - 68]	$4a+2b$	$12a+16b$

Se sabe que el área es mínima.

(área)$=w\times n$

(área)$=12(12a+16b)$

(área)$=48(3a+4b)$

Entonces el área será mínima si a y b son mínimos.

Además,

$Me=42$

De la tabla, se tiene que

$$\underbrace{Me}_{42}=\underbrace{L_m}_{32}+\underbrace{w}_{12}\left(\frac{\overbrace{\boxed{\frac{n}{2}}}^{6a+8b}-\overbrace{F_{i-1}}^{7a+4b}}{\underbrace{f_i}_{4b}}\right)$$

$$\rightarrow \frac{10}{12}=\frac{4b-a}{4b}$$

$$20b=24b-6a$$

$$6a=4b$$

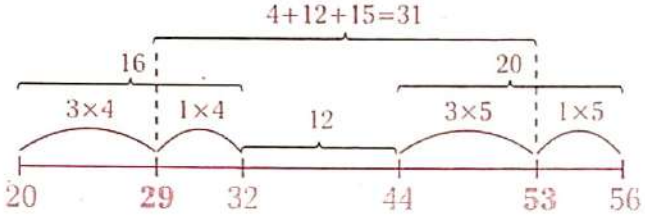
$$\frac{a}{b}=\frac{2}{3}$$

Como a y b son mínimos, entonces

$a=2$ y $b=3$

$\rightarrow n=72$

Ahora calculemos cuántos datos hay en el intervalo [29 - 53].



Por lo tanto, en el intervalo [29 - 53] se tienen 31 datos, los cuales, en tanto por ciento, representan

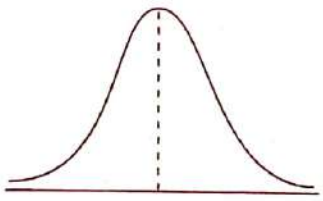
$$\frac{31}{72}\times 100\,\% = 43{,}0\widehat{5}\,\%$$

7.4. RELACIÓN ENTRE MODA, MEDIA Y MEDIANA

El uso de las tres medidas de posición anteriormente definidas no debe hacerse con exclusividad una de las otras. En muchas ocasiones será más preciso elegir entre ellas la más adecuada, dependiendo de los datos a analizar. En realidad se trata de tres medidas para tres diferentes aspectos, aunque relacionados entre sí.

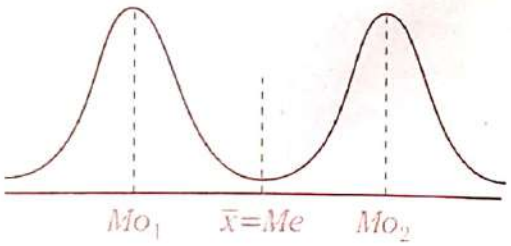
7.4.1. Distribuciones simétricas

- Si la distribución es unimodal, su representación gráfica será en forma acampanada, y en el punto central coincidirán en valor la media, la mediana y la moda.



$$\bar{x}=Me=Mo$$

- Si la distribución es bimodal, su representación gráfica será en forma de doble campana. En este caso, en el punto central (entre las dos campanas) coincidirán en valor solo la media y la mediana.



Se cumple que

$$Mo_1 < \bar{x}=Me < Mo_2$$

Observación

Si la distribución es trimodal, su representación gráfica tendrá la forma de tres campanas. En este caso, en el punto central (de la campana central) coincidirán en valor la media, la mediana y la segunda moda.

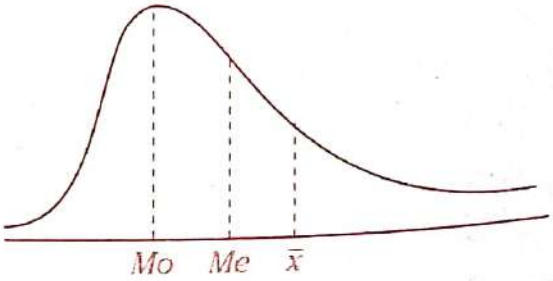
7.4.2. Distribuciones asimétricas

Si la distribución es unimodal, su representación gráfica será también en forma acampanada, pero con sesgo hacia un lado. En este caso, las tres medidas toman valores diferentes y la mediana queda comprendida entre la moda y la media.

Tenemos los siguientes casos:

Caso 1

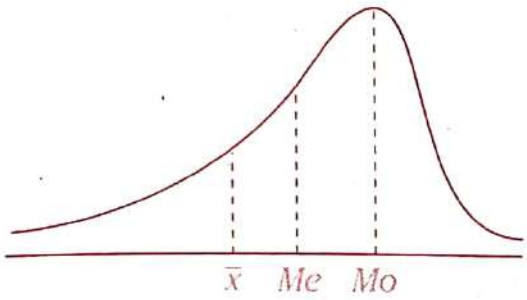
Si la distribución es más alargada para valores grandes de la variable (asimetría a la derecha o positiva), entonces la situación general es la siguiente:



$$Mo < Me < \bar{x}$$

Caso 2

Si la distribución es más alargada para valores pequeños de la variable (asimetría a la izquierda o negativa), entonces la situación general es la siguiente:



$$\bar{x} < Me < Mo$$

Nota

De lo anterior se puede concluir que cuando la población tiene un sesgo, la mediana es la mejor medida de la ubicación, puesto que siempre se encuentra entre la moda y la media.

Propiedad

Si la distribución es moderadamente asimétrica y unimodal, se cumple aproximadamente la siguiente relación:

$$\bar{x} - Mo \approx 3(\bar{x} - Me)$$

8. MEDIDAS DE DISPERSIÓN

Determinan el grado de alejamiento de los datos respecto de una medida de posición que, generalmente, es la media aritmética $(\bar{x})$. Nos dan una idea acerca de lo agrupados o dispersos que están los datos y, por lo tanto, miden la homogeneidad de estos.

En esta parte estudiaremos las medidas de variación más comunes, tales como la varianza (σ^2) y la desviación estándar (σ).

8.1. VARIANZA Y DESVIACIÓN ESTÁNDAR PARA DATOS NO AGRUPADOS

La **varianza** (σ^2) de una población representa la media cuadrática de la diferencia de cada uno de los datos con la media; se calcula como

$$\sigma^2 = \frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2$$

donde

- σ^2: varianza de la población
- x: elementos de observación (datos)
- $\bar{x}$: media de la población
- n: número total de elementos de la población

La **desviación estándar** (σ) es la raíz cuadrada de la varianza y, a diferencia de la varianza, esta medida es más significativa y de mejor interpretación, ya que la varianza se mide en el cuadrado de la unidad de la variable y la desviación se encuentra en las mismas unidades que la variable.

La desviación se calcula como

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum (x - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum x^2}{n} - \bar{x}^2}$$

Ejemplo

Se muestran los resultados de la prueba de pureza de ciertos compuestos al hacer un análisis de control de calidad en cierta empresa de insumos químicos.

0,04%	0,14%	0,17%	0,19%	0,22%
0,06%	0,14%	0,17%	0,21%	0,24%
0,12%	0,15%	0,18%	0,21%	0,25%

Determinemos la varianza y la desviación estándar del tanto por ciento de impureza de compuestos.

Observación (x)	Media $(\bar{x})=2,49/15$	Desviación lineal $(x-\bar{x})$	Desviación cuadrática $(x-\bar{x})^2$	Observación al cuadrado (x^2)
0,04	0,166	−0,126	0,016	0,0016
0,06	0,166	−0,106	0,011	0,0030
0,12	0,166	−0,046	0,002	0,0144
0,14	0,166	−0,026	0,001	0,0196
0,14	0,166	−0,026	0,001	0,0196
0,15	0,166	−0,016	0,000	0,0225
0,17	0,166	0,004	0,000	0,0289
0,17	0,166	0,004	0,000	0,0289
0,18	0,166	0,014	0,000	0,0324
0,19	0,166	0,021	0,001	0,0361
0,21	0,166	0,044	0,002	0,0441
0,21	0,166	0,044	0,002	0,0441
0,22	0,166	0,054	0,003	0,0484
0,24	0,166	0,074	0,005	0,0576
0,25	0,166	0,084	0,007	0,0625
$\sum x=2,49$			$\sum(x-\bar{x})^2=0,051$	$\sum x^2=0,4643$

Luego,

$$\sigma^2=\frac{\sum(x-\bar{x})^2}{n} \quad \text{o} \quad \sigma^2=\frac{\sum x^2}{n}-\bar{x}^2$$

$$\sigma^2=\frac{0,051}{15} \qquad \sigma^2=\frac{0,4643}{15}-(0,166)^2$$

$$\sigma^2=0,0034 \qquad \sigma^2=0,0034$$

$$\sigma=\sqrt{0,0034}$$

$$\rightarrow \quad \sigma=0,058$$

Significa que el error por dispersión con respecto a la media $(\bar{x})$ es de 0,058.

Nota

Cuando los valores tienden a concentrarse alrededor de su media, la varianza será pequeña; y si los valores tienden a distribuirse lejos de la media, la varianza será grande.

8.2. CÁLCULO DE LA VARIANZA Y LA DESVIACIÓN ESTÁNDAR PARA DATOS AGRUPADOS

Tenga presente las siguientes relaciones:

$$\sigma^2 = \frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}$$

$$\sigma = \sqrt{\frac{\sum f_i(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{\sum f_i x_i^2}{n} - \bar{x}}$$

donde

- σ^2: varianza de la población
- σ: desviación estándar de la población
- f_i: frecuencia de cada una de las clases
- x_i: punto medio de cada clase (marca de clase)
- $\bar{x}$: media de la población
- n: tamaño de la población

Ejemplo

Determinemos la varianza y la desviación estándar de los ingresos (S/) o ventas en 100 restaurantes de comida rápida situados en cierto distrito de Lima.

I_i	Punto medio (x_i)	Frecuencia (f_i)	$f \times x_i$	Media ($\bar{x}$)	$x_i - \bar{x}$	$(x_i - \bar{x})^2$	$f(x_i - \bar{x})^2$
700 - 799	750	4	3000	1250	−500	250 000	1 000 000
800 - 899	850	7	5950	1250	−400	160 000	1 120 000
900 - 999	950	8	7600	1250	−300	90 000	720 000
1000 - 1099	1050	10	10 500	1250	−200	40 000	400 000
1100 - 1199	1150	12	13 800	1250	−100	10 000	120 000
1200 - 1299	1250	17	21 250	1250	0	0	0
1300 - 1399	1350	13	17 550	1250	100	10 000	130 000
1400 - 1499	1450	10	14 500	1250	200	40 000	400 000
1500 - 1599	1550	9	13 950	1250	300	90 000	810 000
1600 - 1699	1650	7	11 550	1250	400	160 000	1 120 000
1700 - 1799	1750	2	3500	1250	500	250 000	500 000
1800 - 1899	1850	1	1850	1250	600	360 000	360 000
		100	125 000				6 680 000

Sabemos que

$$\bar{x}=\frac{\sum f_i x_i}{n}$$

En el cuadro se puede ver que

$$\sum f_i x_i = 125\ 000$$

$$\rightarrow \quad \bar{x}=\frac{125\ 000}{100}$$

$$\bar{x}=1250$$

Ahora calculemos la varianza.

$$\sigma^2=\frac{\sum f(x_i-\bar{x})^2}{n}$$

$$\sigma^2=\frac{6\ 680\ 000}{100}$$

$$\sigma^2=66\ 800 \text{ soles (al cuadrado)}$$

Finalmente, calculamos la desviación estándar.

$$\sigma=\sqrt{66\ 800}$$

$$\sigma=258{,}5 \text{ (soles)}$$

Aplicación 11

Las notas de examen de 10 alumnos de un salón de clases fueron las siguientes: 8; 9; 9; 10; 10; 12; 14; 14; 15 y 17. Halle $\bar{x}+\sigma^2+\sigma$.

Resolución

Hallemos la media.

$$\bar{x}=\frac{8+9+9+10+10+12+14+14+15+17}{10}$$

$$\rightarrow \quad \bar{x}=\frac{118}{10}=11{,}8$$

Ahora hallemos la varianza (σ^2).

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum x_i^2-\bar{x}^2$$

$$\sigma^2=\frac{1476}{10}-(11{,}8)^2$$

$$\rightarrow \quad \sigma^2=8{,}36$$

Finalmente, la desviación estándar será

$$\sigma=\sqrt{\sigma^2}=\sqrt{8{,}36}=2{,}89$$

$$\therefore \quad x+\sigma^2+\sigma=11{,}8+8{,}36+2{,}89=23{,}05$$

Aplicación 12

Determine la varianza del diámetro de los ejes de los automóviles según la tabla mostrada.

Diámetro (en mm)	Número de ejes
[5 - 6⟩	10
[6 - 7⟩	15
[7 - 8⟩	20
[8 - 9]	30

Resolución

Hallemos primero la $\bar{x}$. Para ello agregamos la marca de clase x_i en el cuadro dado.

I_i	x_i	f_i
[5 - 6⟩	5,5	10
[6 - 7⟩	6,5	15
[7 - 8⟩	7,5	20
[8 - 9]	8,5	30

$$\rightarrow \quad \bar{x}=\frac{5{,}5(10)+6{,}5(15)+7{,}5(20)+8{,}5(30)}{10+15+20+30}$$

$$\bar{x}=7{,}43$$

Para facilitar el cálculo de la varianza, elaboremos la siguiente tabla:

x_i	f_i	$x_i-\bar{x}$	$(x_i-\bar{x})^2$	$f_i(x_i-\bar{x})^2$
5,5	10	−1,93	3,7249	37,249
6,5	15	−0,93	0,8649	12,9735
7,5	20	0,07	0,0049	0,098
8,5	30	1,07	1,1449	34,347

Sabemos que

$$\sigma^2=\frac{1}{n}\sum f_i(x_i-x)^2$$

$$\therefore\ \sigma^2=\frac{84{,}6675}{75}=1{,}1289$$

8.3. COEFICIENTE DE VARIACIÓN (CV)

Es una medida de dispersión relativa (libre de unidades de medidas) que se define como la desviación estándar dividida por la media aritmética.

$$\boxed{CV=\frac{\sigma}{x}} \quad \text{o} \quad \boxed{CV=\frac{\sigma}{x}\times 100\%}$$

El CV es una medida muy útil para comparar la variabilidad de dos o más series de datos que tengan distintas unidades de medida o distintas medias aritméticas.

Ejemplo

Si la desviación estándar de las notas obtenidas en Matemática Básica I, en cada uno de los dos horarios (H1 y H2), ha sido 14, no podemos concluir que los alumnos de los dos horarios presentan la misma variabilidad (mismo nivel de dispersión). Si la $\bar{x}$ del horario H1 es 16 y la $\bar{x}$ del horario H2 es 11, los coeficientes de variación respectiva son

- $CV_{H1}=\frac{\sigma_1}{\bar{x}_1}=\frac{14}{16}=0{,}875=87{,}5\%$
- $CV_{H2}=\frac{\sigma_2}{\bar{x}_2}=\frac{14}{11}=1{,}27=127\%$

Se concluye que las puntuaciones obtenidas en H1 son más homogéneas o tienen menor variabilidad que las puntuaciones del horario H2. Esto nos permitirá decir que los estudiantes del horario H1 tienen un rendimiento más homogéneo con respecto de los del horario H2.

Aplicación 13

Las notas del curso A tuvieron una media aritmética de 75 puntos y una varianza de 225. Las notas del curso B tuvieron una media de 70 puntos y una varianza de 196. Si en ambos cursos las notas se aumentan en 10 %, ¿cuál de los dos cursos tendrá un coeficiente de variación mayor después de arreglar las notas?

Resolución

Evaluamos para las notas del curso A.

	Al inicio	Al final
Media	75	110%75
Desviación estándar	$\sqrt{225}$	$110\%\sqrt{225}$

Luego,

$$CV=\frac{110\%\sqrt{225}}{110\%75}=\frac{1}{5}=20\%$$

Evaluamos para las notas del curso B.

	Al inicio	Al final
Media	70	110%70
Desviación estándar	$\sqrt{196}$	$110\%\sqrt{196}$

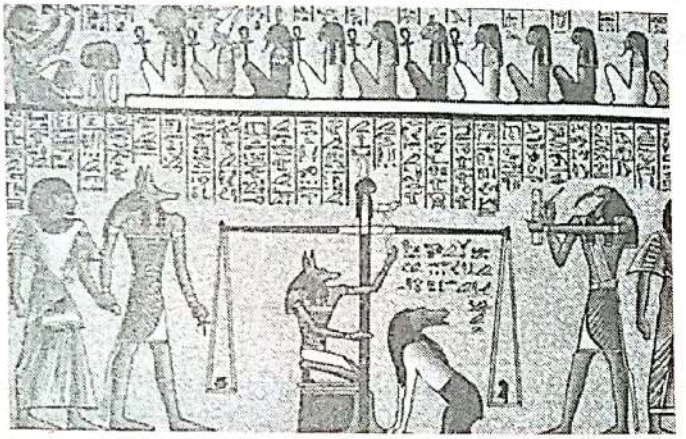
Luego,

$$CV=\frac{110\%\sqrt{196}}{110\%70}=\frac{1}{5}=20\%$$

Por lo tanto, las notas de ambos cursos tienen igual coeficiente de variación.

LECTURA

Breve historia de la estadística



Cultura egipcia realizando operaciones matemáticas

Desde los comienzos de la civilización han existido formas sencillas de estadística, pues ya se utilizaban representaciones gráficas y otros símbolos en pieles, rocas, palos de madera y paredes de cuevas para contar el número de personas, animales o cosas.

Hacia el año 3000 a.C. los babilonios usaban pequeñas tablillas de arcilla para recopilar datos sobre la producción agrícola y los productos vendidos o cambiados mediante trueque. En el siglo XXXI a.C., mucho antes de construir las pirámides, los egipcios analizaban los datos de la población y la renta del país.

Los libros bíblicos de Números y Crónicas incluyen, en algunas partes, trabajos de estadística. El primero contiene dos censos de la población de Israel y el segundo describe el bienestar material de las diversas tribus judías. En China existían registros numéricos similares con anterioridad al año 2000 a.C. Los griegos clásicos realizaban censos cuya información se utilizaba hacia el 594 a.C. para cobrar impuestos. El Imperio romano fue el primer gobierno que recopiló una gran cantidad de datos sobre la población, la superficie y la renta de todos los territorios bajo su control. Durante la Edad Media solo se realizaron algunos censos exhaustivos en Europa. El registro de nacimientos y defunciones comenzó en Inglaterra a principios del siglo XVI, y en 1662 apareció el primer estudio estadístico notable de población, titulado *Observations on the London Bills of Mortality*. Un estudio similar sobre la tasa de mortalidad en la ciudad de Breslau, en Alemania, realizado en 1691, fue utilizado por el astrónomo inglés Edmund Halley como base para la primera tabla de mortalidad.

En nuestros días, la estadística se ha convertido en un método efectivo para describir con exactitud los valores de datos económicos, políticos, sociales, psicológicos, biológicos o físicos, y sirve como herramienta para relacionar y analizar dichos datos.

El trabajo del experto estadístico no consiste ya solo en reunir y tabular los datos, sino sobre todo en el proceso de **interpretación** de esa información. El desarrollo de la teoría de la probabilidad ha aumentado el alcance de las aplicaciones de la estadística.

Adaptado de "Historia de la estadística". En <https://www.estadisticaparatodos.es>.

Problemas resueltos

Problema 1

De una tabla simétrica de distribución de frecuencias se sabe lo siguiente:

- $H_7=1$
- $x_3=18$
- $f_5=30$
- $x_6=39$
- $h_3=3h_6$
- $f_1=3x_2$
- $H_1=0{,}15$

Determine F_4+F_2.

Resolución

Como $H_7=1$, entonces hay 7 intervalos de clase.

Dado que $x_3=18$ y $x_6=39$

$\rightarrow\ 18+3w=39\ \rightarrow\ w=7$

De esto, se obtiene que

$x_2=18-7=11$

Por dato

$f_1=3x_2\ \rightarrow\ f_1=33$

Dado que la tabla es simétrica,

$\rightarrow\ f_1=33=f_7$

Además, como

$H_1=0{,}15=\dfrac{33}{n}\ \rightarrow\ n=220$

También $f_3=f_5=30$.

Dado que $h_3=3h_6$

$\rightarrow\ f_3=3f_6\ \rightarrow\ f_6=10$

Luego,

$f_4=220-146=74$

Elaboramos la tabla con esta información.

x_i	f_i	F_i
	33	
11	10	43
18	30	
	74	
	30	
39	10	
	33	

Finalmente, hallamos F_2 y F_4.

- $F_2=33+10=43$
- $F_4=33+10+30+74=147$

$\therefore\ F_4+F_2=190$

Problema 2

Un profesor de matemática perdió las actas de promedios de las notas (de 0 a 20) de sus alumnos, pero recuerda que los promedios presentaban una distribución simétrica con 6 intervalos de clase de ancho de clase común; además, en sus archivos encuentra la siguiente información:

$h_1=0{,}0\widehat{45}$; $h_4=0{,}\widehat{36}$; $x_3=7{,}5$; $\sum_{i=1}^{6}x_i=54$

Si para aprobar el curso se necesita obtener por lo menos 11 de promedio, ¿qué tanto por ciento de los alumnos desaprobó el curso?

Resolución

Sea w el ancho de clase común.

Notas	x_i	f_i
	$7{,}5-2w$	
	$7{,}5-w$	
	$7{,}5$	
	$7{,}5+w$	
	$7{,}5+2w$	
	$7{,}5+3w$	

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{6}x_i=54$$

$$\rightarrow\ (7{,}5-2w)+(7{,}5-w)+7{,}5+(7{,}5+w)+(7{,}5+2w)+(7{,}5+3w)=54$$

$$w=3$$

Además, de los datos

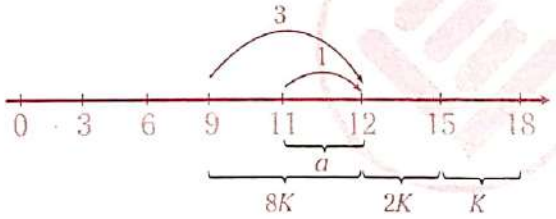
$$h_1=0{,}0\widehat{45}=\frac{1}{22}\ ;\quad h_4=0{,}\widehat{36}=\frac{4}{11}$$

Sea $22K$ el total de datos.

Reemplazamos en la tabla.

Notas	x_i	f_i
[0; 3⟩	1,5	K
[3; 6⟩	4,5	$2K$
[6; 9⟩	7,5	$8K$
[9; 12⟩	10,5	$8K$
[12; 15⟩	13,5	$2K$
[15; 18⟩	16,5	K
	Total	$22K$

Observamos que es una variable continua.



$$\rightarrow\ \frac{1}{3}=\frac{a}{8K}\ \rightarrow\ a=\frac{8}{3}K$$

Luego, los aprobados son

$$\left(\frac{8K}{3}+2K+K\right)=x\%\,22K$$

$$\frac{17}{3}K=x\%\,22K$$

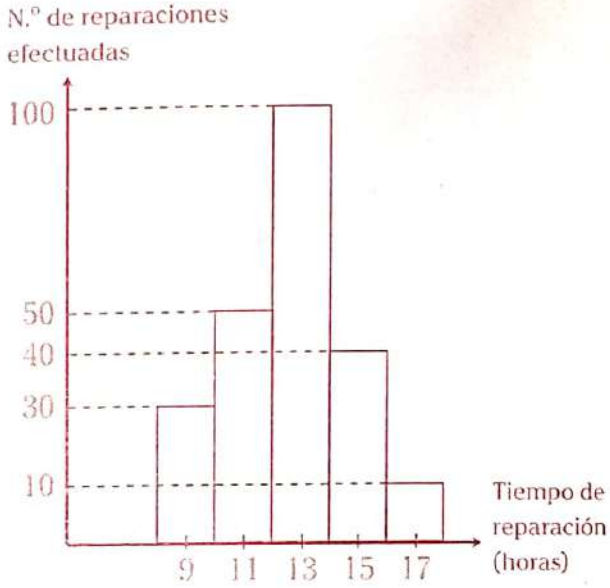
$$x\%=25,\widehat{75}\%$$

Por lo tanto, los desaprobados son

$$100\%-25,\widehat{75}\%=74,\widehat{24}\%$$

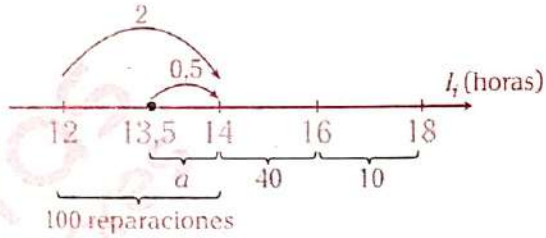
Problema 3

El siguiente histograma es el resultado de un estudio realizado en un taller de mecánica automotriz respecto al tiempo de reparación de un motor. ¿Cuántas reparaciones se terminaron en un tiempo mayor o igual a 13,5 horas?



Resolución

A partir del histograma, tenemos que



$$\rightarrow\ \frac{a}{100}=\frac{0{,}5}{2}\ \rightarrow\ a=25$$

Nos piden $a+40+10$.

$\therefore\quad 25+40+10=75$ reparaciones

Problema 4

Se tiene el siguiente cuadro:

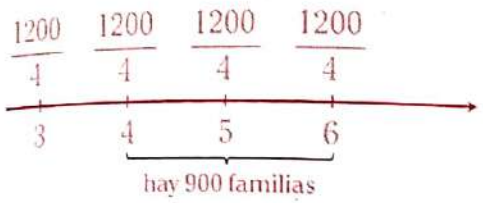
N.° de hijos	N.° de familias
0 - 2	300
3 - 6	1200
7 - 9	600
10 - 12	300
13 - 15	100

¿Cuántas familias tienen entre 4 y 8 hijos?

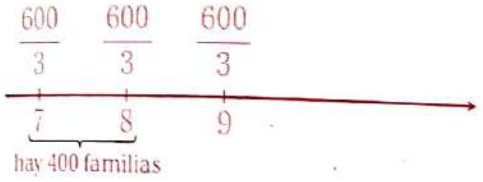
Resolución

Observamos que la variable es discreta.

En I_2



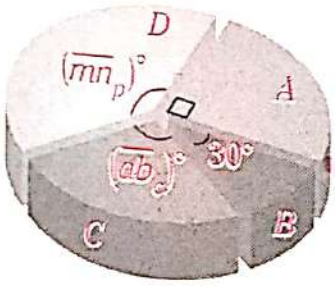
En I_3



$$\therefore \begin{pmatrix}\text{n.}^{\circ}\text{ de familias}\\ \text{con 4 a 8 hijos}\end{pmatrix} = 900 + 400 = 1300$$

Problema 5

En una encuesta realizada a 1200 personas sobre la preferencia de los periódicos A, B, C y D, se obtuvo el siguiente gráfico:



Halle la cantidad de personas que si no prefieren el periódico D, entonces prefieren el periódico C. Considere que el 25 % prefiere el periódico A.

Resolución

Se tienen las siguientes proposiciones:

- p: prefieren el periódico D
- q: prefieren el periódico C
- r: si no prefieren el periódico D, prefieren el periódico C.

Formalizamos.

$$r \equiv (\sim p) \rightarrow q \equiv p \vee q$$

Entonces

$r \equiv$ prefieren el periódico D o prefieren el periódico C

Además, el ángulo central es DP al número de personas.

Ángulo central	90°	30°	360°
N.° de personas	$n(A)$	$n(B)$	1200

donde

- $n(A)$: número de personas que prefieren el periódico A
- $n(B)$: número de personas que prefieren el periódico B

$$\rightarrow \frac{90}{n(A)} = \frac{30}{n(B)} = \frac{360}{1200}$$

Obtenemos que

$n(A) = 300$

$n(B) = 100$

Por lo tanto, el total de personas que prefieren los periódicos C o D es

$$1200 - n(A) - n(B) = 800$$

Problema 6

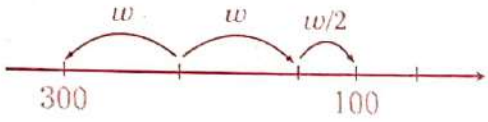
En una encuesta sobre el sueldo de 200 personas se obtiene una tabla de distribución simétrica con igual ancho y con un sueldo mínimo de S/300. Además, se sabe que $h_1 = 0{,}15$; $h_2 = 0{,}20$; $x_3 = 500$ y $H_5 = 1$. ¿Cuántas personas tienen un sueldo menor que S/540?

Resolución

Para obtener la tabla de distribución de frecuencias, debemos tener presente que esta es simétrica.

Como $H_5 = 1$, significa que la tabla es de 5 intervalos.

Sea w el ancho de clase.



$$\rightarrow\ w+w+\frac{w}{2}=200\ \rightarrow\ w=80$$

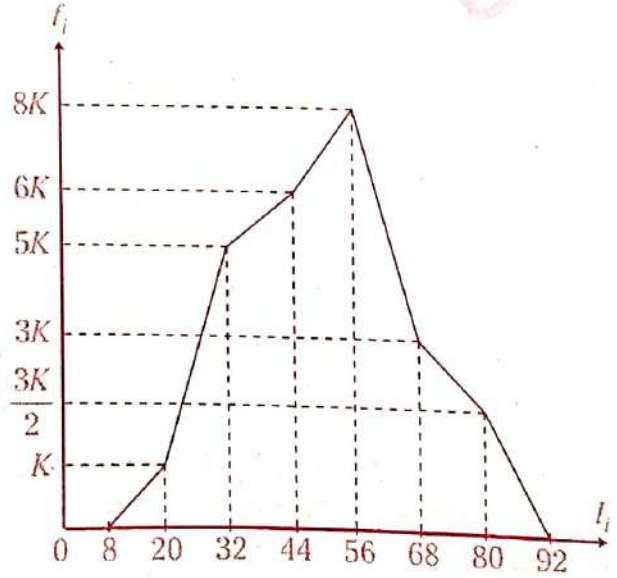
Completamos los valores del cuadro.

I_i	x_i	f_i	h_i
[300 - 380⟩		30	0,15
[380 - 460⟩		40	0,20
[460 - 540⟩		60	0,30
[540 - 620⟩		40	0,20
[620 - 780]		30	0,15
	Total	200	1

Por lo tanto, el número de personas que tienen un sueldo entre S/300 y S/540 es 130.

Problema 7

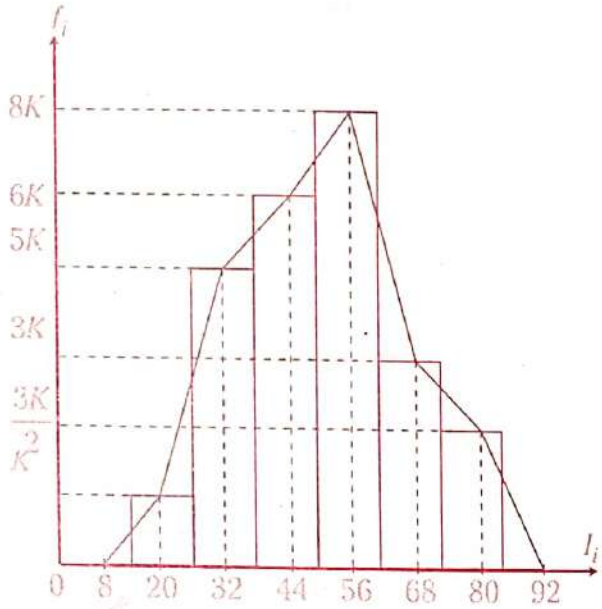
Se tiene el siguiente polígono de frecuencias:



Calcule la media.

Resolución

Reconstruyendo el histograma, se tiene la siguiente gráfica:



La expresamos en un cuadro de distribución de frecuencias.

x_i	f_i	$x_i f_i$
20	K	$20K$
32	$5K$	$160K$
44	$6K$	$264K$
56	$8K$	$448K$
68	$3K$	$204K$
80	$1{,}5K$	$120K$

Nos piden la media.

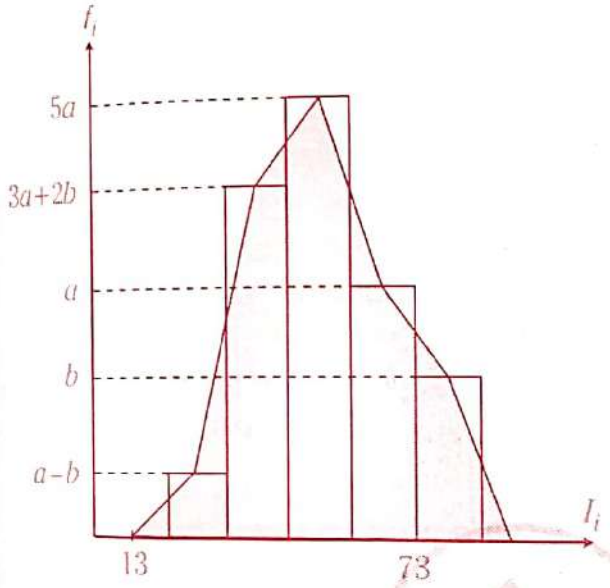
$$\bar{x}=\frac{20K+160K+264K+448K+204K+120K}{K+5K+6K+8K+3K+1{,}5K}$$

$$\bar{x}=\frac{1216K}{24{,}5K}$$

$$\therefore\ \bar{x}=49{,}63$$

Problema 8

Dado el histograma mostrado, calcule la Me si el área es 1180 u^2 y el ancho de clase es común.



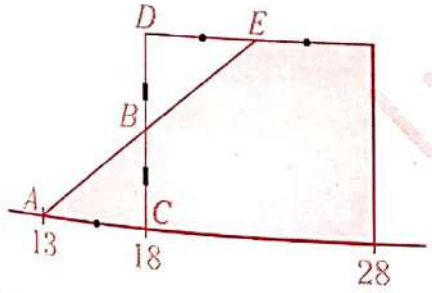
Resolución

Sea w el ancho de clase común.

$\rightarrow$ $13+6w=73$

$w=10$

En el primer intervalo se observa lo siguiente:



Los triángulos ABC y BDE son congruentes opuestos por el vértice B y sus lados opuestos son iguales, entonces tienen igual área.

Siguiendo este proceso, se observa que el área del polígono de frecuencias es igual al área del diagrama de barras.

$\rightarrow$ $1180=w\times(\text{total de datos})$

$1180=10[(a-b)+b+a+(3a+2b)+5a]$

$118=10a+2b$

$59=5a+b$

Además, a y b son números enteros; $a>b>a-b$

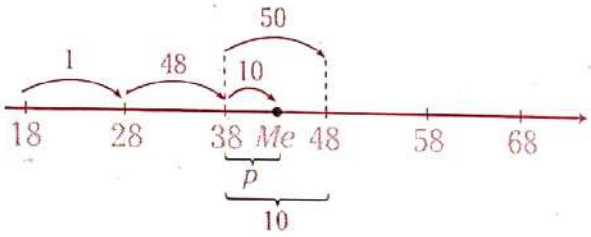
$\rightarrow$ $59=5a+b\ ;\ \underbrace{a-b}$

11	4	7	No cumple
10	9	1	Sí cumple

Luego,

$a=10;\ b=9$

Total de datos: 118



En el tercer intervalo se tiene lo siguiente:

$$\frac{p}{10}=\frac{10}{50}\ \rightarrow\ p=2$$

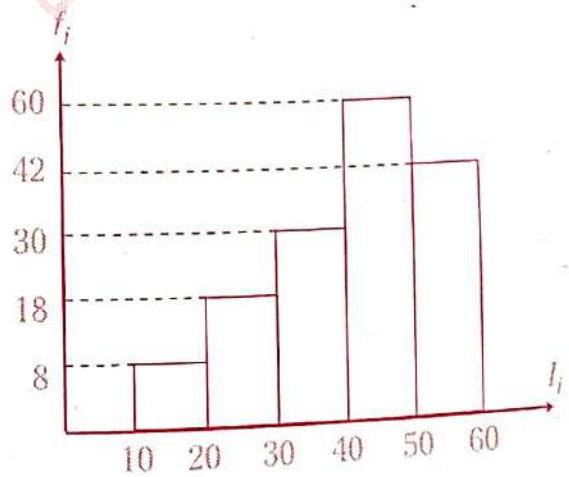
Finalmente,

$Me=38+2=40$

$\therefore\ Me=40$

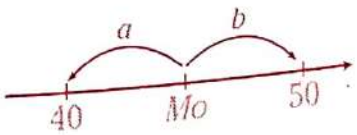
Problema 9

Dado el siguiente histograma, calcule la moda.



Resolución

Dado que el intervalo [40; 50⟩ tiene la mayor f_i, es más probable que el dato que se repite más veces se encuentre en dicho intervalo, al cual se le denomina clase modal.



Se observa que $a+b=10$; además

$$\frac{a}{60-30}=\frac{b}{60-42} \rightarrow \frac{a}{30}=\frac{b}{18}$$

$$\frac{a}{5}=\frac{b}{3}=\frac{10}{18}=1{,}25$$

$$a=6{,}25$$

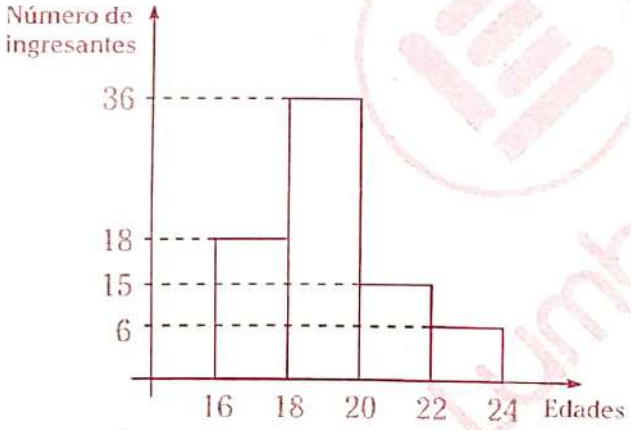
Finalmente,

$$Mo=40+6{,}25$$

$$\therefore \quad Mo=46{,}25$$

Problema 10

El siguiente histograma muestra la distribución de frecuencias de las edades de los ingresantes en el presente año a cierta facultad de la UNI. Determine el valor de la moda.



Resolución

Del histograma tenemos el siguiente cuadro:

I_i	f_i
[16; 18⟩	20
[18; 20⟩	35
[20; 22⟩	15
[22; 24⟩	10

Hallemos la clase modal $I_2=[18;20\rangle$.

Recordemos la fórmula del calculo de la moda.

$$Mo=L_{Mo}+w_{Mo}\times\left(\frac{d_1}{d_1+d_2}\right)$$

Reemplazamos.

$$Mo=18+2\times\left(\frac{15}{15+20}\right)$$

$$\therefore \quad Mo=18{,}85$$

Problema 11

El departamento de control de calidad de una empresa elige diariamente un lote de 80 objetos para analizar la producción diaria y anota la cantidad de objetos defectuosos. A continuación, se muestra la distribución de los lotes analizados durante todos los días de los meses de enero y febrero, según el número de objetos defectuosos.

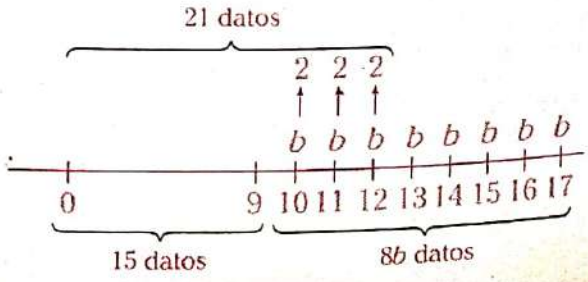
N.° de objetos defectuosos	f_i	H_i	h_i
0 - 9	15		
10 - 17			$8a$
18 - 23		0,8	
24 - 28			
29 - 30			a

Si 21 lotes tienen menos de 13 objetos defectuosos, ¿cuántos lotes tienen menos de 26, pero no menos de 15 objetos defectuosos?

Resolución

Como se analizó la producción todos los días de los meses de enero y febrero, entonces los datos analizados son $31+29=60$.

Se sabe que hay 21 lotes con menos de 13 objetos defectuosos.



Se observa que $b=2$.

Como $H_3=0{,}8$

$$\rightarrow H_3=\frac{F_3}{h} \rightarrow 0{,}8=\frac{F_3}{60}$$

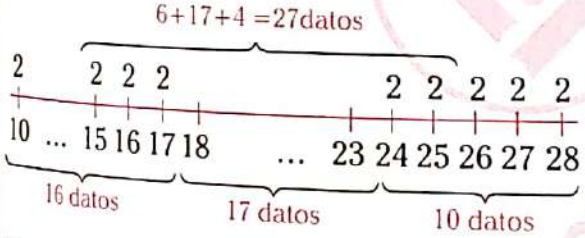
$$F_3=48$$

Completando parte del cuadro se tiene

N.° de objetos defectuosos	f_i
0 - 9	15
10 - 17	16 ← $8b$
18 - 23	17
24 - 28	10
29 - 30	2 ← b
Total	60

$48=F_3$

Luego,



Por lo tanto, hay 27 lotes que tienen menos de 26 pero más de 14 objetos defectuosos.

Problema 12

En la siguiente tabla de distribución de frecuencias, halle el coeficiente de variación.

I_i	x_i	f_i	F_i	H_i
[- ⟩				0,05
[20 - ⟩		15		
[- ⟩			24	0,40
[- ⟩	45		51	
[- 60]				

Resolución

Sea w el ancho de clase del cuadro

$$\rightarrow \quad w=\frac{60-20}{4} \rightarrow w=10$$

Luego,

- $H_3=\dfrac{F_3}{n} \rightarrow 0{,}40=\dfrac{24}{n} \rightarrow n=60$
- $H_1=\dfrac{F_1}{n} \rightarrow 0{,}05=\dfrac{F_1}{60} \rightarrow F_1=3$

Completamos el cuadro.

I_i	x_i	f_i	F_i	H_i
[10 - 20⟩	15	3	3	0,05
[20 - 30⟩	25	15	18	
[30 - 40⟩	35	6	24	0,40
[40 - 50⟩	45	27	51	
[50 - 60]	55	9	60	
	Total	60		

Luego calculamos la media.

$$\bar{x}=\frac{15\times3+25\times15+35\times6+45\times27+55\times9}{60}$$

$$\bar{x}=39$$

A continuación, hallamos la desviación estándar.

$$\sigma^2=\frac{\sum_{i=1}^{5}(x_1-x)^2fi}{n}$$

$$\sigma^2=\frac{24^2\times3+14^2\times15+4^2\times6+6^2\times27+16^2\times9}{60}$$

$$\sigma^2=\frac{8640}{60}=144 \rightarrow \sigma=12$$

Nos piden el coeficiente de variación.

$$CV=\frac{\sigma}{x} \rightarrow CV=\frac{12}{39}=0{,}3077$$

$$\therefore \quad CV=30{,}77\,\%$$

Problema 13

De la siguiente distribución de frecuencias, halle la mediana si el ancho de clase es común y $h_4=0{,}2$.

I_i	x_i	f_i	F_i
[- 40⟩		a	
[- ⟩			$\overline{ab}$
[- ⟩		50	90
[- ⟩	90		m
[- ⟩		n	
[-]		q	200

Resolución

Dado que

$$F_2+f_3=F_3$$

$$\rightarrow \overline{ab}+50=90$$

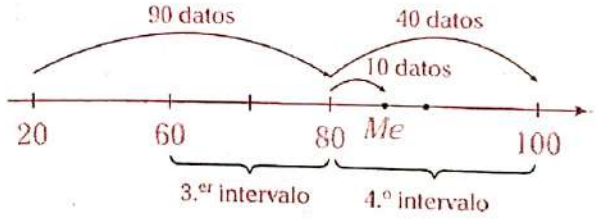
$$\overline{ab}=40$$

Sea $w=2c$ el ancho de clase, en el cuadro se cumple que

$$40+2c+2c+c=90$$

$$c=10 \rightarrow w=20$$

Como hay 200 datos, la Me estará en el cuarto intervalo, ($w=20$).

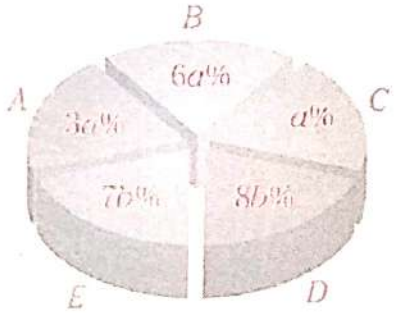


$$\rightarrow \frac{Me-80}{10}=\frac{100-80}{40}$$

$$\therefore\ Me=85$$

Problema 14

Se realizó una encuesta de las preferencias de un grupo de personas sobre 5 diarios: A, B, C, D y E, y se obtuvo el siguiente diagrama:



Calcule qué tanto por ciento del total tiene el diario de mayor preferencia si este es máximo. Considere que a y b son enteros.

Resolución

Como el total es 100%

$$\rightarrow (3a+6a+a+8b+7b)\%=100\%$$

$$10a+15b=100$$

$$2a+\underset{\text{par}}{3b}=20$$

Luego, se tiene lo siguiente:

- Si a es máximo y b es mínimo,
  $\rightarrow a=7;\ b=2$

  Los porcentajes de preferencia serían
  A: 21% B: 42% C: 7%
  D: 16% E: 4%

- Si b es máximo y a es mínimo,
  $\rightarrow b=6;\ a=1$

  Los porcentajes de preferencia serían
  A: 3% B: 48% C: 6%
  D: 42% E: 24%

Por lo tanto, se observa que el mayor porcentaje se presenta en el segundo grupo para el diario B (48%).

Test

1. Respecto al cuadro de distribución de frecuencias, señale la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las siguientes proposiciones:
   I. El ancho de clase es la diferencia de los límites superior e inferior de cada intervalo.
   II. La frecuencia absoluta es la cantidad de datos en un intervalo.
   III. La suma de las frecuencias relativas es menor que 1.

   A) VFF B) FFF C) FVF
   D) VVF E) VVV

2. Calcule el rango de los siguientes datos:
   17; 8; 13; 9; 12; 6; 15; 13; 14; 12; 9; 20; 12; 15; 16

   A) 12 B) 13 C) 14
   D) 15 E) 16

3. Los pesos de 105 empleados de una fábrica están distribuidos en la siguiente tabla:

Peso (kg)	f_i
[40 - 55⟩	45
[55 - 70⟩	15
[70 - 85⟩	30
[85 - 100⟩	15

   ¿Cuántos empleados tienen pesos comprendidos entre 60 kg y 80 kg?

   A) 25 B) 30 C) 35
   D) 40 E) 45

4. Dado el siguiente conjunto de datos:
   1, 2; 3; 4; 5; 6; ...; 49
   calcule la suma de la media y la mediana.

   A) 48,5 B) 49 C) 49,5
   D) 50 E) 50,5

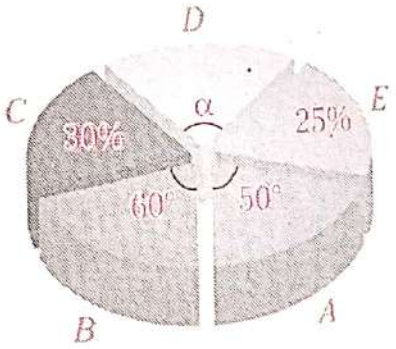
5. Se tiene el siguiente conjunto de datos:
   $\underbrace{3; 3; ...; 3}_{12 \text{ veces}}; \underbrace{4; 4; 4; ...; 4}_{13 \text{ veces}}; \underbrace{6; 6; 6; ...; 6}_{25 \text{ veces}}$
   Calcule la suma de la moda y la mediana.

   A) 10 B) 10,5 C) 11
   D) 11,5 E) 12

6. En el siguiente arreglo creciente de números enteros: 2; 2; a; a; b; 8; 9, la media es 5,6. Halle a^2+b.

   A) 15 B) 16 C) 17
   D) 18 E) 19

7. Se encuesta a 720 personas sobre su preferencia por los diarios A, B, C, D y E. Si los resultados obtenidos se muestran en el diagrama circular, determine cuántas personas prefieren el diario C o D.



   A) 280 B) 300 C) 320
   D) 340 E) 360

1 D 2 C 3 B 4 D 5 C 6 B 7 C **CLAVES**

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Determine la secuencia correcta de verdadero (V) o falso (F) respecto a las siguientes proposiciones:

   I. Los pesos (en kilogramos) de ocho personas son 30; 30; 33; 28; 180; 31; 35; 34. La medida de tendencia central que representa mejor estos datos es la media aritmética.

   II. El peso, el estado civil, la talla y el sexo son variables cuantitativas.

   III. Dados los siguientes datos: 10; 15; 18; 12; 10; 13; 15; 20; 23; 18; 17; 21; 15; 14; 24, se puede afirmar que estos generan una distribución amodal.

   A) VFF B) FFV C) VVF
   D) FVF E) FFF

2. Considerando que la distribución de frecuencias mostrada tiene ancho de clase común, halle $\bar{x}+Me$.

I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[- ⟩				0,08
[- ⟩	17,5			
[- ⟩			0,06	
[- 30⟩		17		0,80
[- ⟩		10		

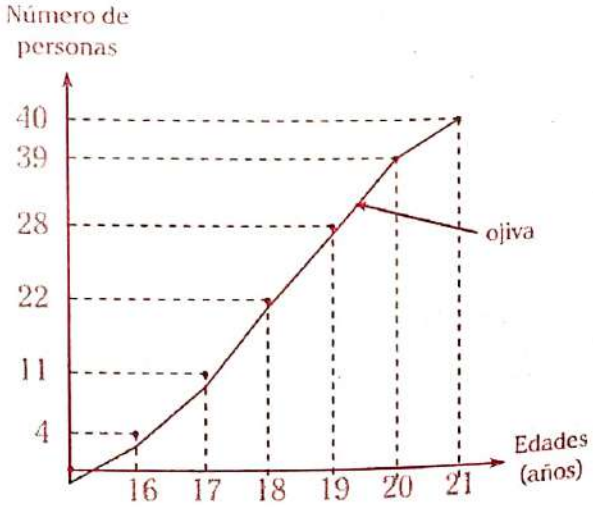
   A) 40,7 B) 42,3 C) 48,3
   D) 49,4 E) 51,2

3. En la siguiente tabla se consideran las edades de un conjunto de personas que asistieron a un congreso de pedagogía realizado en Lima. Si se obtuvo la distribución de frecuencias de igual ancho de clase, halle $\bar{x}+H_2$.

I_i	f_i	h_i	H_i
[- 24⟩			
[- ⟩		30%	
[- ⟩	40		80%
[36 - ⟩	20		

   A) 32,4 B) 31,6 C) 30 ,8
   D) 31,8 E) 32,2

4. Dado el siguiente diagrama escalonado, de variable discreta (edades), ¿qué tanto por ciento de las personas tienen una edad mayor o igual que 16 años pero menor que 20 años?



   A) 57,5% B) 87% C) 87,5%
   D) 13,5% E) 58,5%

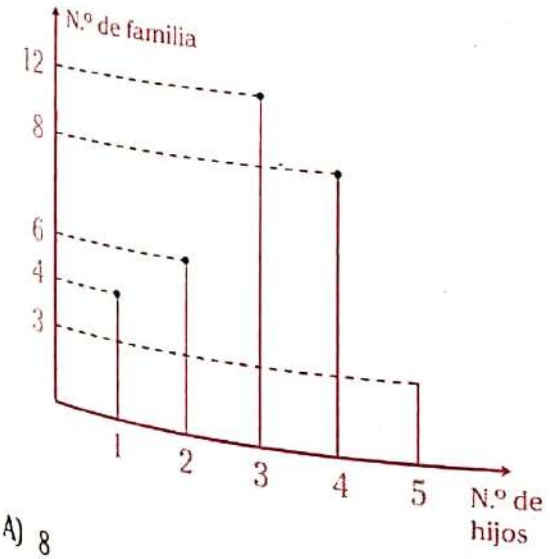
5. Las notas obtenidas por un alumno en 7 prácticas calificadas son las siguientes: 15; a; 11; 18; 14; b; 19. Calcule $a+b$ si la media, la mediana y la moda son iguales; además, dicho alumno desaprobó en una de las prácticas.

A) 14 B) 18 C) 20
D) 21 E) 24

6. A 15 estudiantes, elegidos al azar, se les solicitó mencionar el número de horas enteras que durmieron la noche anterior. Los datos resultantes fueron los siguientes: 5; 6; 6; 8; 7; 7; 9; 5; 4; 8; 11; 6; 7; 8; 7. Halle la suma de la mediana, la moda y la media.

A) 18,93
B) 21,93
C) 18,75
D) 20,93
E) 20,75

7. Se encuestó a un grupo de familias respecto al número de hijos que tienen. Los resultados se observan en el siguiente diagrama de barras. ¿Cuántas familias tienen 2 o 5 hijos?



A) 8 B) 9 C) 10
D) 11 E) 12

Nivel intermedio

8. Se debe elaborar un cuadro de distribución de frecuencias con las edades de un grupo de personas. Considere lo siguiente:

- Edad mínima: 10 años
- Edad máxima: 30 años
- Ancho de clase: 4

Además,
$h_2=h_4=h_5$; $h_1=\frac{4}{5}h_2$; $5h_3=6h_4$
Si el promedio de las edades es $\overline{ab,cd}$; calcule $a+b+c+d$.

A) 5 B) 12 C) 7
D) 10 E) 8

9. Se tienen los promedios ponderados de 10 estudiantes del curso de Matemática Básica I:
10,2; 12,6; 11,2; 14,4; 10,8;
16,4; 13,6; 14,9; 12,5; 11,5
Si se clasifican los datos para 4 intervalos de clase, calcule h_2+H_3.

A) 50% B) 75% C) 84%
D) 92% E) 100%

10. Se tiene la siguiente distribución de frecuencias:

$[L_i - L_s\rangle$	f_i
[20 - 30⟩	3
[30 - 40⟩	1
[40 - 50⟩	2
[50 - 60⟩	6
[60 - 70]	n

Calcule el valor de n si la mediana es $61,\widehat{6}$.

A) 12 B) 18 C) 20
D) 22 E) 24

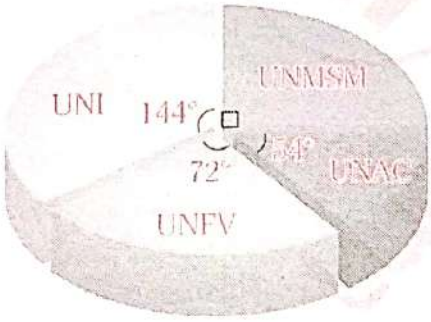
11. En la tabla se muestran los resultados de un estudio con amplitud constante.

$[x_{(i-1)} - x_i\rangle$	x_i	f_i	F_i	h_i	H_i
[10 - 〉			30		
[- 〉		75		0,375	
[- 〉					0,8
[- 〉	27,5				

Halle $\bar{x}+F_2+F_4$.

A) 324,125 B) 325,125 C) 220,125
D) 225,125 E) 235,125

12. En el diagrama circular se muestran las preferencias que tienen 5000 alumnos de la academia Aduni para postular a cuatro universidades.



¿En cuánto excede el total de alumnos que prefieren postular a la UNI y la UNFV al número de alumnos que prefieren postular a la UNAC y UNMSM?

A) 800 B) 900 C) 1000
D) 1200 E) 1500

13. Sobre las notas de un grupo de alumnos de un mismo año escolar se sabe lo siguiente: los 18 alumnos de la sección A obtuvieron notas menores a 5; los 25 alumnos de la sección B, notas mayores o iguales a 15; los 40 alumnos de la sección C, notas menores a 10; y los 17 alumnos de la sección D, notas entre 10 y 15. Si la menor y mayor calificación fueron 0 y 20, ¿qué tanto por ciento del total de alumnos obtuvieron una nota entre 7 y 17?

A) 30% B) 40% C) 39%
D) 35% E) 42%

14. Dada la siguiente tabla de frecuencias cuya distribución es simétrica, calcule x_m+Mo (x_m: mediana; Mo: moda).

I_i	f_i	F_i	h_i
[20 - 〉	12		
[- 〉			0,15
[- 〉			
[- 52〉		48	
[- 〉			

A) 80 B) 80,8 C) $88,\widehat{8}$
D) $89,\widehat{8}$ E) 79,8

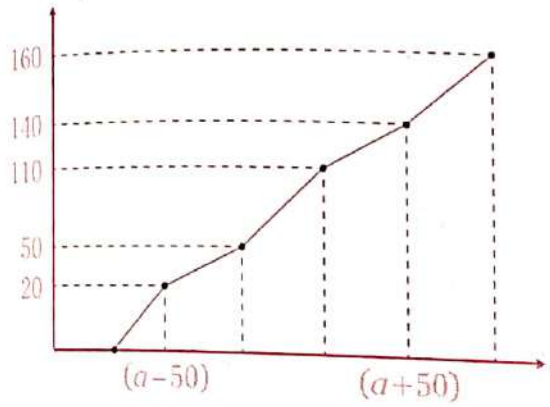
15. Se registran las notas de 20 estudiantes, las cuales son
a; a; 10; a; 12; 10; a; b; b; b;
12; 12; b; b; b; 10; a; 12; 12; 13
Si $Me+Mo=27$ y $\bar{x}=11,65$; calcule el valor de $a\times b$. Considere que $a<10$ y $13<b$.

A) 105 B) 120 C) 125
D) 130 E) 135

16. Se registran las estaturas, en centímetros, de 6 estudiantes, ordenadas de menor a mayor, las cuales son 147; a; a; b; 162; 171. Si la media y la mediana son 157 y 154,5, respectivamente, calcule la moda.

A) 153 B) 154 C) 155
D) 156 E) 157

17. Se han registrado los ingresos mensuales de un grupo de familias del distrito de Villa El Salvador, con ancho de clase constante.



Si $Mo+Me+\bar{x}=3000$, calcule el valor de a.

A) 850
B) 900
C) 1000
D) 1050
E) 1100

18. La media de un conjunto de datos es 1,5, la desviación estándar es 3,5 y la mitad de ellas son iguales a un valor a, mientras que la otra mitad son iguales a un valor b. Si $a<b$, calcule el valor de $a\times b$.

A) 2
B) 3
C) 4
D) −4
E) −10

19. Calcule la varianza de los siguientes n datos que son iguales, respectivamente, a los n primeros números naturales: 1; 2; 3; 4; 5; ..., n.

A) $\frac{n^2-1}{12}$
B) $\frac{n^2-1}{24}$
C) $\frac{n^2+1}{12}$
D) $\frac{n^2+1}{24}$
E) $\frac{n^2-1}{2}$

Nivel avanzado

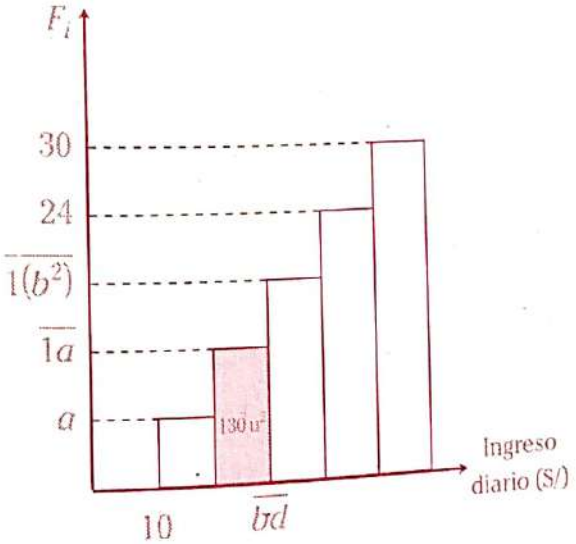
20. El siguiente cuadro estadístico tiene un ancho de clase constante e igual a 20.

$[L_i - L_s\rangle$	x_i	f_i	F_i	$x_i f_i$
[- ⟩				880
[- ⟩				1950
[- ⟩			35	
[- ⟩		13		
[- 200⟩				
[-]		4	70	

Determine la media de los datos.

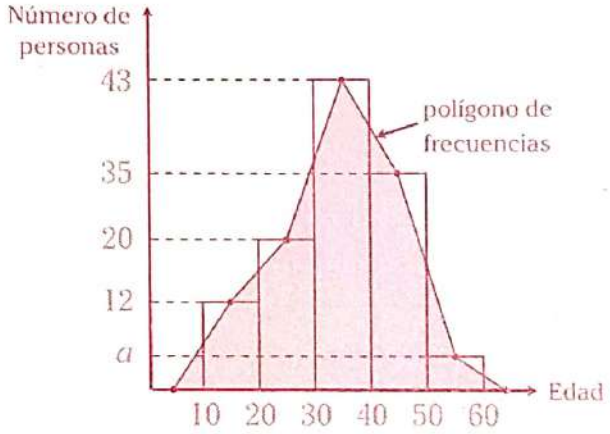
A) 157
B) 158,6
C) 159
D) 160
E) 162,5

21. Dado el siguiente diagrama escalonado de igual ancho de clase y entero, que describe el ingreso diario de 30 personas, ¿cuántos tienen ingreso diario de S/24 a S/48?



A) 8
B) 12
C) 16
D) 18
E) 21

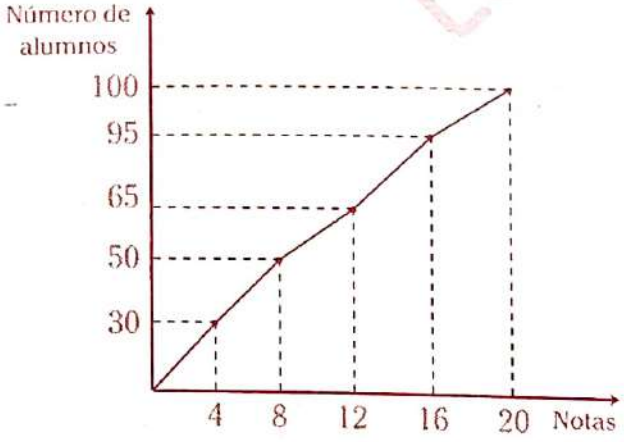
22. El siguiente gráfico muestra la distribución de las edades de un grupo de personas, en donde el área del polígono de frecuencias es 1200 u^2.



¿Qué cantidad de personas son mayores de 24 años pero menores de 54 años?

A) 81 B) 84 C) 86
D) 91 E) 94

23. Se muestra la ojiva de la frecuencia relativa acumulada de las notas de un examen que rindieron un grupo de alumnos. ¿Qué tanto por ciento de los alumnos obtuvo una nota desde 9 hasta 15 puntos?



A) 32,25% B) 32,75% C) 33,25%
D) 33,50% E) 33,75%

24. Dada la siguiente tabla de distribución de frecuencias de igual ancho de clase, calcule $\bar{x}$.

I_i	x_i	f_i	h_i	H_i
[- ⟩			0,1	
[- ⟩				
[- ⟩	35		0,2	
[- ⟩		15		0,9
[50 -]		5		

A) 25 B) 31 C) 35
D) 38 E) 42

25. Respecto a las edades de una familia de seis miembros, se tiene que $Mo=6$; $\bar{x}=20$ y $Me=12$. Calcule la edad mínima de la madre si ella es menor en 6 años que el padre.

A) 36 B) 39 C) 40
D) 41 E) 42

26. José y Érika tuvieron mellizos. Después de 5 años tuvieron trillizos. Respecto a las edades de esta familia, se sabe, después de un buen tiempo, que $\frac{Mo}{1}=\frac{Me}{Z}=\frac{\bar{x}}{4}$
Halle el promedio de las edades de los padres.

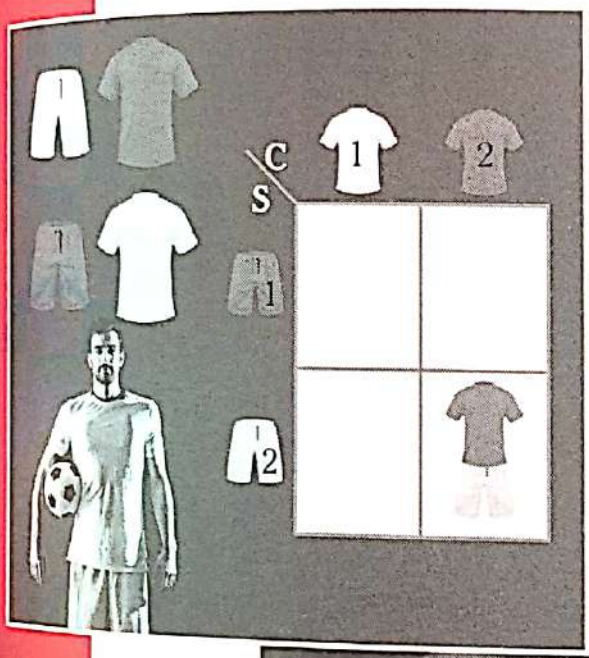
A) 40,7 B) 48,2 C) 51,7
D) 49,4 E) 52,5

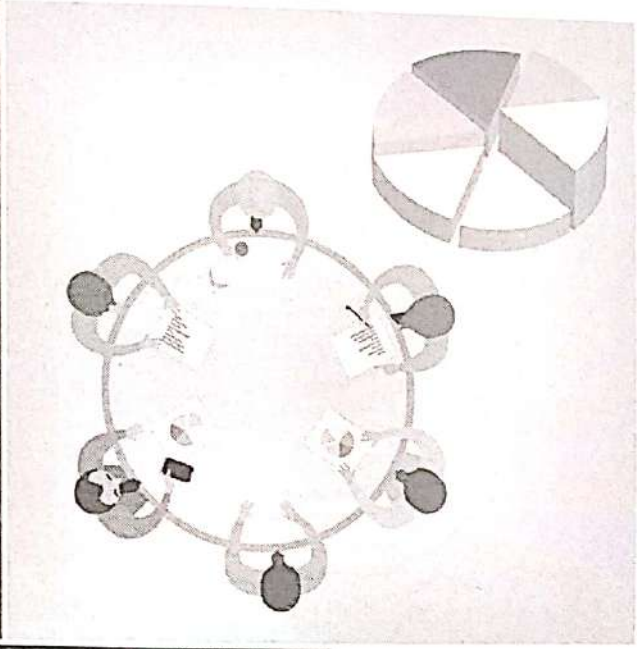
27. La media aritmética de un grupo de datos es 10 y su coeficiente de variación es del 20%. Señale, respectivamente, el nuevo coeficiente de variación en los siguientes casos:
I. A cada uno de los datos se le suma 2.
II. Cada uno de los datos se incrementa en 45%.

A) $16,\widehat{6}$%; 20%
B) 17,8%; 45%
C) $12,\widehat{6}$%; 20%
D) $12,\widehat{6}$%; 22,5%
E) $16,\widehat{6}$%; 22,5%

Capítulo

XX





Análisis combinatorio

Ángel Sánchez Oré

CAPÍTULO XX

ANÁLISIS COMBINATORIO

Objetivos

- Reconocer y aplicar los principios fundamentales de conteo en situaciones reales y concretas.
- Identificar las clases de ordenamientos que se realizan con una parte o con todos los elementos de un conjunto.
- Determinar la cantidad de grupos o subconjuntos que se pueden formar con parte o con todos los elementos de un conjunto.

Introducción

La combinatoria nació en el siglo XVI; en su estudio teórico aparecen ligados, entre otros, nombres científicos como Pascal, Fermat, Bernoulli, Leibniz y Euler. Para todos ellos, el punto de partida de sus investigaciones lo constituyó el problema combinatorio aplicado a los juegos de azar.

En los últimos años, la combinatoria ha entrado en un periodo de intenso desarrollo, relacionado con el crecimiento general del interés hacia los problemas de matemática discreta. El campo de análisis combinatorio concierne cada vez a más ramas del conocimiento. Tiene nexos con la programación lineal y la estadística, es utilizado para resolver problemas de la teoría de la información (por ejemplo, para confeccionar y descifrar claves) y en problemas matemáticos como en la teoría de grupos.

En muchas ocasiones vamos a estar interesados en conocer solo el número de elementos de un conjunto cuyos elementos cumplan ciertas condiciones, sin que para ello sea necesario enumerarlos. Con este objetivo, debemos hacer uso de las técnicas de conteo.

Podemos señalar dos tipos de problemas frecuentes en el análisis combinatorio: demostrar la existencia de subconjuntos formados por los elementos de un conjunto finito y que a la vez satisfacen ciertas condiciones; también contar o clasificar los subconjuntos de un conjunto finito y que a la vez satisfacen ciertas condiciones.

El presente capítulo iniciará explicando los principios de conteo, lo cual nos permitirá conocerlos e identificarlos; posteriormente, revisaremos las técnicas de conteo, para aprender a diferenciarlos uno del otro y saber en qué momento aplicaremos la permutación o la combinación. Además, identificaremos la forma de ordenar o agrupar uno o más elementos, de manera formal, apoyándonos del concepto de factorial de un número, de los conceptos de permutación y combinación, y de la relación que se dé entre ellos.

1▸ Definición

Es aquella parte de la matemática que se ocupa del estudio y de las propiedades de los grupos que pueden formarse con elementos dados (números, letras u objetos), distinguiéndose entre sí por el número de elementos que entran en cada grupo, por la clase de estos elementos y por el orden de colocación.

2▸ Principios fundamentales de conteo

En ciertos problemas se observa que una determinada actividad se puede dar de manera repetitiva, pero en lo que estaremos interesados es en conocer la cantidad de formas diferentes como puede resultar dicha actividad o acontecimiento. Para tales casos es útil conocer determinadas técnicas de conteo que facilitarán el cálculo, ya que en la mayoría de casos estaremos interesados en hallar la cantidad de formas o maneras diferentes de realizar un determinado acontecimiento o evento. Estos principios fundamentales de conteo nos proporcionan una forma abreviada de contar.

Algunos de estos son los siguientes:

- Organizar 12 libros en un estante con capacidad para 15 libros.
- Ordenar 5 personas para tomarles una foto.
- Elegir un presidente y un vicepresidente de un total de 6 candidatos.
- Lanzar una moneda y un dado simultáneamente para luego observar sus resultados.
- Extraer una carta de la baraja y ver el puntaje.
- Resolver 5 problemas de un total de 20.
- Escoger entre dos pares de zapatos o tres pares de zapatillas.

Todos estos acontecimientos se pueden realizar de una o varias maneras; para encontrar la cantidad de formas, se utilizarán dos principios fundamentales de conteo.

2.1. Principio de adición

Si un acontecimiento A puede realizarse de m maneras diferentes, otro acontecimiento B puede realizarse de n maneras diferentes, y no es posible realizar ambos eventos de manera simultánea o uno seguido del otro; entonces, llevar a cabo cualquiera de ellos (A o B) se podrá realizar de $(m+n)$ maneras diferentes.

Aplicación 1

Iván puede viajar de Lima a Chiclayo por vía aérea, usando 2 líneas de transporte aéreo o por vía terrestre a través de 3 líneas de ómnibus. ¿De cuántas formas puede realizar el viaje desde Lima a Chiclayo?

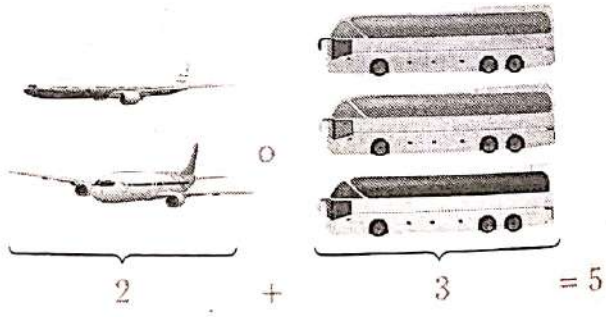
Resolución

Identificamos.

A: por vía aérea

B: por vía terrestre

Se observa que los acontecimientos A y B no se pueden realizar de manera simultánea.



Por lo tanto, se podrá ir por vía aérea o terrestre de 5 maneras diferentes.

Aplicación 2

Janet desea comprar un saco de arroz, el cual es vendido en 3 lugares distintos en el Mercado Central, en 2 lugares distintos en el Mercado de Caquetá, y en 4 lugares distintos en el Mercado Mayorista. ¿De cuántas maneras puede adquirir la bolsa de arroz?

Resolución

Se observa que Janet comprará el saco de arroz solo en uno de los tres lugares.

Mercado Central	o	Mercado de Caquetá	o	Mercado Mayorista	
3	+	2	+	4	= 9

Por lo tanto, Janet podrá adquirir el saco de arroz de 9 maneras diferentes.

Aplicación 3

¿Cuántos numerales de tres o cuatro cifras existen en base 4?

Resolución

Se tiene que

$$\overline{a\,b\,c_4} \quad \text{o} \quad \overline{m\,n\,p\,q_4}$$

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 \\ & 3 & 3 \end{array} \quad \text{valores que adoptan las cifras} \quad \begin{array}{cccc} m & n & p & q \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & 2 & 2 \\ & 3 & 3 & 3 \end{array}$$

$$3\cdot4\cdot4 \quad + \quad 3\cdot4\cdot4\cdot4$$

$$48 \quad + \quad 192 = 240$$

Por lo tanto, existen 240 numerales.

2.2. PRINCIPIO DE MULTIPLICACIÓN

Si un acontecimiento A puede efectuarse de m maneras diferentes y cuando ha sido efectuado por cualquiera de estas maneras, se realiza otro acontecimiento B, que puede efectuarse de n maneras diferentes, entonces ambos acontecimientos (A y B) se podrán realizar de $m \times n$ maneras diferentes.

Aplicación 4

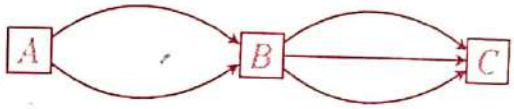
Para ir de A a B se puede realizar por dos caminos diferentes y para ir de B a C se tienen tres caminos diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes se puede ir de A a C pasando siempre por B?

Resolución

Identificamos

M: ir de A hacia B

N: ir de B hacia C



$$2 \times 3 = 6$$

Como se debe pasar siempre por B, se deben realizar M y N de manera conjunta.

Por lo tanto, se podrá ir de 6 maneras diferentes.

Aplicación 5

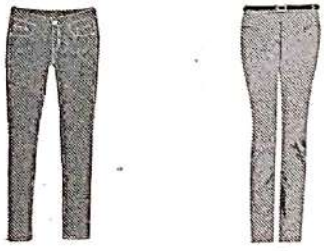
Ángela cuenta con tres blusas distintas y con dos pantalones diferentes también. ¿De cuántas maneras puede vestirse Ángela con dichas prendas (colocarse una blusa y un pantalón)?

Resolución

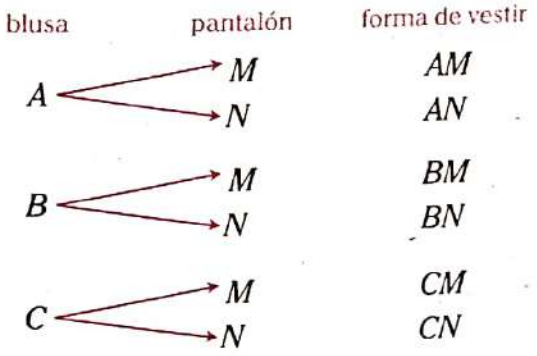
Sean las blusas A, B y C.

A B C

Sean los pantalones M y N.



M N



Para vestirse debe escoger una blusa y un pantalón, es decir, debe realizar una acción seguida de la otra.

$$\underbrace{\text{formas de elegir una blusa}}_{3} \times \underbrace{\text{formas de elegir un pantalón}}_{2} = 6$$

Por lo tanto, Ángela puede vestirse de 6 formas.

Aplicación 6

¿Cuántos numerales de tres cifras y todas pares existen en base 7?

Resolución

Sean los numerales de tres cifras en base 7 de la siguiente forma: abc_7.

$$\overline{a\ b\ c_7}$$

$$\begin{array}{ccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 2 & 2 \\ 6 & 4 & 4 \\ & 6 & 6 \end{array} \Bigg\} \text{cifras pares}$$

$$3 \cdot 4 \cdot 4 = 48$$

Para formar los numerales de tres cifras se deben escoger la primera, la segunda y la tercera cifra, es decir, las tres acciones se deben realizar de manera conjunta.

Por lo tanto, se tendrán 48 numerales solo con cifras pares en base 7.

Aplicación 7

Jorge desea viajar de Lima a Arequipa. Si por vía aérea existen 2 líneas, cada una con 4 salidas diarias, y por vía terrestre 3 líneas con 6 salidas diarias, ¿de cuántas maneras diferentes puede realizar su viaje Jorge?

Resolución

Se observa que el viaje lo podrá realizar por vía aérea o por vía terrestre, solo en una de las modalidades; debemos tener en cuenta que al escoger el medio de transporte, seguidamente se escogerá la salida.

$$\underbrace{\underbrace{\text{escoge la línea}}_{2} \times \underbrace{\text{escoge la salida}}_{4}}_{\text{vía aérea}} + \underbrace{\underbrace{\text{escoge la línea}}_{3} \times \underbrace{\text{escoge la salida}}_{6}}_{\text{vía terrestre}} = 26$$

Por lo tanto, Jorge podrá viajar de 26 maneras diferentes.

Aplicación 8

Un estudiante desea matricularse en el curso de Estadística I, el cual se dicta en tres turnos: mañana, tarde o noche. En la mañana hay 3 secciones diferentes; en la tarde hay 2 secciones diferentes; y en la noche hay 4 secciones diferentes. Si no hay cruces de horario por turno, ¿de cuántas maneras diferentes podrá matricularse dicho estudiante en el curso mencionado?

Resolución

El estudiante deberá escoger el turno

$$\underbrace{\text{mañana}}_{\text{escoge la sección}\ 3} + \underbrace{\text{tarde}}_{\text{escoge la sección}\ 2} + \underbrace{\text{noche}}_{\text{escoge la sección}\ 4} = 9$$

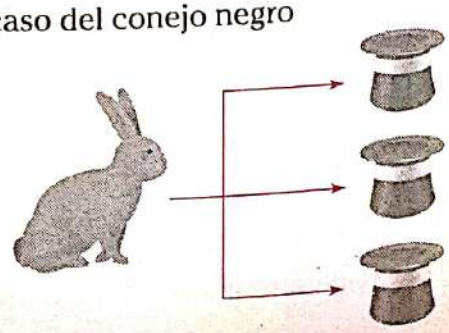
Por lo tanto, podrá matricularse en el curso de 9 maneras diferentes.

Aplicación 9

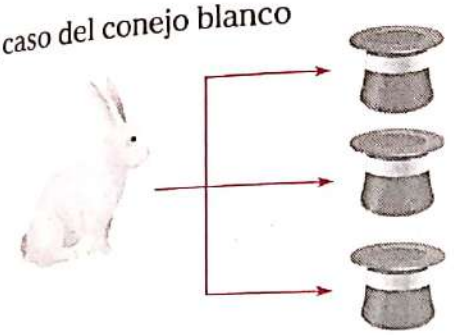
Señale de cuántas maneras diferentes un mago puede distribuir dos conejos (uno negro y otro blanco) en tres sombreros.

Resolución

En el caso del conejo negro



En el caso del conejo blanco



En resumen

Posibilidades: 3 × 3 = 9

Por lo tanto, podrá hacerlo de 9 maneras diferentes.

3› FACTORIAL DE UN NÚMERO

El factorial de un número entero y positivo n, el que se denota por $n!$ o $\lfloor n$, es el producto de todos los números enteros y consecutivos desde la unidad e inclusive hasta n.

Ejemplos

- $1!=1$
- $2!=1\times2=2$
- $3!=1\times2\times3=6$
- $4!=1\times2\times3\times4=24$
- $5!=1\times2\times3\times4\times5=120$

$$\boxed{n!=1\times2\times3\times\ldots\times(n-1)\times n}$$

También

- $3!=1\times2\times3=2!\times3$
- $4!=1\times2\times3\times4=3!\times4$
- $6!=1\times2\times3\times4\times5\times6=5!\times6$

$$\boxed{n!=(n-1)!\times n}$$

De lo anterior, si $n=1$, tendremos

$1!=0!\times1 \rightarrow 0!=1$

Por lo tanto, por convención se asume que $0!=1$.

Aplicación 10

Determine el valor de

$$E=\frac{7!\times22!}{21!\times6!}$$

Resolución

Sabemos que

$7!=6!\times7$

$22!=21!\times22$

Entonces

$$E=\frac{(6!\times7)\times(21!\times22)}{6!\times21!}$$

$\therefore\ E=7\times22=154$

Aplicación 11

Si se cumple que $\overline{abc}=a!+b!+c!$ halle el valor de $a\times b\times c$.

Resolución

Se sabe que

- $3!=6$
- $4!=24$
- $5!=120$
- $6!=720$
- $7!=5040$

Se observa que ninguna de las cifras podría ser 7 o mayor a 7, ya que su factorial tendría más de tres cifras.

De la misma manera, tampoco ninguna cifra podría ser 6, ya que su factorial es 720 y empieza en 7, lo que indicaría que habría una cifra 7 o mayor a 7, y estaríamos en la situación anterior.

Alguna de las cifras debe ser 5 para obtener un numeral de tres cifras.

Como

$5!=120 \rightarrow a=1$

Reemplazamos.

$\overline{1bc}=1+b!+c!$

Ahora, $b=5$ o $c=5$

Si $b=5$

$\rightarrow \quad \overline{15c}=1+5!+c!=121+c!$

No hay valor para c.

Si $c=5$

$\rightarrow \quad \overline{1b5}=1+b!+5!=121+b!$

$$\underset{\downarrow \atop 4}{\overline{b0}}=16+\underset{\downarrow \atop 24}{\underbrace{b!}}$$

Tendremos

$$\overline{abc}=145=1!+4!+5!$$

$\therefore \quad a\times b\times c=1\times 4\times 5=20$

4 ▸ PERMUTACIÓN

Son los diferentes arreglos u ordenamientos que se pueden realizar con una parte o con todos los elementos de un conjunto. Dependiendo de los elementos y la forma de realizar los arreglos, la permutación puede ser lineal, circular y con elementos repetidos.

4.1. PERMUTACIÓN LINEAL

Se denomina así a los diferentes arreglos realizados en una línea de referencia.

Ejemplos

- Dadas las letras A, B y C, hallemos todos los ordenamientos de dos letras diferentes que se pueden realizar.

  $AB, AC\,;\ BA, BC\,;\ CA, CB$

  La primera letra puede ser cualquiera de las tres; luego, la segunda debe ser diferente a la primera y por eso solo puede tomar dos valores.

  De ahí

1.ª letra	2.ª letra

  $3 \times 2 = 6$

Luego,

$$6=\frac{3\times 2\times 1}{1}=\frac{3!}{1!}=\frac{3!}{(3-2)!}$$

- Dado el conjunto $A=\{a;\ b;\ c;\ d\}$, veamos cuántas ternas ordenadas de elementos diferentes se pueden formar con los elementos de A.

1.er componente	2.º componente	3.er componente

  $4 \times 3 \times 2 = 24$

  Además, se puede expresar como

  $$\frac{4\times 3\times 2\times 1}{1}=\frac{4!}{1!}=\frac{4!}{(4-3)!}=24$$

- Del ejemplo anterior, veamos cuántos pares ordenados se podrían formar con los elementos de A (pares ordenados de elementos diferentes).

1.er componente	2.º componente

  $4 \times 3 = 12$

  Asimismo, se puede expresar como

  $$\frac{4\times 3\times 2\times 1}{2\times 1}=\frac{4!}{2!}=\frac{4!}{(4-2)!}=12$$

En general, si tuviéramos n elementos y los ordenamos de r en r, se tendría lo siguiente:

$$\overbrace{\boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{}\ \boxed{\cdots}\ \boxed{}\ \boxed{}}^{r\text{ elementos}}$$

$$n\times(n-1)\times(n-2)\times(n-3)\ \cdots\ (n-r+2)\times(n-r+1)$$

Esto se puede expresar como

$$\frac{n(n-1)(n-2)\times\ldots\times(n-r+1)\times[(n-r)\times(n-r-1)\times\ldots 1]}{[(n-r)\times(n-r-1)\times\ldots\times 1]}=\frac{n!}{(n-r)!}$$

Las permutaciones de n elementos tomados de r en r serán

$$\boxed{P_r^n = P_{(n;r)} = \frac{n!}{(n-r)!}} \quad ; \; 1 \leq r \leq n$$

Si $n=r$, es decir, si se toman todos los elementos del conjunto, se tendrá lo siguiente:

$$\boxed{P_n^n = P_n = P_{(n;n)} = n!}$$

Aplicación 12

En un club participan 30 socios para la elección de un presidente, vicepresidente y tesorero. ¿De cuántas maneras diferentes se puede llevar a cabo dicha elección?

Resolución

Se tiene lo siguiente:

formas de escoger al

presidente	vicepresidente	tesorero

$\therefore \; 30 \times 29 \times 28 = 24\,360$

Otra forma

$$P_3^{30} = \frac{30!}{(30-3)!} = \frac{30!}{27!}$$

$\therefore \; P_3^{30} = 24\,360$

Aplicación 13

En una maratón realizada por la academia César Vallejo participan 50 estudiantes. ¿De cuántas formas podrán ser premiados los tres primeros si no hay empate?

Resolución

Se tiene lo siguiente:

1.er lugar	2.º lugar	3.er lugar

$\therefore \; 50 \times 49 \times 48 = 117\,600$

Otra forma

Se desea hallar las diferentes ternas que se pueden formar con 50 elementos.

$$P_3^{50} = \frac{50!}{(50-3)!} = \frac{50!}{47!}$$

$\therefore \; P_3^{50} = 117\,600$

4.2. PERMUTACIÓN CIRCULAR

Es un arreglo u ordenamiento de elementos alrededor de un objeto o punto de referencia. Usualmente cuando se ordena alrededor de un objeto, lo que se hace es suponer que todos ellos se encuentran en una línea imaginaria cerrada; debido a ello no se puede decir cuál es el primer o último elemento, para ello se considera fijo un elemento, el cual es considerado como referencia.

Aplicación 14

¿Cómo se pueden sentar cuatro personas alrededor de una mesa?

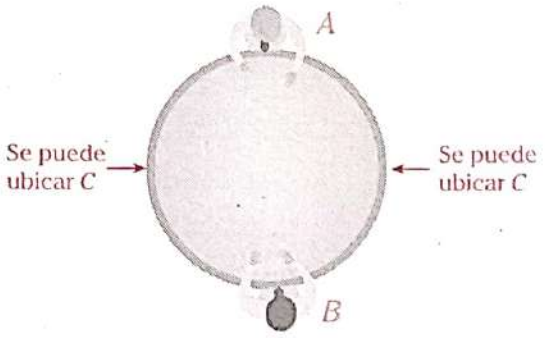
Resolución

Supongamos las personas A, B, C y D. Consideremos que

- A como elemento de referencia.

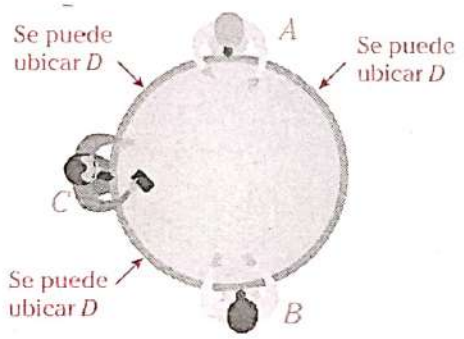
- para ubicar a B solo habría una posibilidad.

- si queremos ubicar a C, se tendrían dos posibles lugares.



Existen dos posibles lugares para C.

- para ubicar a D



Tres posibles lugares para D.

Persona: $A \quad B \quad C \quad D$

$\downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow$

Posibles ubicaciones: $1 \times 1 \times 2 \times 3 = 6 = 3!$

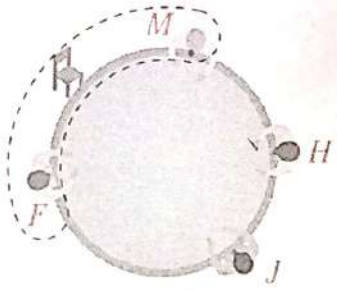
$\therefore \; P_c(4)=3!$

Aplicación 15

En una mesa de cinco asientos se desean ubicar a Francesca, Marisela, Jorge y Henry, con la condición de que la silla vacía se encuentre entre las damas. ¿De cuántas maneras diferentes se puede realizar dicho evento?

Resolución

Como la silla vacía debe estar entre Francesca y Marisela, consideramos fijos a estos tres elementos.



Luego se tendría $P_c(3)=2!$

Se observa que Francesca y Marisela pueden cambiar de lugar, en cuyo caso se tendrá lo siguiente:

Número total de maneras: $2! \times 2 = 4$

Por lo tanto, se podrán ubicar de 4 maneras diferentes.

Aplicación 16

Cinco parejas de esposos comparten una cena y se ubican alrededor de una mesa. Indique de cuántas maneras podrán ordenarse en cada una de las siguientes condiciones:

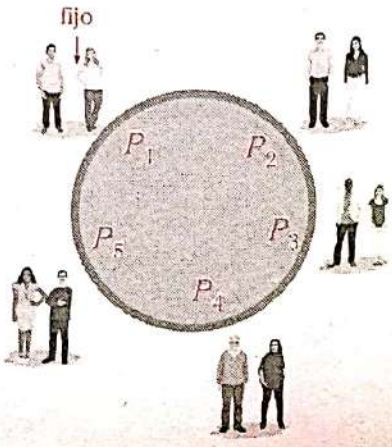
I. Cada pareja de esposos debe estar junta.

II. Las damas y los varones deben quedar alternados.

Resolución

I. Se considera a cada pareja como un solo elemento.

P_i: pareja i, $\forall\, i \in \mathbb{Z}^+ \;\wedge\; i \leq 5$



Será una permutación de cinco elementos alrededor de un objeto.

$P_c(5)=4!$

Sin embargo, hay que tener en cuenta que cada pareja de esposos puede permutar de lugar.

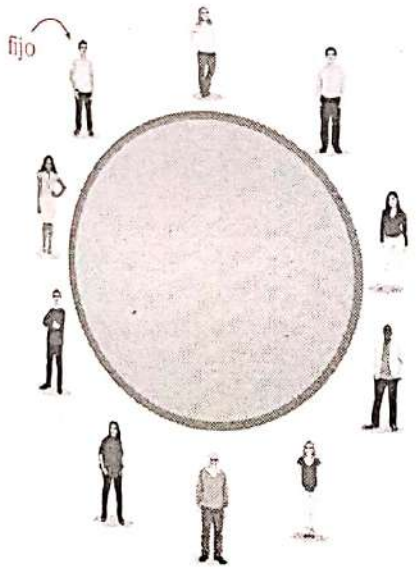
Así tendremos

n.º total de ordenamientos

$$\begin{array}{ccccc} P_1 & P_2 & P_3 & P_4 & P_5 \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow \end{array}$$

$\therefore\ 4! \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 4! \times 2^5 = 768$

II. Ordenamos a las damas y los varones de forma alternada.



- Para que puedan estar alternados, las damas se ubican en posiciones específicas, al igual que los varones.
- Luego, habiendo fijado un elemento (varón) se observa que las damas se pueden ubicar en 5 lugares diferentes y los varones en 4.

$\therefore$ (n.º total de ordenamientos)$=5! \times 4!$

Aplicación 17

Juegan a la ronda n niños alrededor de un poste, formando una ronda diferente cada 3 minutos. Si tuvieron que jugar durante 6 horas para agotar todas las ordenaciones posibles, calcule n.

Resolución

Observemos que 6 horas <> 360 minutos.

Se trata de ordenar a los n niños alrededor de un objeto, lo cual será

$P_c(n)=(n-1)!$

Pero como cada 3 minutos forman una nueva ronda, el tiempo para poder formar todas las rondas diferentes es

$P_c(n)\times 3$

Del dato tendremos

$P_c(n)\times 3=360$

$P_c(n)=120$

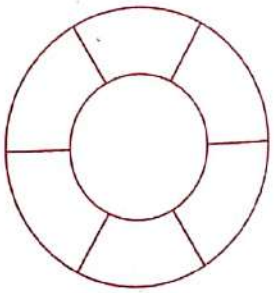
$(n-1)!=2\times 3\times 4\times 5$

$(n-1)!=5!$

$\therefore\ n=6$

Aplicación 18

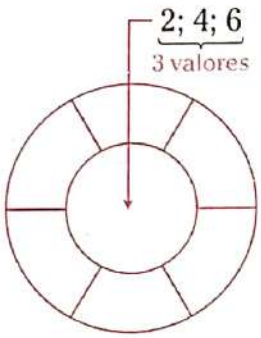
¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar las cifras significativas del sistema octanario en un tablero giratorio de la forma señalada, de modo que la cifra central sea un número par?



Resolución

El sistema octanario es el sistema de base 8, en el cual las cifras significativas son 1; 2; 3; 4; 5; 6; 7.

Se observa que si la cifra central es par, entonces se pueden colocar en el centro 2; 4 o 6 (3 valores diferentes) y alrededor de dicha cifra se ubicarán las restantes 6 cifras, es decir, se ordenarán alrededor de un objeto finalmente.



Por lo tanto, el número de ordenaciones diferentes es $P_c(6)\times 3=360$.

4.3. PERMUTACIÓN CON ELEMENTOS REPETIDOS

Es un arreglo u ordenamiento cuyos elementos no son todos distintos entre sí, quiere decir que hay elementos que se repiten y a los cuales se les considera que conforman una clase.

Ejemplo

Veamos de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar tres bolas de colores diferentes (en la primera columna), y dos bolas azules y una de color rojo (en la segunda columna).

Tres bolas de colores diferentes	Dos son azules $A=B$	
ABR	AAR	
ARB	ARA	
BAR	$\boxed{AAR}$	caso repetido
BRA	$\boxed{ARA}$	caso repetido
RAB	RAA	
RBA	$\boxed{RAA}$	caso repetido
$\downarrow$	$\downarrow$	
$P_3=3!$	$\frac{3!}{2}$	

Consideremos a las letras a, b, c, d y analicemos los casos.

- $a=c$
- $a=b$ y $c=d$
- $a=b=c$

Procederemos de la siguiente manera:

$a\neq b\neq c\neq d$	$a=c$	$a=b$ y $c=d$	$a=b=c$
abcd	*abad*	*aacc*	*aaad*
abdc	*abda*	***aacc***	*aada*
acbd	*aabd*	*acac*	***aaad***
acdb	*aadb*	*acca*	***aada***
adbc	*adba*	***acac***	*adaa*
adcb	*adab*	***acca***	***adaa***
bacd	*baad*	***aacc***	***aaad***
badc	*bada*	***aacc***	***aada***
bcad	***baad***	***acac***	***aaad***
bcda	***bada***	***acca***	***aada***
bdac	*bdaa*	***acac***	***adaa***
bdca	***bdaa***	***acca***	***adaa***
cabd	***aabd***	*caca*	***aaad***
cadb	***aadb***	***caca***	***aada***
cbad	***abad***	*caac*	***aaad***
cbda	***abda***	***caca***	***aada***
cdab	***adab***	*ccaa*	*adaa*
cdba	***adba***	***ccaa***	***adaa***
dabc	*daba*	***caac***	*daaa*
dacb	*daab*	***caca***	***daaa***
dbac	*dbaa*	***caac***	***daaa***
dbca	***dbaa***	***caca***	***daaa***
dcab	***daab***	***ccaa***	***daaa***
dcba	***daba***	***ccaa***	***daaa***
$P_4=4!$	$\frac{4!}{2}=\frac{4!}{2!}$	$\frac{4!}{4}=\frac{4!}{2!\times 2!}$	$\frac{4!}{6}=\frac{4!}{3!}$

Lo resaltado son los casos repetidos.

De lo anterior podemos concluir que sí se disponen de n elementos, en los cuales encontramos lo siguiente:

n_1: de una primera clase

n_2: de una segunda clase

n_3: de una tercera clase

$\vdots$

n_K: de una K-ésima clase

El número de permutaciones diferentes en fila que se pueden hacer con estos elementos se denota y calcula como

$$P^{n}_{(n_1;n_2;n_3;\ldots;n_K)}=\frac{n!}{n_1!\times n_2!\times n_3!\times\ldots\times n_K!}$$

Además,

$$n_1+n_2+n_3+\ldots+n_K\leq n$$

Aplicación 19

¿Cuántas palabras adicionales, con sentido o no, se pueden formar con las letras de la palabra ARITMÉTICA?

Resolución

Se observa lo siguiente:

- A se repite 2 veces
- I se repite 2 veces
- T se repite 2 veces
- R, M, E, C solo una vez cada una

Se trata de un ordenamiento con elementos repetidos; tendremos lo siguiente:

$$P^{10}_{(2;2;2;1;1;1;1)}=\frac{10!}{2!\times2!\times2!\times1!\times1!\times1!\times1!}=453\,600$$

Pero nos preguntan cuántas palabras adicionales; por lo tanto, el número de palabras es

$$453\,600-1=453\,599$$

Aplicación 20

¿De cuántas maneras diferentes se pueden ordenar 2 bolas rojas, 3 bolas verdes y 4 bolas azules en una fila, en cada uno de los siguientes casos?

I. Las bolas rojas se ubican en los extremos.

II. Una bola azul y una verde se ubican en los extremos.

Resolución

I. Por dato se tiene que

$$\underset{\text{3 verdes y 4 azules}}{R\underbrace{\qquad\qquad}R}$$

Como las bolas rojas están en los extremos (fijas), entonces las que pueden permutarse serán las bolas restantes.

$$\therefore\quad P^{7}_{(3;4)}=\frac{7!}{3!\times4!}=35$$

II. Una bola azul y una verde en los extremos, esto puede ser

$$V\underbrace{\qquad\qquad}A\quad\text{o}\quad A\underbrace{\qquad\qquad}V$$

Es decir, se van a permutar 2 bolas rojas, 2 bolas verdes y 3 bolas azules.

Así tendremos

$$P^{7}_{(2;\,2;\,3)}=\frac{7!}{2!\times2!\times3!}=210$$

Como se observa al inicio, depende también si la bola verde va al inicio y la azul al final o viceversa.

Por lo tanto, el número total de ordenamientos es

$$210\times2=420$$

Aplicación 21

¿Cuántos numerales de cinco cifras se pueden formar donde el producto de cifras sea 21?

Resolución

Sea el numeral de la forma $\overline{abcde}$.

Por dato, $a\times b\times c\times d\times e=21$.

De ahí $a\times b\times c\times d\times e=3\times7\times1\times1\times1$.

Los numerales a formar tendrán algunas cifras iguales, por lo cual consideraremos una permutación (ordenamiento) con elementos repetidos; de esta manera tendremos

$$P^{5}_{(3;1;1)}=\frac{5!}{3!\times 1!\times 1!}=20$$

Por lo tanto, se formarán 20 numerales cuyo producto de cifras es 21.

5▸ COMBINACIONES

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto determinado. Hay que tener en cuenta que al formar grupos no interesa el orden de los elementos.

Si tenemos n elementos y vamos a formar grupos o subconjuntos de r elementos, tendremos lo siguiente:

$$\boxed{C^{n}_{r}=\frac{n!}{(n-r)!r!}}\ ;\ 0\leq r\leq n$$

Aplicación 22

¿Cuántos comités de 3 personas se pueden formar con un grupo de 4 personas?

Resolución

Sean las personas A, B, C, D.

Como solo se quiere formar grupos, no interesa el orden. Así tendremos los siguientes grupos:

ABC; ACD; ABD; BCD

Por lo tanto, se pueden forman cuatro grupos.

Otra forma

También podríamos decir que, como de las cuatro personas con las que contamos vamos a formar grupos de tres, de un total de cuatro elementos vamos a formar subconjuntos de tres elementos, lo cual se podría calcular fácilmente de la siguiente manera:

$$C^{4}_{3}=\frac{4!}{3!\,1!}=4$$

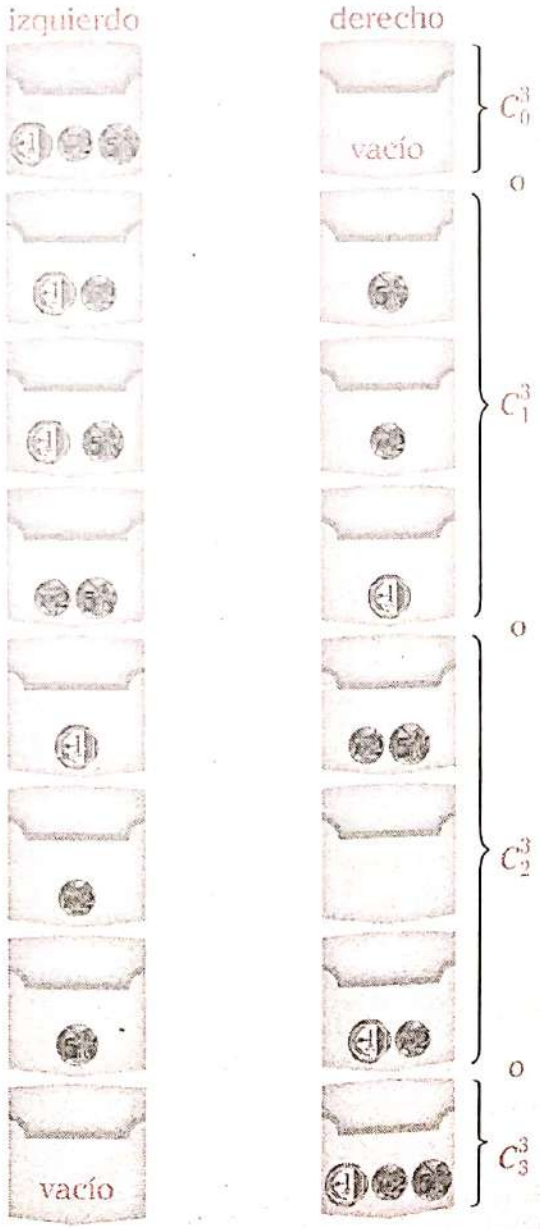
Aplicación 23

¿Cómo se pueden distribuir tres monedas (de un sol, dos soles y cinco soles) en los bolsillos delanteros de un pantalón?

Resolución

Tengamos presente que basta con analizar uno de los bolsillos, ya que al poner una cierta cantidad de monedas en uno de ellos, en el otro bolsillo directamente se pondrán las monedas restantes.

Veamos gráficamente lo que sucede.



$\rightarrow\ C^3_0+C^3_1+C^3_2+C^3_3=2^3=8$

Por lo tanto, se observa que hay 8 casos.

Aplicación 24

Iván y Valery, dos niños muy observadores, empiezan a contar todos los apretones de manos que se dan los adultos y llegan a contar un total de 91 apretones de manos. Determine cuántos adultos se encontraban en dicha reunión si todos los adultos demostraron su cortesía a todos los demás.

Resolución

Los apretones de mano se dan entre dos personas, sin interesar el orden. Si consideramos que en total hay n adultos, el número de apretones de manos que se dan sería similar al contar cuántos grupos diferentes de dos personas se podrían formar con n elementos; así tendríamos

$$C_2^n=91$$

$$\frac{n(n-1)}{2}=91$$

Operamos.

$$n(n-1)=2\times7\times13$$

$$n(n-1)=14\times13$$

$$\therefore\ n=14$$

5.1. COMBINACIÓN CON REPETICIÓN

Son los diferentes grupos o subconjuntos que se pueden formar con una parte o con todos los elementos de un conjunto determinado, pero considerando que hay algunos elementos iguales.

Si tenemos m elementos de los cuales solo r son diferentes y queremos formar grupos de n elementos, tendremos lo siguiente:

$$\boxed{CR_r^n=\frac{(n+r-1)!}{(r-1)!\,n!}}\ ;\ r<n<m$$

Aplicación 25

¿De cuántas formas diferentes se puede comprar ocho pliegos de papel satinado si los hay de cuatro colores distintos?

Resolución

Sean los colores diferentes A, B, C, D.

Como se debe escoger ocho pliegos de papel, se tiene

$$CR_4^8=\frac{11!}{3!\,8!}=165$$

Por lo tanto, se puede comprar de 165 formas diferentes.

Aplicación 26

Dos niñas recogieron 9 margaritas, 12 claveles y 10 rosas. ¿De cuántas maneras pueden dividirse estas flores si las flores de un mismo color se consideran idénticas.

Resolución

Evaluamos el número en que pueden distribuirse los tres grupos de flores por separado.

$$CR_2^9=\frac{10!}{1!\,9!}=10\ \text{(margaritas)}$$

$$CR_2^{12}=\frac{13!}{1!\,12!}=13\ \text{(claveles)}$$

$$CR_2^{10}=\frac{11!}{1!\,10!}=11\ \text{(rosas)}$$

Como las flores de cada tipo pueden distribuirse independientemente de las de los otros tipos, por el principio de multiplicación se tendría

$$10\times13\times11=1430$$

Por lo tanto, se pueden dividir de 1430 maneras. Nótese que en estas formas las hay extremadamente injustas, en las cuales, por ejemplo, una de los niñas se queda sin flores.

LECTURA

Historia de la combinatoria

El nacimiento y desarrollo de la combinatoria ha sido paralelo al desarrollo de otras ramas de las matemáticas, tales como el álgebra, la teoría de números, y la probabilidad. Desde tiempos muy remotos ha habido problemas de combinatoria que han llamado la atención de los matemáticos, por ejemplo:

- Los coeficientes binominales, que son los coeficientes enteros del desarrollo de $(a+b)$, fueron conocidos en el siglo XII.
- El triángulo de Pascal, que es una disposición triangular de los coeficientes binominales, fue desarrollado en el siglo XIII.

Se puede considerar que en Occidente la combinatoria surge en el siglo XVII con los trabajos de Blaise Pascal y de Pierre Fermat sobre la teoría de juegos de azar. Estos trabajos, que formaron los fundamentos de la teoría de la probabilidad, contenían asimismo los principios para determinar el número de combinaciones de elementos de un conjunto finito, y así se estableció la tradicional conexión entre combinatoria y probabilidad.

El término "combinatoria" tal y como lo usamos actualmente fue introducido por Wihem Leibniz en su *Dissertartio de arte combinatoria*. De gran importancia para la consolidación de la combinatoria fue el artículo de *Ars Conjectandi* de J.Bernouilli; este trabajo estaba dedicado a establecer las nociones básicas de probabilidad. Para esto fue necesario introducir también un buen número de nociones básicas de combinatoria, pues se usaron fuertemente como aplicaciones al cálculo de probabilidades. Se puede decir que con los trabajos de Leibniz y Bernoulli se inicia el establecimiento de la combinatoria como una nueva e independiente rama de las matemáticas.

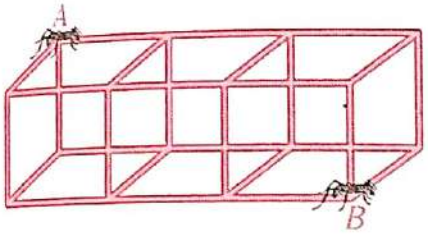
El matemático suizo Leonard Euler fue quien desarrolló a principios del siglo XVIII una auténtica escuela de matemática combinatoria. En sus artículos sobre la partición y descomposición de enteros positivos en sumandos, estableció las bases de uno de los métodos fundamentales para el cálculo de configuraciones combinatorias, que es el método de las funciones generadoras. También se le considera el padre de la teoría de grafos por el planteamiento y solución de los problemas de los puentes de Konigsberg usando por primera vez conceptos y métodos de teoría de grafos. Los primeros problemas de teoría de grafos surgieron de la búsqueda de solución a algunos problemas cotidianos y también en el planteamiento de algunos acertijos matemáticos tales como el problema de los puentes de Konigsberg, la colocación de reinas en un tablero de ajedrez con alguna restricción, problemas de transporte, el problema del viajero, etc.

Adaptado de <http://www.estadisticaparatodos.es>.

Problemas resueltos

Problema 1

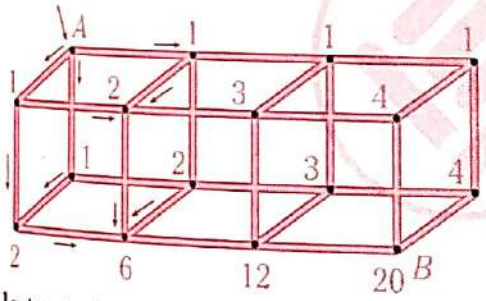
Se tiene la siguiente estructura metálica:



¿De cuántas maneras puede ir una hormiga de A a B sin retroceder?

Resolución

De este lugar parte la hormiga; analicemos de cuántas maneras diferentes podría llegar a cada punto teniendo en cuenta que no puede retroceder.



Por lo tanto, la hormiga tendrá 20 caminos diferentes.

Problema 2

Para vestirse, Cristina dispone de 4 blusas, 5 pantalones, 6 vestidos y 3 pares de zapatos, todos diferentes. ¿De cuántas maneras diferentes podrá vestirse?

Resolución

Cristina podría vestirse de la siguiente manera:

Caso 1

$$(\text{n.º de formas}) = \underset{\left(\substack{1\\ \text{blusa}}\right)}{4} \times \underset{\left(\substack{1\\ \text{pantalón}}\right)}{5} \times \underset{\left(\substack{1 \text{ par de}\\ \text{zapatos}}\right)}{3} = 60$$

Caso 2

$$(\text{n.º de formas}) = \underset{\left(\substack{1\\ \text{vestido}}\right)}{6} \times \underset{\left(\substack{1 \text{ par de}\\ \text{zapatos}}\right)}{3} = 18$$

Por lo tanto, el número de casos es $60+18=78$.

Problema 3

Jesús quiere ordenar en la última casilla de su estante 5 obras, la primera de 3 tomos, la segunda de 4 tomos, la tercera de 5 tomos, la cuarta de 2 tomos y la última de 1 solo tomo. Si Jesús quiere ordenarlos de tal manera que cada obra tenga los tomos juntos, ¿de cuántas maneras diferentes Jesús puede ordenar sus obras?

Resolución

Se tiene lo siguiente:

$$\text{obras} \begin{cases} A\text{: } A_1; A_2; A_3 & \text{(3 tomos)} \\ B\text{: } B_1; B_2; B_3; B_4 & \text{(4 tomos)} \\ C\text{: } C_1; C_2; C_3; C_4; C_5 & \text{(5 tomos)} \\ D\text{: } D_1; D_2 & \text{(2 tomos)} \\ E\text{: } E_1 & \text{(1 tomo)} \end{cases}$$

Los tomos deben estar juntos y todas las formas en que se pueden ordenar son las siguientes:

$$\underbrace{(A_1; A_2; A_3)}_{3!},\ \underbrace{(B_1; B_2; B_3; B_4)}_{4!},\underbrace{(C_1; C_2; C_3; C_4; C_5)}_{5!},$$

$$\underbrace{(D_1; D_2)}_{2} \text{ y } \underbrace{(E_1)}_{1}$$

Ahora, calculamos las formas distintas en que se pueden ordenar las obras (5!)

Por lo tanto, por el principio de la multiplicación el número de maneras de ordenar las obras sería

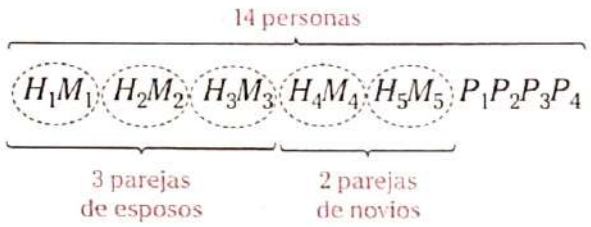
$$(3!\ 4!\ 5!\ 2!)\ 5! = 2! \cdot 3! \cdot 4! \cdot 5!^2$$

Problema 4

Indique cuántas maneras diferentes se pueden sentar en una banca 14 personas, de modo que los esposos y los novios estén juntos; además, las novias deben estar a la izquierda de sus novios; se sabe que en el grupo hay 3 parejas de esposos y 2 parejas de novios.

Resolución

Se tiene lo siguiente:



Las parejas de esposos deben estar juntos (hay 2 formas de estarlo) y los novios también, con la novia a la izquierda de sus novios (hay solo una forma de estarlo).

Por lo tanto, el número de maneras sería

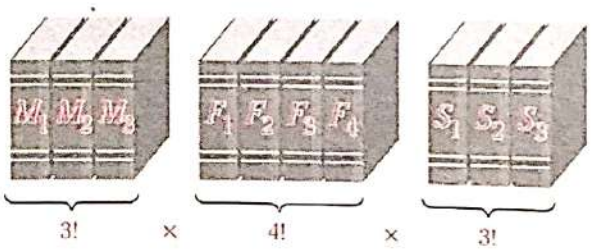
$$9!\times 2!\times 2!\times 2!\times 1\times 1=9!\times 8$$

Problema 5

Un estudiante ha comprado 3 libros de matemáticas diferentes, 4 libros de física y 3 libros de sociales, todos diferentes. Él desea ordenarlos en un estante con 10 espacios. ¿De cuántas maneras podrá hacerlo si los libros de un mismo curso deben estar juntos?

Resolución

Gráficamente sería



$$\therefore \begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{maneras}\end{pmatrix}=3!\times 4!\times 3!\times \underset{\substack{\uparrow\\ \text{n.º de ordenamiento}\\ \text{de los 3 bloques de}\\ \text{libros}}}{3!}=5184$$

Problema 6

¿Cuántas palabras diferentes (con sentido o no) se pueden formar con las letras de la palabra BANANA?

Resolución

Las letras de la palabra BANANA son

$$\underbrace{A, A, A}_{3\text{ veces}},\ \underbrace{N, N}_{2\text{ veces}},\ B$$

Las palabras diferentes que se pueden formar están dadas por

$$P^{6}_{(3;\,2;\,1)}=\frac{6!}{3!\times 2!\times 1!}=60$$

Por lo tanto, se pueden formar 60 palabras diferentes.

Problema 7

Se tienen 6 palos de igual tamaño, pero de diferentes colores, con ellos se quiere armar un hexágono regular. ¿Cuántas presentaciones diferentes podremos formar?

Resolución

Graficamos.

Dado que cada palito es de color diferente y están ubicados en una línea cerrada, se tratará de un ordenamiento alrededor de un objeto.

Por lo tanto, el número de maneras es

$$P_c(6)=5!=120$$

Problema 8

Juan tiene cinco sobrinas y cuatro sobrinos. ¿De cuántas maneras puede llevar a pasear a sus sobrinos si desea llevar dos sobrinas y por lo menos a un sobrino?

Resolución

El número de maneras para llevar dos sobrinas es

$$C_2^5$$

El número de maneras para llevar, por lo menos, un sobrino es

$$2^4-1$$

Dado que debe ocurrir la elección de las dos sobrinas y, por lo menos, un sobrino.

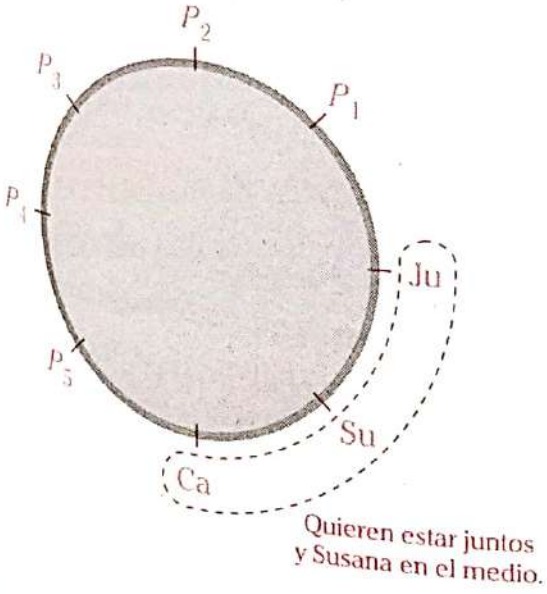
$\therefore$ (n.º de maneras) $=C_2^5\times(2^4-1)=150$

Problema 9

Ocho personas (4 hombres y 4 mujeres) sentadas alrededor de una mesa quieren cambiar de posiciones. ¿De cuántas maneras diferentes lo pueden hacer si Juan, Carlos y Susana quieren sentarse juntos, pero Susana quiere estar siempre al centro?

Resolución

Es un ordenamiento circular de 8 elementos.



Considerando a P_2 fijo y que el grupo de tres personas se puede ubicar solo de dos maneras, permutamos los demás elementos.

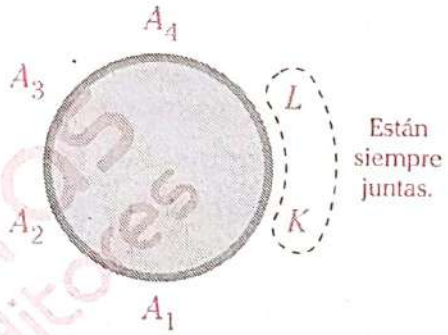
$\therefore \quad 5!\times 2=240$

Problema 10

Luisa se sienta con sus cinco amigas en círculo para jugar yases. ¿De cuántas maneras podrán ordenarse si Luisa y su amiga Karina se sientan siempre juntas?

Resolución

Gráficamente tenemos lo siguiente:



$$\therefore \begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{maneras}\end{pmatrix}=\underset{\substack{\uparrow\\ \text{n.º de formas}\\ \text{de ordenar 5}\\ \text{elementos en}\\ \text{forma circular}}}{P_c(5)}\times\underset{\substack{\uparrow\\ \text{n.º de formas de}\\ \text{ordenar } L \text{ y } K}}{P_2^2}=4!\times 2!=48$$

Problema 11

Cuatro parejas de esposos se ubican alrededor de una fogata. ¿De cuántas maneras podrán sentarse si cada pareja debe estar junta?

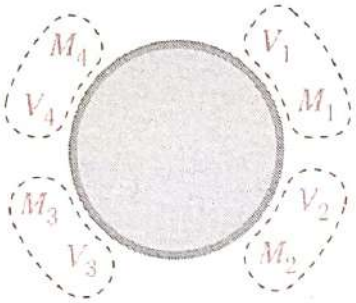
Resolución

Sean las parejas

$$(V_1; M_1),\ (V_2; M_2),\ (V_3; M_3),\ (V_4; M_4)$$

Como siempre quieren estar juntos, se les considera como solo elemento.

Gráficamente tenemos lo siguiente:



$$\therefore \begin{pmatrix} \text{n.º de} \\ \text{maneras} \end{pmatrix} = \underbrace{3!}_{\text{permutación circular de las 4 parejas}} \times 2! \times 2! \times 2! \times 2! = 96$$

Problema 12

¿De cuántas maneras Carlos podrá seleccionar los sabores de su helado si hay siete sabores disponibles y desea escoger, por lo menos, tres sabores?

Resolución

Sean los siete sabores a_1; a_2; a_3; a_4; a_5; a_6; a_7.

Dado que al escoger los sabores no importa el orden, entonces usamos combinaciones.

- Para 3 sabores: C_3^7
- Para 4 sabores: C_4^7
- Para 5 sabores: C_5^7
- Para 6 sabores: C_6^7
- Para 7 sabores: C_7^7

Por lo tanto, el número de maneras será

$$C_3^7 + C_4^7 + C_5^7 + C_6^7 + C_7^7 = 99$$

Problema 13

De un grupo de 12 personas se busca escoger un grupo de 9 personas para abordar un bote con 8 remos y con un timón. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden escoger dicho grupo si se sabe que de las 12 personas solo 4 pueden llevar el timón?

Resolución

Sean las 12 personas

$$\underbrace{\underbrace{P_1; P_2; P_3; P_4}_{\text{Pueden llevar el timón.}}; P_5; \ldots; P_{12}}_{\text{Todos pueden remar.}}$$

Primero escogemos la persona que puede llevar el timón C_1^4; al escoger una persona para llevar el timón, nos quedarían once personas de las cuales escogemos 8.

Por lo tanto, el número de maneras diferentes que se pueden ubicar sería

$$C_1^4 \times C_8^{11} = 660$$

Problema 14

En un corral hay dos conejos, tres cuyes y cuatro gallinas. ¿Cuántos grupos de animales existen de manera que entre las escogidas se encuentre, por lo menos, un animal de cada especie?

Resolución

En el grupo elegido debe haber, por lo menos un conejo, por lo menos, un cuy; además, por lo menos, una gallina.

Para escoger, por lo menos, un conejo

$$C_1^2 + C_2^2 = 2^2 - C_0^2 = 2^2 - 1$$

Para escoger por lo menos un cuy: $2^3 - 1$

Para escoger por lo menos una gallina: $2^4 - 1$

Por lo tanto, el total de grupos que se pueden formar es

$$(2^2-1) \times (2^3-1) \times (2^4-1)$$
$$3 \times 7 \times 15 = 315$$

Problema 15

De un grupo de seis personas se quiere escoger un grupo de cuatro personas para abordar un bote con tres pares de remos y con un timón. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden ubicar si se sabe que de las seis personas solo tres puede llevar el timón?

Resolución

Se dispone de seis personas.

Abordan un bote para cuatro personas.

En primer lugar, se escoge a la persona que llevará el timón y luego a las 3 personas restantes para ordenarlas en los 3 asientos.

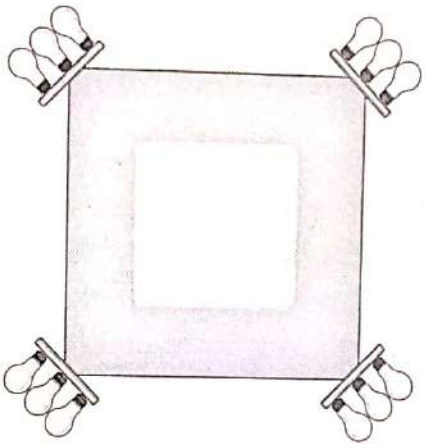
$\therefore\ C_1^3 \times C_3^5 \times 3! = 3 \times 10 \times 6 = 180$

Problema 16

Un sistema para hacer señales tiene la forma de figura cuadrada, y en cada vértice posee tres focos de distinto color (rojo, verde y blanco). ¿Cuántas señales se puede hacer si en cada vértice solo puede estar prendido un foco y además debe prenderse por lo menos dos focos?

Resolución

Se tiene el sistema para hacer señales.



En cada vértice solo puede estar prendido un foco (de los tres que dispone) y deben prender dos focos por lo menos.

con 2 focos prendidos	o	con 3 focos prendidos	o	con 4 focos prendidos
$C_2^4 \times 3^2$	+	$C_3^4 \times 3^3$	+	$C_4^4 \times 3^4$

$= 6 \times 9 + 4 \times 27 + 1 \times 81 = 243$

Por lo tanto, se pueden hacer 243 señales.

Problema 17

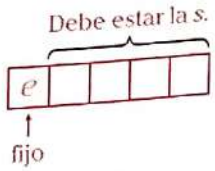
¿Cuántas palabras de 6 letras que contengan 2 vocales diferentes y 4 consonantes distintas se pueden formar con 4 vocales incluyendo la *e* y 6 consonantes incluyendo la *s*, de manera que empiecen con *e* y contengan la *s*?

Resolución

Para formar las palabras de 6 letras se cuenta con lo siguiente:

- 4 vocales: *e*; ...; ...; ...
- 6 consonantes: *s*; ...; ...; ...; ...; ...

Por condición debe empezar con la letra *e*.



Solo faltaría elegir una vocal de las 3 que quedan y 3 consonantes de las 5 que quedan; luego debemos ordenarlas.

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{n.º total de}\\ \text{palabras}\end{pmatrix} = C_1^3 \times C_3^5 \times 5! = 3600$$

Problema 18

En una reunión hay seis varones y seis mujeres. ¿De cuántas maneras se puede formar una delegación de 5 miembros en la que al menos se debe incluir a 2 mujeres?

Resolución

Se quiere formar delegaciones de 5 miembros en las que se debe incluir por lo menos a 2 mujeres. Se tendrían los siguientes casos:

Caso 1

Se escojen 2 mujeres de un total de 6.

Se escojen 3 varones de un total de 6.

$$C_2^6 \times C_3^6 = 300$$

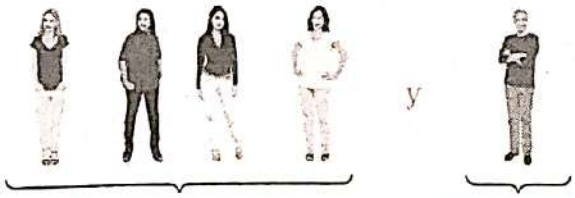
Caso 2

Se escojen 3 mujeres de un total de 6.

Se escojen 2 varones de un total de 6.

$$C_3^6 \times C_2^6 = 300$$

Caso 3

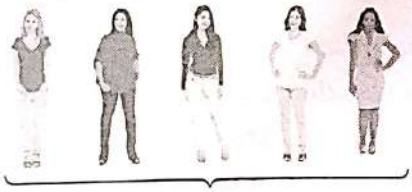


Se escojen 4 mujeres de un total de 6.

Se escojen 1 varón de un total de 6.

$$C_4^6 \times C_1^6 = 90$$

Caso 4



Se escojen 5 mujeres de un total de 6.

$$C_5^6 = 6$$

Por lo tanto, el número de modos para formar las delegaciones es

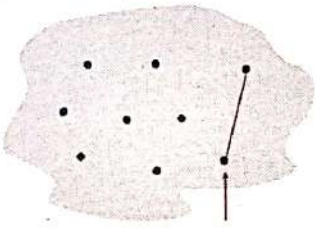
$$300+300+90+6=696$$

Problema 19

En un plano existen n puntos; no hay más de dos que son colineales, con los cuales se forman segmentos, de tal manera que el número de estos sea igual a $5n$. Halle el valor de n.

Resolución

Gráficamente sería



Para formar segmentos se necesitan 2 puntos.

Por dato

$$\underbrace{\begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{segmentos}\end{pmatrix}}_{C_2^n = 5n} = 5n$$

$$\frac{n!}{(n-2)! \times 2!} = 5n$$

$$\frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)! \times 2!} = 5n$$

$$\frac{n-1}{2} = 5$$

$$\therefore \ n=11$$

Problema 20

En un camión interprovincial hay lugar para seis animales: hay vacas, caballos y asnos. Se tienen disponibles no menos de seis de cada uno listos para embarcarse. ¿De cuántas maneras puede realizarse el embarque?

Resolución

Como hay tres clases diferentes de animales y solo interesa escoger un grupo de 6 animales, sin interesar el orden en que los ubiquemos, se tiene una combinación con repetición.

$$\therefore \quad CR_3^6 = \frac{8!}{2!\,6!} = 28$$

Problema 21

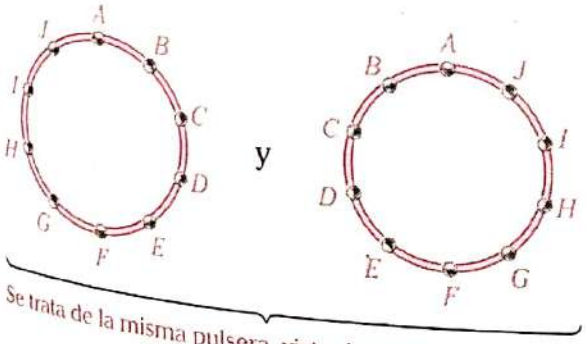
Para confeccionar una pulsera para un bebé, son necesarias 10 perlas. ¿Cuántas pulseras distintas se podrían confeccionar si todas las perlas son de colores diferentes?

Resolución

Es un ordenamiento circular de 10 elementos, es decir,

$$P_c(10) = 9! = 362\,880$$

Sin embargo, debemos percatarnos de que se darán parejas de casos aparentemente distintos, por ejemplo



Por lo tanto, el número de pulseras diferentes será

$$\frac{362\,880}{2} = 181\,440$$

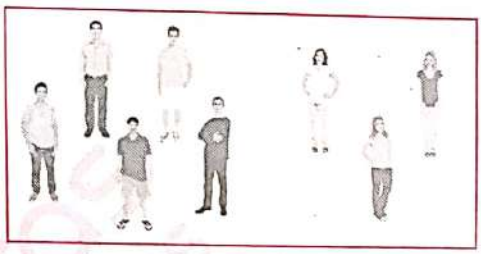
Problema 22

Se presenta un grupo conformado por cinco varones y tres mujeres. Indique cuántas comisiones de cuatro personas se pueden formar en cada una de las siguientes consideraciones.

I. No hay restricción alguna.
II. Deben haber al menos dos mujeres.
III. Deben haber al menos dos varones.

Resolución

I. Como no hay restricción alguna de todo el grupo conformado por ocho personas (5 varones, 3 mujeres), vamos a escoger cuatro personas.



De este conjunto vamos a escoger cuatro elementos.

Entonces

$$C_4^8 = \frac{8!}{4!\,4!} = 70$$

Por lo tanto, se podrán formar 70 comisiones.

II. Deben haber al menos dos mujeres; como se desea escoger cuatro personas, se tendrán los siguientes casos:

$$C_2^3 \times C_2^5 + C_3^3 \times C_1^5$$

$$\therefore \; 3 \times 10 + 1 \times 5 = 35$$

III. Si deben haber al menos dos varones, tendremos los siguientes casos:

$$C_2^5 \times C_2^3 + C_3^5 \times C_1^3 + C_4^5$$

$$\therefore \quad 10 \times 3 + 10 \times 3 + 5 = 65$$

Problema 23

¿Cuántos números de 7 cifras existen, tal que su producto de cifras sea 125?

Resolución

Sea el producto de 7 cifras que resulte 125.

$$5\times5\times5\times1\times1\times1\times1$$

El número de casos dependerá del ordenamiento lineal que se realizan con sus cifras, así por ejemplo:

5551111
5515111
5511511
⋮

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\text{cantidad de}\\ \text{números de}\\ \text{7 cifras}\end{pmatrix} = P^7_{(3;\,4)} = \frac{7!}{3!4!} = 35$$

Por lo tanto, existen 35 números.

Problema 24

Luz Adriana desea repartir 9 estampas de la siguiente manera: 4 a su profesora, 3 a su prima y 2 a su amiga. ¿De cuántas maneras diferentes se puede realizar el reparto?

Resolución

1. Reparte a su profesora.

Le quedan 5 estampas.

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{maneras}\end{pmatrix} = C_4^9 = 126$$

2. Reparte a su prima.

Le quedan 2 estampas.

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{maneras}\end{pmatrix} = C_2^5 = 10$$

3. Reparte a su amiga.

$$\rightarrow \begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{maneras}\end{pmatrix} = C_2^2 = 1$$

Finalmente, para encontrar el número total de maneras debemos multiplicar los resultados.

$$\therefore \begin{pmatrix}\text{n.º de}\\ \text{maneras}\end{pmatrix} = 126\times10\times1 = 1260$$

Test

1. Para viajar de Lima a Piura se disponen de 5 líneas aéreas y 6 líneas terrestres. ¿De cuántas maneras diferentes se puede viajar de Lima a Piura?

A) 10 B) 11 C) 13
D) 20 E) 30

2. Luis va a comprar un repuesto para su auto que se vende en 4 tiendas en el distrito de Breña, en 6 tiendas en Pueblo Libre y en 2 tiendas en San Miguel. ¿De cuántas maneras podrá comprar dicho repuesto?

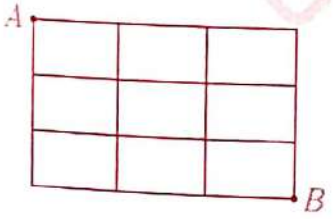
A) 12 B) 20 C) 30
D) 36 E) 48

3. María tiene 5 blusas diferentes y 4 faldas diferentes. ¿De cuántas maneras se podrá vestir María utilizando estas prendas?

A) 9 B) 11 C) 15
D) 20 E) 30

4. En el gráfico, ¿de cuántas maneras se podrá ir de A hacia B sin retroceder?

A) 24
B) 30
C) 36
D) 28
E) 20



5. ¿De cuántas maneras se puede ubicar a 6 alumnos en una carpeta de 3 asientos?

A) 72 B) 90 C) 96
D) 108 E) 120

6. Indique de cuántas maneras se pueden distribuir 4 lapiceros diferentes en 3 cajas vacías si no es necesario que todas las cajas contengan algún lapicero.

A) 27 B) 12 C) 45
D) 64 E) 81

7. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar a 5 personas alrededor de una mesa circular?

A) 6 B) 12 C) 18
D) 24 E) 120

8. Indique de cuántas maneras diferentes se pueden ordenar en fila de 5 esferas de billar si 2 son azules y 3 son rojas.

A) 10 B) 12 C) 30
D) 60 E) 120

9. ¿Cuántos grupos de 3 frutas diferentes se pueden formar con 6 frutas diferentes?

A) 10 B) 20 C) 24
D) 30 E) 36

10. Un grupo de catedráticos de la UNI se reúne en la casa de uno de ellos, donde se observa que se han dado 36 apretones de mano al momento de saludarse. ¿Cuántas personas llegaron a dicha casa?

A) 6 B) 7 C) 8
D) 9 E) 10

CLAVES

1 B 2 A 3 D 4 E 5 E 6 E 7 D 8 A 9 B 10 C

Problemas propuestos

Nivel básico

1. En un baile escolar, la profesora forma parejas extrayendo de una bolsa el nombre de un niño y de otra bolsa el nombre de una niña. Si en el aula hay 9 niños y 7 niñas, ¿cuántas posibles parejas distintas se podrían formar?

A) 63
B) 756
C) 80
D) 48
E) 196

2. Se tienen tres casas. Indique de cuántas maneras diferentes se pueden distribuir dos personas en dichas casas si es posible que ambas se encuentren en una misma.

A) 3 B) 6 C) 1
D) 9 E) 2

3. Elegimos simultáneamente dos cuadritos de un tablero de ajedrez (uno blanco y otro negro). ¿De cuántas maneras se pueden elegir si deben ser de diferentes filas y columnas?

A) 750 B) 768 C) 770
D) 832 E) 1024

4. Tres alumnas quieren escuchar juntas en la misma carpeta el seminario de aritmética. Este se dicta en 3 locales de 4 aulas y cada una de estas con 8 carpetas para 4 alumnos. ¿De cuántas maneras se pueden ubicar?

A) 384 B) 576 C) 1728
D) 1152 E) 2304

5. En una tienda se venden 6 camisas y 5 pantalones que me gustan, pero solo tengo dinero para comprar 3 camisas y 2 pantalones, o 3 pantalones y 1 camisa. ¿De cuántas maneras puedo efectuar una compra y gastar todo mi dinero?

A) 240 B) 250 C) 260
D) 280 E) 320

6. La señorita Rojas quiere comprar un televisor, para lo cual ha consultado a tres tiendas comerciales: la primera le ofrece tres sistemas de crédito, la segunda cuatro sistemas de crédito y la tercera cuatro sistemas de crédito. ¿De cuántas maneras diferentes podría comprar el televisor al crédito?

A) 11 B) 12 C) 24
D) 36 E) 48

7. En una exposición en el Museo de Arte de Alemania, se van a colocar en fila dos cuadros de Picasso, cuatro cuadros de Rembrandt y tres de Van Gogh. Determine de cuántas maneras pueden ser ubicados los cuadros, de modo que los de Rembrandt se encuentren siempre juntos.

A) 288 B) 1728 C) 2880
D) 17 280 E) 36 288

8. ¿De cuántas formas se pueden sentar alrededor de una mesa redonda una pareja y sus 5 hijos si los hermanos José y Luis siempre se sientan juntos?

A) 120 B) 180 C) 360
D) 160 E) 240

9. ¿De cuántas maneras se puede seleccionar a 10 personas de un grupo de 15 personas si 2 de ellas siempre deben pertenecer a dicha selección?

A) 1287 B) 1291 C) 1298
D) 1324 E) 1428

10. Un estudiante debe contestar 7 de 10 preguntas de un examen. Indique de cuántas maneras puede escoger en los siguientes casos:

- Las 7 preguntas
- Si las 2 primeras son obligatorias
- Si debe contestar 3 de las 6 primeras

A) 120; 56; 20
B) 60; 28; 10
C) 240; 56; 40
D) 180; 14; 30
E) 120; 63; 24

11. De seis números positivos y cinco números negativos se escogen cuatro números al azar y se multiplican. Señale el número de maneras en que el producto resulta positivo.

A) 45 B) 170 C) 330
D) 480 E) 1080

12. En una sala de juegos, una persona lanza seis dados simultáneamente. ¿De cuántas formas puede ocurrir que los seis dados muestren diferentes números?

A) 120 B) 320 C) 420
D) 520 E) 720

13. Con todas las letras de la palabra CASACAS, ¿cuántas palabras (sin que importe el centro) se pueden formar?

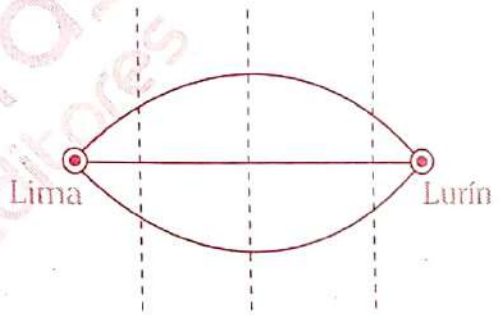
A) 420 B) 630 C) 840
D) 1260 E) 210

Nivel intermedio

14. Disponemos de todas las cifras significativas de la base 8. ¿Cuántos numerales de 5 cifras diferentes se pueden escribir, de modo que empiecen en 4 y terminen en cifra par?

A) 120
B) 180
C) 200
D) 240
E) 400

15. De Lima a Lurín se conducen tres carreteras asfaltadas que son cruzadas por tres caminos sin asfaltar, tal como se muestra en el siguiente esquema:



¿De cuántas maneras se puede viajar de Lima a Lurín si no se puede retroceder?

A) 7 B) 8 C) 9
D) 10 E) 11

16. Un grupo de 7 mujeres y 5 hombres desea tomarse una foto, y para que el paisaje salga en dicha foto solo pueden entrar 8 personas. ¿De cuántas formas podrá un fotógrafo cumplir el deseo de dichas personas, si 5 mujeres, por lo menos, deben estar en la foto?

A) 315 B) 285 C) 210
D) 420 E) 205

Lumbreras Editores

17. ¿De cuántas maneras 3 argentinos, 4 peruanos, 4 chilenos y 2 cubanos pueden sentarse, ordenadamente en una mesa redonda de modo que los de la misma nacionalidad se sienten juntos?

A) 3456
B) 6912
C) 20 736
D) 41 472
E) 165 888

18. En un videojuego se emplea un *password* (código de entrada) que está formado por seis letras seguidas por una cifra. Calcule cuántos *passwords* se pueden formar si se disponen de tres letras A, dos letras N y una I; además, deben terminar en un dígito impar.

A) 216 B) 224 C) 240
D) 250 E) 300

19. ¿De cuántas maneras se puede representar el número 15 como una suma indicada de cuatro sumandos enteros positivos y diferentes entre sí?

A) 120 B) 133 C) 144
D) 136 E) 149

20. Se tienen 10 libros, de los cuales 2 son de aritmética, 4 de álgebra y 4 de geometría, para ordenarlos (en fila) sobre un estante. ¿De cuántas maneras se podrá realizar dicho ordenamiento si consideramos que todos los libros son de la misma edición, es decir, los libros del mismo curso son iguales?

A) 2880 B) 2910 C) 3004
D) 3150 E) 3256

21. Se tienen 10 colores de pintura, todos distintos entre sí. ¿Cuántos nuevos colores se pueden obtener combinando los mencionados?

A) 1024 B) 1023 C) 2048
D) 511 E) 1013

22. En una reunión hay 10 varones y 5 mujeres. Si se van a formar grupos de 3 personas, ¿cuántos grupos diferentes se formarían? Considere que como máximo puede haber 2 mujeres en el grupo.

A) 400 B) 445 C) 480
D) 510 E) 600

23. Una empresa cuenta con 20 sucursales en provincias y desea contratar un grupo de A personas para que realicen una labor de inspectoría en grupos de 3 (las ternas deben ser diferentes). ¿Cuál es el mínimo valor de A para lograr el objetivo?

A) 4 B) 5 C) 6
D) 7 E) 9

24. Un examen consta de 12 preguntas, de las cuales el estudiante debe contestar 10. Si de las 6 primeras preguntas debe contestar por lo menos 5, ¿cuántas posibilidades de elegir 10 preguntas tiene el estudiante?

A) 15 B) 36 C) 51
D) 21 E) 27

25. ¿Cuántas parejas se pueden formar con un grupo de 4 varones y 6 mujeres si cierto varón rehusa tener como pareja a dos de las mujeres?

A) 20 B) 21 C) 22
D) 38 E) 56

26. De cuántas maneras diferentes se pueden sentar 2 varones, 3 mujeres y 3 niños alrededor de una fogata, si los niños siempre deben estar juntos.

A) 620
B) 580
C) 640
D) 540
E) 720

27. Se extraen 5 cartas al azar de una baraja de 52 cartas. Indique de cuántas maneras se podrían realizar las siguientes acciones:

- Extraer exactamente 3 cartas iguales (del mismo puntaje)
- Extraer un full (3 y 2 cartas de un mismo puntaje)
- Extraer una escalera (5 cartas de puntaje consecutivo)

Dé como respuesta la suma de los resultados; considere al as como uno.

A) 71 616 B) 68 727 C) 76 278
D) 67 872 E) 72 867

28. María tiene 5 perros y 3 gatos como mascotas. ¿De cuántas maneras puede salir a pasear con al menos un perro y con al menos un gato?

A) 200 B) 215 C) 217
D) 220 E) 224

29. Cinco amigos se van de campamento y por estar aburridos idean un juego, el cual requiere colocarse alrededor de un árbol. Si el lugar escogido para el juego cuenta con 4 árboles, ¿de cuántas maneras pueden iniciar a jugar?

A) 72 B) 96 C) 120
D) 240 E) 480

30. En una reunión hay 4 niños, 3 niñas y 2 adultos. ¿De cuántas maneras pueden sentarse en una fila si los niños deben estar juntos y las niñas también?.

A) 3560 B) 4280 C) 3460
D) 5240 E) 3456

31. Con 3 banderas blancas, 3 banderas rojas y 3 banderas azules, ¿cuántas señales diferentes se podrán formar si todas las banderas se van a colocar en una asta.

A) 840 B) 1680 C) 1640
D) 720 E) 5!

Nivel avanzado

32. Se desea ubicar en una columna a 4 mujeres y 3 hombres. Si un hombre no puede ir detrás de otro, ya que hay una mujer entre ellos, ¿dé cuántas maneras se pueden ubicar las personas?

A) 72 B) 108 C) 150
D) 156 E) 144

33. Se reúnen 40 damas y 20 varones para elegir un presidente, un vicepresidente, un tesorero y un secretario. La condición es que el tesorero sea una dama y el secretario un varón; además, nadie puede ocupar más de un cargo. Indique de cuántas maneras puede elegirse ese grupo directivo.

A) 2 644 800 B) 2 844 600 C) 2 866 400
D) 3 088 400 E) 3 244 800

34. ¿Cuántos números de 3 cifras diferentes se pueden formar con los dígitos 1; 2; 3; 4 y 5, de manera que no aparezca el 3 en las decenas?

A) 72 B) 60 C) 24
D) 36 E) 48

35. Se permutan cinco cifras (a; b; c; d y e) significativas y diferentes, formando con ellas todos los numerales de tres cifras diferentes. Si la suma de ellos es 31 968, calcule $a+b+c+d+e$.

A) 22 B) 23 C) 24
D) 25 E) 26

36. Un mozo debe llenar 10 vasos diferentes con gaseosa y chicha, luego debe llevarlos y repartirlos entre 6 caballeros y 4 damas. Si los vasos con gaseosa son para los caballeros y los de chicha para las damas, calcule de cuántas maneras diferentes puede llenar los vasos y luego distribuirlos en la mesa.

A) $12\times(7!)^2$ B) $7\times(6!)^2$ C) $6\times(7!)^2$
D) $7\times(7!)^2$ E) $14\times(6!)^2$

37. Susana decide invitar a un almuerzo a sus seis amigos más cercanos, ella sabe que dos de dichos amigos no pueden estar juntos y que otros dos siempre se sientan juntos. ¿De cuántas maneras diferentes se pueden sentar a almorzar si la mesa de Susana tiene forma circular?

A) 156 B) 144 C) 192
D) 148 E) 124

38. Alrededor de una mesa circular se van a sentar seis personas. Si dos de ellas deben sentarse juntas y otras dos separadas, ¿de cuántas maneras pueden sentarse?

A) 30 B) 24 C) 40
D) 36 E) 48

39. De un grupo de 9 personas se deben escoger 7 para abordar un bote de 6 remos y un timón. ¿De cuántas maneras diferentes podrían ubicarse si se sabe que hay 2 personas que no pueden remar del mismo lado y estas son diferentes a las dos que solo pueden llevar el timón y no remar?

A) 5400 B) 6624 C) 7200
D) 3600 E) 5040

40. En un cajón hay 10 jeringas, 3 en mal estado y 7 buenas. Si se extraen una por una al azar, ¿de cuántas maneras se pueden ordenar las jeringas extraídas antes de la octava extracción (en la que se obtuvo la última en mal estado)?

A) 20 B) 21 C) 35
D) 46 E) 56

41. Se tienen 12 preguntas de aritmética, en las cuales se deben formar los temas P y Q con 6 preguntas diferentes cada uno. ¿De cuántas maneras se pueden formar dichos temas y ordenar sus preguntas en cada uno?

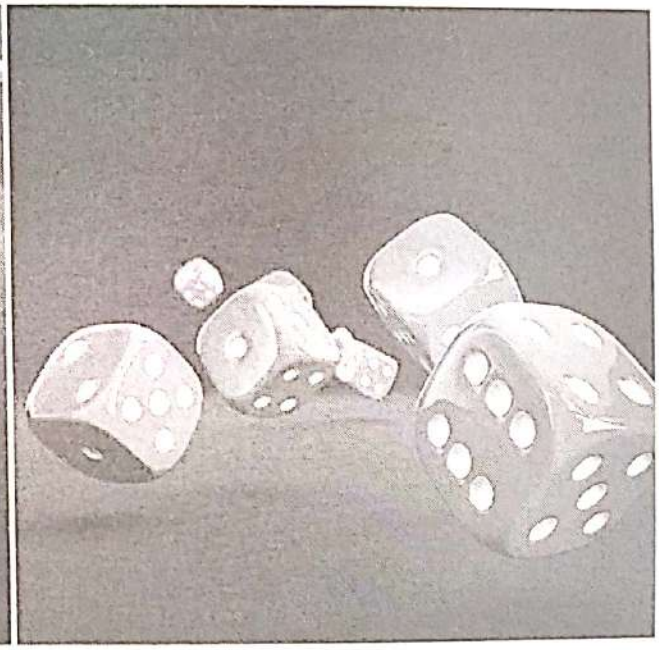
A) $C_6^{12}\times 6!6!$ B) $C_6^{12}5!$ C) $C_6^{7}3!$
D) $C_6^{12}\times 6!$ E) $6!6!6!$

42. De n personas se eligirá un grupo de 3. Si hay 30 formas de elegir a dichas personas, sabiendo que entre las n personas hay 2 en particular que no quieren estar juntas en el grupo, halle el valor de n.

A) 5 B) 6 C) 7
D) 8 E) 9

Capítulo

XXI



Leonardo de Pisa Fibonacci

Introducción a la probabilidad

Ángel Sánchez Oré

CAPÍTULO XXI

INTRODUCCIÓN A LA PROBABILIDAD

Objetivos

- Determinar la probabilidad de un evento con respecto a un espacio muestral asociado a un experimento aleatorio.
- Resolver los diferentes casos de probabilidad aplicando propiedades específicas.
- Calcular la función de probabilidad de variables aleatorias discretas, su esperanza matemática y su varianza.

Introducción

En la sociedad francesa de 1650, el juego era un entretenimiento común sin muchas restricciones. En este entretenimiento están las raíces de la teoría de la probabilidad, pues cada vez que se introducían juegos más complicados se originaba la necesidad de un método para calcular la posibilidad de ganar en cada juego.

Existió un jugador apasionado, el Caballero De Mére, quien encontró un desacuerdo al comparar el total de juegos que se realizaban con las veces que se ganaba, ya que él tenía una forma particular de ganar lo que él mismo previamente había calculado. En París, consultó esta discrepancia con el famoso matemático y filósofo Blaise Pascal, quien se interesó por los problemas que le proponía De Mére y comenzó una correspondencia epistolar sobre cuestiones de grado de certeza en un juego con otros matemáticos amigos, sobre todo con Fermat en el siglo XVII.

Esta correspondencia puede considerarse el origen de la teoría de probabilidad. Alcanzó la madurez en el siglo XIX, con Fermat, en su obra *Teoría analítica de la probabilidad*. En el siglo XX, gracias especialmente a Kolmogorov, se convirtió en un campo más de la matemática rigurosa con infinidad de aplicaciones. Hubo otros que contribuyeron también al cálculo de probabilidades como Bernoulli, Laplace, Bayes, Markov, quienes hicieron publicaciones referentes a las probabilidades y a la estadística para poder aplicarlas en la política, la medicina y la biología.

La teoría de probabilidad tendrá como objetivo orientar al investigador en los procesos de descripción de los experimentos y fenómenos aleatorios, y proporcionar conceptos que nos permitan entender los procesos que dependen del azar.

1 ▸ Conceptos importantes

1.1. Experimento aleatorio (ε)

Es aquella prueba cuyo resultado no es predecible de forma absoluta; los resultados posibles de un experimento aleatorio dependen del azar. Aquellos experimentos cuyos resultados son totalmente predecibles no se van a estudiar y son los llamados experimentos no aleatorios (determinísticos).

Por ejemplo, si dejamos caer una pelota o la lanzamos y conocemos las condiciones iniciales de altura, velocidad, peso, etc., sabremos con seguridad dónde caerá, cuánto tiempo tardará y otras características más. Sin embargo, si lanzamos un dado sobre la mesa, ignoraremos qué cara estará hacia arriba: el resultado depende del azar. Otros ejemplos son los siguientes:

- Lanzar un dado y observar el resultado.
- Lanzar tres monedas simultáneamente y observar lo que nos resulta.
- Elegir dos personas de un grupo de tres mujeres y un hombre.
- Extraer al azar una carta de una baraja de 52 y observar el puntaje.
- Observar un partido de fútbol y anotar el resultado de un equipo para la acumulación de puntos.
- Extraer dos bolillas una por una sin reposición de una urna que contiene 10 bolillas idénticas numeradas y observar su suma.
- Contar objetos defectuosos producidos diariamente por cierto proceso de producción.

▸▸ Nota

En general, un experimento será aleatorio si cumple las siguientes condiciones:

- Cada experimento puede repetirse indefinidamente sin cambiar esencialmente las condiciones.
- Cada experimento es no determinístico (el resultado no se puede predecir).
- Cada experimento tiene varios resultados posibles que pueden describirse de antemano con precisión.

1.2. Espacio muestral (Ω)

Se llama espacio muestral al conjunto de todos los resultados posibles de un determinado experimento aleatorio y se denota por Ω; cada resultado posible de un experimento aleatorio es un elemento del espacio muestral. A cada elemento del espacio muestral se le denomina también **punto muestral**. Para los cinco primeros experimentos anteriores, tendremos lo siguiente:

$\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$

$\Omega_2 = \{CCC; CCS; CSC; CSS; SCC; SCS; SSC; SSS\}$

$\Omega_3 = \{M_1M_2; M_1M_3; M_1H; M_2M_3; M_2H; M_3H\}$

$\Omega_4 = \{A; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10; J; Q; K\}$

$\Omega_5 = \{\text{pierde, empata, gana}\}$

1.2.1. Clasificación de los espacios muestrales

Por el número de elementos o puntos muestrales, los espacios muestrales se clasifican en los siguientes:

a. Discretos finitos

Contienen un número finito de elementos.

Ejemplos

- $\Omega_1 = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$
- $\Omega_2 = \{CC; SC; CS; SS\}$
- $\Omega_3 = \{1C; 2C; 3C; 4C; 5C; 6C; 1S; 2S; 3S; 4S; 5S; 6S\}$

b. Discretos infinitos

Comprenden un número infinito numerable de elementos.

Ejemplo

Si el experimento aleatorio es lanzar una moneda tantas veces como sea necesario hasta que aparezca la primera cara, el espacio muestral será

$$\Omega_4 = \{C; SC; SSC; SSSC; ...\}$$

c. Continuos

Contienen un número infinito no numerable de elementos.

Ejemplos

- Para el experimento aleatorio que mida la vida útil (en horas) de un determinado artefacto eléctrico, su espacio muestral será

$$\Omega_5=\{t \in \mathbb{R}/t \geq 0\}$$

- Si el experimento es lanzar un dardo y determinar la posición de caída de este hacia un blanco circular de radio 5 cm, su espacio muestral será

$$\Omega_6=\{(x; y) \in \mathbb{R}^2/x^2+y^2 \leq 25\}$$

1.3. EVENTO

Es cualquier subconjunto del espacio muestral (Ω). Para los cinco primeros experimentos aleatorios anteriores, se tienen los siguientes eventos:

Ω_1 : evento A (puntaje par)
$A=\{2; 4; 6\}$

Ω_2 : evento B (al menos 2 caras)
$B=\{CCC; CCS; CSC; SCC\}$

Ω_3 : evento C (solo mujeres)
$C=\{M_1M_2; M_1M_3; M_2M_3\}$

Ω_4 : evento D (puntaje mayor que 10)
$D=\{J; Q; K\}$

Ω_5 : evento E (no pierde)
$E=\{$empata, gana$\}$

Por ejemplo, si $\Omega=\{w_1; w_2; \ldots ; w_n\}$ es un espacio muestral finito de n elementos, en él se pueden definir 2^n eventos diferentes (subconjuntos).

1.3.1. Evento imposible (ϕ)

Es todo evento que no posee elementos o puntos muestrales. Al hacer una prueba del experimento aleatorio no ocurre ningún caso favorable. Se le designa como ϕ.

Ejemplo

A: Lance un dado y obtenga como resultado un número múltiplo de 7.

$$A=\phi$$

1.3.2. Evento unitario o elemental

Es aquel evento que contiene un solo elemento o punto muestral.

Ejemplo

B: Lance un dado y obtenga como puntaje un número perfecto.

$$B=\{6\}$$

1.3.3. Evento seguro

Es cuando posee todos los puntos muestrales o elementos del espacio muestral. Al realizar una prueba del experimento aleatorio, todos los casos son favorables.

Ejemplo

C: Seleccione una carta de una baraja y que el puntaje sea menor que 15.

$$C=\{2; 3; 4; 5; \ldots; 10; J; Q; K; A\}$$

1.3.4. Evento contrario

Dado un evento determinado A, el evento contrario es aquel que posee los puntos muestrales que no posee A y se le designará A' o A^C.

$$A^C=\Omega-A$$

Ejemplo

Sea el experimento lanzar dos monedas y sea el evento A sacar alguna cara, entonces, A^C será no sacar ninguna cara.

Observación

A cada elemento de un evento se le llama "suceso", es decir, un evento es un conjunto de sucesos.

1.4. OPERACIONES CON EVENTOS

Usando las operaciones en conjuntos, podemos formar nuevos eventos, los cuales serán nuevamente subconjuntos del mismo espacio muestral.

1.4.1. Operación unión

Los eventos A y B se define de la siguiente forma: $(A \cup B)$; es el evento que posee los casos cuando se dé al menos uno de los 2, es decir, cuando se dé A o B (se pueden dar ambos a la vez).

$$A \cup B = \{w \in \Omega / w \in A \ \vee \ w \in B\}$$

1.4.2. Operación intersección

Los eventos A y B se define de la siguiente forma: $(A \cap B)$; es el evento que posee los casos cuando se den A y B a la vez.

$$A \cap B = \{w \in \Omega / w \in A \ \wedge \ w \in B\}$$

1.4.3. Operación diferencia

Los eventos A y B se definirá como $(A-B)$ y es cuando se da A y no B.

$$A-B = \{w \in \Omega / w \in A \ \wedge \ w \notin B\} = A \cap B^C$$

De lo anterior podemos concluir que

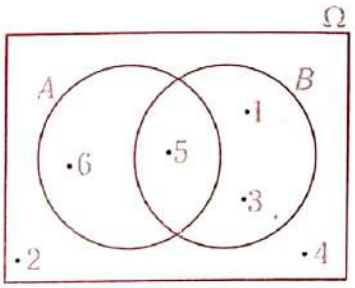
$A \cup B$ es el evento A o B
$A \cap B$ es el evento A y B
$A-B$ es el evento A, pero no B

Ejemplo

Sea el experimento lanzar un dado y sean los eventos siguientes:

A: Obtener puntaje mayor que 4.

B: Obtener puntaje impar.



Hallemos lo siguiente:

- $A \cup B$: obtener puntaje mayor que 4 o puntaje impar
  $\rightarrow A \cup B = \{1; 3; 5; 6\}$
- $A \cap B$: obtener puntaje mayor que 4 y puntaje impar
  $\rightarrow A \cap B = \{5\}$
- $A-B$: obtener puntaje mayor que 4, pero no puntaje impar
  $\rightarrow A-B = \{6\}$

1.4.4. Producto cartesiano de eventos

Para dos eventos, A y B, el evento $A \times B$ es el producto cartesiano de los eventos A y B que consiste en todos los pares ordenados de puntos muestrales $(w_1; w_2)$, siendo $w_1 \in A$ y $w_2 \in B$.

$$A \times B = \{(w_1; w_2) / w_1 \in A \ \wedge \ w_2 \in B\}$$

1.5. EVENTOS MUTUAMENTE EXCLUYENTES O DISJUNTOS

Sean A y B dos eventos de un cierto experimento aleatorio; se dice que estos eventos son mutuamente excluyentes (disjuntos) si no pueden ocurrir juntos, esto es

$A \cap B \equiv \phi$

Ejemplo

Se toma un test sobre 10 puntos.

A: Obtuvieron puntaje mayor que 5.
$A = \{6; 7; 8; 9; 10\}$

B: Obtuvieron puntaje menor que 5.
$B = \{0; 1; 2; 3; 4\}$
$A \cap B = \phi$

2 DEFINICIÓN CLÁSICA DE PROBABILIDAD

Fue una definición dada por Laplace a finales del siglo XVIII, que dice que si se tiene que los sucesos del espacio muestral Ω son equiprobables (tienen igual probabilidad), se podrá definir lo siguiente:

Sea $P[A]$: probabilidad del evento A

$$\rightarrow P[A]=\frac{\left(\begin{array}{c}\text{n.º de casos favorables}\\ \text{para que ocurra } A\end{array}\right)}{(\text{n.º total de casos posibles})}$$

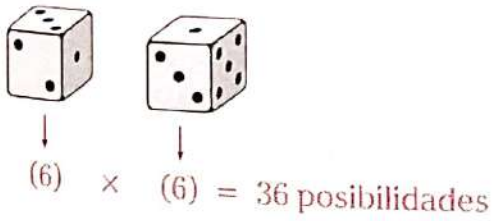
$$\boxed{P[A]=\frac{n(A)}{n(\Omega)}}\ ;\ A\subset\Omega$$

Aplicación 1

Calcule la probabilidad de lanzar dos dados y que el puntaje obtenido sea 10.

Resolución

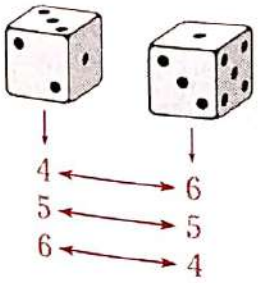
Al lanzar los dados se obtiene



$\Omega=\{(1;1), (1;2), (1;3), ..., (6;4), (6;5), (6;6)\}$
$n(\Omega)=36$

Si se quiere obtener el puntaje 10 en total, se define el evento siguiente:

A: obtener puntaje 10



$A=\{(4;6)(5;5)(6;4)\}$

$n(A)=3$

$$\rightarrow\ P[A]=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{3}{36}=\frac{1}{12}$$

Nota

En muchos casos no es necesario determinar los elementos del espacio muestral, solo interesa saber cuántos elementos existen, para lo cual emplearemos conocimientos de análisis combinatorio vistos anteriormente.

Aplicación 2

Si una persona escribe al azar un número de tres cifras, halle la probabilidad de que escriba los siguientes números:

I. Ciento veintitrés
II. Un número par
III. Un número par que empieza en 5

Resolución

Antes de analizar cada caso, veamos el espacio muestral para el caso en el cual se escribe un número de tres cifras.

$\Omega_6=\{100; 101; 102; ...; 997; 998; 999\}$

Además, $n(\Omega)=900$.

Veamos

I. A: se escribe el número 123.

$A=\{123\}$

$$\therefore\ P[A]=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{1}{900}$$

II. B: se escribe un número par.

$B=\{100; 102; 104; 106; ...; 996; 998\}$

$n(B)=450$

$$\therefore\ P[B]=\frac{n(B)}{n(\Omega)}=\frac{450}{900}=\frac{1}{2}$$

III. C: se escribe un número par que empieza en 5.

$$C=\{500; 502; 504; ...; 596; 598\}$$
$$n(C)=50$$

$$\therefore \quad P[C]=\frac{n(C)}{n(\Omega)}=\frac{50}{900}=\frac{1}{18}$$

Aplicación 3

En una población, el 20% tiene máximo 25 años, el 40% tiene de 26 a 35 años, el 15% de 36 a 55 años, el 17% tiene de 56 a 65 años, y el resto tiene más de 65 años. Si se pregunta al azar a una persona su edad, calcule las siguientes probabilidades:

I. Que sea mayor de 65 años.
II. Que tenga al menos 56 años.
III. Que tenga menos de 26 años o más de 65 años.

Resolución

Como se está trabajando con tanto por ciento, vamos a considerar un total de 100 personas. De esta manera tendremos el siguiente cuadro:

20%	máximo 25 años
40%	26 – 35
15%	36 – 55
17%	56 – 65
8%	más de 65 años
100%	**Total**

Ahora hallemos la probabilidad en cada caso.

I. A: que sea mayor de 65 años.

$$P[A]=\frac{8}{100}=0{,}08$$

II. Al menos 56 años significa que mínimamente tiene 56 años.

B: tenga al menos 56 años.

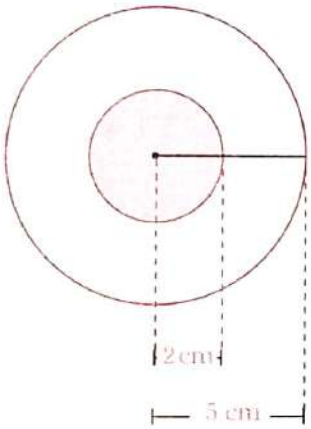
$$P[B]=\frac{17+8}{100}=\frac{1}{4}=0{,}25$$

III. C: tenga menos de 26 años o más de 65 años.

$$P[C]=\frac{20+8}{100}=\frac{28}{100}=0{,}28$$

Aplicación 4

Se lanza un dardo en el gráfico mostrado. Determine cuál es la probabilidad de acertar si para ello debe caer en el círculo negro.



Resolución

Se observa que la probabilidad va a depender de las áreas. Entonces

$$\text{Área de la región posible}=\pi(5)^2$$
$$\text{Área de la región favorable}=\pi(2)^2$$

Luego,

$$P[\text{acertar}]=\frac{\pi(2)^2}{\pi(5)^2}=\frac{4}{25}$$

$$\therefore \quad P[\text{acertar}]=0{,}16$$

2.1. PROPIEDADES DE LAS PROBABILIDADES

Propiedad 1

La probabilidad de un evento A varía desde cero hasta 1. Así tenemos que

$$\boxed{0 \leq P[A] \leq 1}$$

Además, se afirma lo siguiente:

Si $P[A]=0 \rightarrow A$ es un evento imposible

Si $P[A]=1 \rightarrow A$ es un evento seguro

Propiedad 2

Dado un evento A, se cumple

$$\boxed{P[A^C]=1-P[A]}$$

Siendo $P[A^C]$ la probabilidad del complemento del evento A.

Propiedad 3

Sean dos eventos A y B cualesquiera, se cumple que

$$\boxed{P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[A\cap B]}$$

Propiedad 4

Dados dos o más eventos de un mismo espacio muestral, mutuamente excluyentes dos a dos, la probabilidad de la unión de dichos eventos será la unidad.

Demostración

Sabemos por conjuntos que

$$n(A\cup B)=n(A)+n(B)-n(A\cap B)$$

Sea Ω no vacío.

$$\rightarrow \frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{n(A)+n(B)-n(A\cap B)}{n(\Omega)}$$

$$\frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}+\frac{n(B)}{n(\Omega)}-\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}$$

$$\therefore \quad P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[A\cap B]$$

Si son mutuamente excluyentes

$$P[A\cap B]=0$$

Entonces

$$\boxed{P[A\cup B]=P[A]+P[B]}$$

Aplicación 5

La probabilidad de que llueva mañana es 0,10; la probabilidad de que truene es 0,05 y la probabilidad de que llueva y truene es 0,03. ¿Cuál es la probabilidad de que llueva o truene?

Resolución

Sean los eventos:

A: que llueva $\rightarrow$ $P[A]=0{,}10$

B: que truene $\rightarrow$ $P[B]=0{,}05$

$A\cap B$: que llueva y truene $\rightarrow$ $P[A\cap B]=0{,}03$

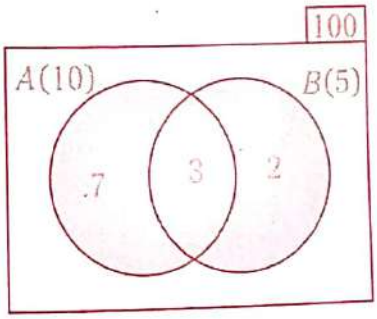
Entonces diremos que la operación de eventos $A\cup B$ significa que llueva o truene.

Por propiedad, se tendría

$$P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[A\cap B]$$

$$\therefore \quad P[A\cup B]=0{,}10+0{,}05-0{,}03=0{,}12$$

Otra forma



$$P[A]=0{,}10=\frac{10}{100}=\frac{n(A)}{n(\Omega)}$$

$$P[B]=0{,}05=\frac{5}{100}=\frac{n(B)}{n(\Omega)}$$

$$P[A\cap B]=0{,}03=\frac{3}{100}=\frac{n(A\cap B)}{n(\Omega)}$$

Por lo tanto, diremos que

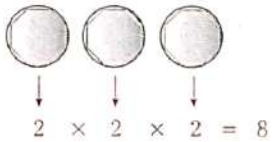
$$P[A\cup B]=\frac{n(A\cup B)}{n(\Omega)}=\frac{12}{100}=0{,}12$$

Aplicación 6

Se lanzan simultáneamente tres monedas de diferentes valores. ¿Cuál es la probabilidad de obtener al menos una cara?

Resolución

Hallemos el número de elementos del espacio muestral al lanzar tres monedas de manera simultánea; no olvide que para cada moneda hay dos posibles resultados.



Luego tendremos el siguiente espacio muestral:

$\Omega=\{CCC; CCS; CSC; SCC; CSS; SSC; SCS; SSS\}$

Además,

C: cara

S: sello

Sea A el evento para obtener al menos una cara.

$$A=\{CCC; CCS; CSC; SCC; CSS; SSC; SCS\}$$

Por lo tanto,

$$P[A]=\frac{n(A)}{n(\Omega)}=\frac{7}{8}$$

Otra forma

Resolvemos mediante el evento complementario.

A^C: no se obtiene cara $A=\{SSS\}$

Sabemos que

$$P(A^C)=1-P(A)$$

$$\frac{1}{8}=1-P(A)$$

$$\therefore\ P(A)=\frac{7}{8}$$

2.2. PROBABILIDAD CONDICIONAL

Definiremos esta probabilidad cuando exista un evento (A) que ocurre condicionado a que haya ocurrido previamente otro evento (B) y lo denotaremos por $P[A/B]$.

Se lee: probabilidad de que ocurra A dado que ha ocurrido B.

Aplicación 7

En una urna se tienen bolas numeradas del 1 al 9 y se extrae una bola al azar. Determine la probabilidad de que sea mayor que 6 si se sabe que la bola extraída es impar.

Resolución

Sean los eventos siguientes:

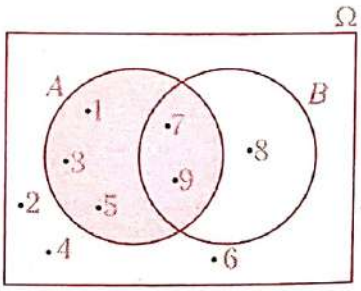
A: bola extraída de numeración impar

B: bola extraída de numeración mayor que 6

Entonces, lo que nos piden es

$P[B/A]$: probabilidad de que sea mayor que 6, dado que fue impar.

Sabemos que



$$\Omega=\{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9\}$$

De lo anterior obtenemos que

$n(\Omega)=9$

$n(A)=5$

$n(B)=3$

$n(A\cap B)=2$

Al tener la seguridad de que la bola extraída es impar, nuestro espacio muestral queda reducido al evento A; en él buscamos los eventos que involucren un resultado impar y mayor que 6, es decir, el evento $(A \cap B)$.

$$A \cap B = \{7; 9\} \quad n(A \cap B) = 2$$

Obtenemos que

$$P[B/A] = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{2}{5}$$

En forma general

$$P[B/A] = \frac{n(A \cap B)}{n(A)} = \frac{\dfrac{n(A \cap B)}{n(\Omega)}}{\dfrac{n(A)}{n(\Omega)}}$$

$$\boxed{P[B/A] = \frac{P[A \cap B]}{P[A]}}.$$

Aplicación 8

Un local de baile posee dos entradas por las cuales ingresan una misma cantidad de personas. Por la primera entrada ingresan 20 varones y 30 mujeres, mientras que por la segunda ingresa el doble de varones. Calcule la probabilidad de que baile una pareja que haya ingresado por la misma puerta.

Resolución

Del enunciado se tiene el cuadro siguiente:

	1.ª puerta	2.ª puerta
Varones	20	40
Mujeres	30	10
Total	50	50

Además,

A: Varón que haya ingresado por la puerta 1

B: Mujer que haya ingresado por la puerta 1

C: Varón que haya ingresado por la puerta 2

D: Mujer que haya ingresado por la puerta 2

Piden

$$P[A \text{ y } B] + P[C \text{ y } D]$$

$$P[A] \times P[B] + P[C] \times P[D]$$

$$\frac{20}{50} \times \frac{30}{50} + \frac{40}{50} \times \frac{10}{50}$$

$$\frac{6}{25} + \frac{4}{25} = \frac{10}{25} = 0{,}40$$

$$\therefore \quad P[A \text{ y } B] + P[C \text{ y } D] = 0{,}40$$

3 ▸ FUNCIÓN DE PROBABILIDAD

De lo anterior se puede concluir que no todo espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio está constituido por elementos numéricos, sino que en muchos casos son entes abstractos; por ejemplo, al lanzar una moneda varias veces hasta obtener cara, tendríamos resultados como C, SC, SSC, etc.

También se sabe que muchas veces no es fácil describir el espacio muestral Ω asociado a un experimento aleatorio cuando sus elementos no son números.

3.1. DEFINICIÓN

La probabilidad P es una función cuyo dominio es $P(\Omega)$ y su rango es el intervalo de números reales $[0; 1]$, es decir

$$\boxed{P: P(\Omega) \rightarrow [0; 1]}$$

Ejemplo

Sea el experimento aleatorio.

E: lanzar una moneda tres veces.

El espacio muestral Ω sería el siguiente:

$\Omega = [CCC, CCS, CSC, SCC, CSS, SCS, SSC, SSS]$

Supongamos que ahora solo nos interesa el número de caras que se obtienen, de manera que los sucesos *CCS*, *CSC*, *SCC* pueden considerarse equivalentes, también los sucesos *CSS*, *SCS*, *SSC* se consideran equivalentes. Podemos introducir una función x definida sobre Ω, de tal manera que

$$x(CCC)=3$$

$$x(CCS)=x(CSC)=x(SCC)=2$$

$$x(CSS)=x(SCS)=x(SSC)=1$$

$$x(SSS)=0$$

Es lo mismo que

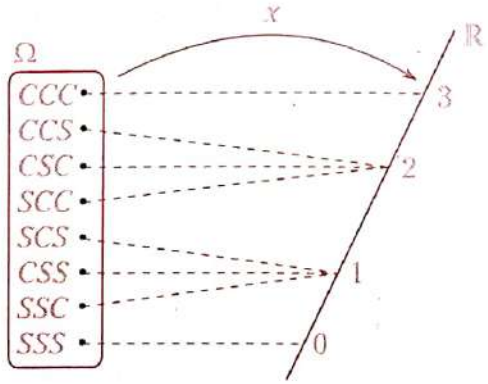
$$x(3 \text{ caras})=3$$

$$x(2 \text{ caras})=2$$

$$x(1 \text{ cara})=1$$

$$x(0 \text{ caras})=0$$

Gráficamente tendremos lo siguiente:



A cada grupo de posibilidades le corresponde una probabilidad de la siguiente manera:

$$P(x=3)=P(3 \text{ caras})=\frac{1}{8}$$

$$P(x=2)=P(2 \text{ caras})=\frac{3}{8}$$

$$P(x=1)=P(1 \text{ cara})=\frac{3}{8}$$

$$P(x=0)=P(0 \text{ caras})=\frac{1}{8}$$

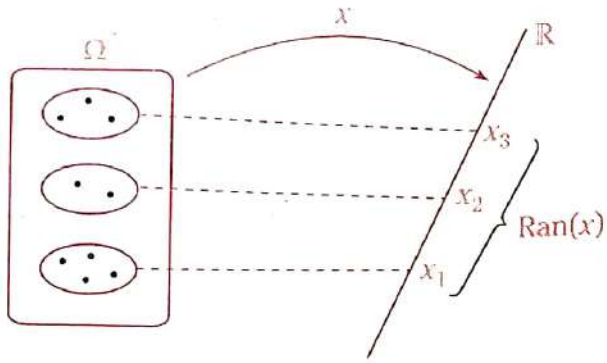
Vemos pues que la función x hace corresponder a cada elemento de Ω un número real x.

Además, el conjunto de elementos de Ω, cuya imagen es uno de estos números reales, es un elemento de $P(\Omega)$, es decir, un evento; por lo tanto, una determinada probabilidad. Las funciones de x que cumplen con estas condiciones se les llama **variables aleatorias.**

3.2. VARIABLE ALEATORIA

Dado un experimento aleatorio E, asociado a un espacio muestral Ω, se llama variable aleatoria aquella función x que asigna a cada elemento ω en Ω uno y solamente un número real $x=X(\omega)$; es decir, x es una función real $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$.

Gráficamente tenemos lo siguiente:



El dominio de la variable aleatoria x es Ω y el rango es un subconjunto de $\mathbb{R}$, al cual denotaremos por Ran(x).

Ejemplos

- Una urna contiene 12 bolillas numeradas del 1 al 12. Se extrae una bolilla y se quiere analizar la variable aleatoria x=número de divisores del número obtenido.

Se tiene lo siguiente:

N.º de bolilla	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x	1	2	2	3	2	4	2	4	3	4	2	6

Se observa que

$x(1)=\{1\}$

$x(2)=\{2; 3; 5; 7; 11\}$

$x(3)=\{4; 9\}$

$x(4)=\{6; 8; 10\}$

$x(6)=\{12\}$

Se deduce la siguiente tabla:

y	1	2	3	4	5	6
$P(y)$	$\frac{23}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Además, se obtienen las siguientes conclusiones:

- La probabilidad de que un número elegido al azar entre 1 y 12 tenga tres divisores es

  $P(x=3)=\frac{2}{12}$

- La probabilidad de que un número elegido al azar entre 1 y 12 tenga menos de 3 divisores es

  $P(x<3)=\frac{1}{12}+\frac{5}{12}=\frac{6}{12}$.

- Se lanzan dos dados y sean i, j los números obtenidos. Evaluemos las variables aleatorias $x=i+j$; $y=\text{MCD}(i; j)$.

Se sabe que la probabilidad de cada par ordenado $(i; j)$ es $\frac{1}{36}$.

Contando directamente en cada caso el número de pares que corresponden a cada valor de x o y, se tienen las siguientes tablas:

x	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$P(x)$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

y	1	2	3	4	5	6
$P(y)$	$\frac{23}{36}$	$\frac{7}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$	$\frac{1}{36}$

Estas tablas resuelven situaciones como las siguientes:

- Al lanzar dos dados, la probabilidad de que la suma de los puntos sea 7 es $P(x=7)=\frac{6}{36}$ y la probabilidad a que la suma de puntos sea menor que 6 es

$$P(x<6)=\frac{1}{36}+\frac{2}{36}+\frac{3}{36}+\frac{4}{36}=\frac{10}{36}$$

- Al lanzar dos dados, la probabilidad de que el MCD de los puntos obtenidos sea mayor o igual que 3 es

$$P(\geq 3)=\frac{3}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\frac{1}{36}=\frac{6}{36}$$

Aplicación 9

Dada la función de probabilidad $P(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot k$

x: 1; 2; 3; ...

calcule $P(x=4)$ si $P(x\leq 3)=\frac{19}{54}$.

Resolución

Como $P(x\leq 3)=\frac{19}{54}$

entonces, $\frac{2}{3}k+\left(\frac{2}{3}\right)^2\cdot k+\left(\frac{2}{3}\right)^3\cdot k=\frac{19}{54}$

$$\frac{18}{27}k+\frac{12}{27}k+\frac{8}{27}k=\frac{19}{54}$$

$$\frac{38}{27}k=\frac{19}{54}$$

$$k=\frac{1}{4}$$

Luego, $P(x)=\left(\frac{2}{3}\right)^x\cdot\frac{1}{4}$

Nos piden $P(x=4)=\left(\frac{2}{3}\right)^4\cdot\frac{1}{4}$

$\therefore\quad P(x=4)=\frac{4}{81}$

3.3. ESPERANZA MATEMÁTICA

Se tiene una variable aleatoria finita x que puede tomar valores x_1; x_2; x_3; ...; x_n con las probabilidades $P(x_1)$; $P(x_2)$; $P(x_3)$; ...; $P(x_n)$, respectivamente.

Se llama esperanza matemática o valor medio de la variable aleatoria x a la siguiente expresión:

$$E(x)=\sum_{i=1}^{n}x_iP(x_i)$$

Ejemplo

La esperanza matemática de la variable aleatoria x=número que resulta al lanzar un dado será

$$E(x)=1\times\frac{1}{6}+2\times\frac{1}{6}+3\times\frac{1}{6}+4\times\frac{1}{6}+5\times\frac{1}{6}+6\times\frac{1}{6}$$

$$E(x)=21\times\frac{1}{6}=3{,}5$$

Se afirma que al lanzar un dado, el valor esperado puede ser 3 o 4.

Nota

Si $P(x_i)=\frac{1}{n}\ \forall\ 1<i<n$, se cumple que

$$E(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_1}{n}$$

Se puede afirmar que la esperanza matemática de la variable x resulta ser la media aritmética de los valores de x. En cualquier otro caso, la esperanza matemática será la media **ponderada** de x.

Aplicación 10

Sea x una variable aleatoria discreta y su respectiva función de probabilidad $P(x)$.

x	2	3	4	5
P(x)	2n	m	n	3m

Si el valor esperado de x es 3,4, calcule $m+n$.

Resolución

Como $E(x)=\sum_{i=1}^{4} x_i P(x_i)=3{,}4$

$$2\times 2n+3\times m+4\times n+5\times 3m=3{,}4$$
$$8n+18m=3{,}4 \qquad \text{(I)}$$

Como $\sum_{i=1}^{4} P(x_i)=1$

$$2n+m+n+3m=1$$
$$3n+4m=1 \qquad \text{(II)}$$

De (I) y (II)

$$\begin{array}{ll} 4n+\ 9m=1{,}7 & (\times 3) \\ 3n+\ 4m=1 & (\times 4) \\ \hline 12n+27m=5{,}1 & \\ 12n+16m=4 & (-) \\ \hline 11m=1{,}1 & \end{array}$$

$$m=0{,}1 \quad ; \quad n=0{,}2$$

$\therefore \quad m+n=0{,}3$

3.4. VARIANZA DE UNA VARIABLE ALEATORIA DISCRETA

Una vez comprendido el concepto de valor esperado, vamos a utilizarlo para definir otros conceptos de interés.

Dada una variable aleatoria x, sabemos que el valor medio de x será la esperanza matemática de x, es decir, $E(x)$. Sin embargo, esto no nos dice nada sobre el modo en que x tiende a ser $E(x)$.

Sabemos que

$$\sigma^2(x)=\frac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\bar{x})^2\times f_i}{n}=\frac{\sum_{i=1}^{n}x_i^2\times f_i}{n}-x^2$$

Además, como $\sigma^2(x)$ se puede denotar como $V(x)$, entonces, la varianza de una variable aleatoria está dado por lo siguiente:

$$V(x)=\sum_{i=1}^{n}(x_i-E(x))^2\cdot P(x_i)=\sum_{i=1}^{n}\left[x_i^2\cdot P(x_i)\right]-E(x)^2$$

Intuitivamente, la varianza $V(x)$ es una medida que nos indica cuán **dispersa** es la distribución de x, o cuán **aleatoria** es x o **cuánto** varía x.

Ejemplo

Se lanzan dos dados simultáneamente y la variable aleatoria discreta x es la diferencia no negativa de los resultados de los dados. Calcule la varianza de x.

Evaluamos los resultados de x, según la condición.

D_1 \ D_2	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

Se deduce la siguiente tabla:

x	0	1	2	3	4	5
P(x)	$\frac{6}{36}$	$\frac{10}{36}$	$\frac{8}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{2}{36}$

Como $E(x)=\sum_{i=1}^{6} x_i P(x_i)$

Entonces

$$E(x)=0\cdot\frac{6}{36}+1\cdot\frac{10}{36}+2\cdot\frac{8}{36}+3\cdot\frac{6}{36}+4\cdot\frac{4}{36}+5\cdot\frac{2}{36}$$

$$E(x)=\frac{70}{36}=1{,}9\widehat{4}$$

Nos piden

$$V(x)=\sum_{i=1}^{6}x_i^2\cdot P(x_i)\ -E(x)^2$$

$$V(x)=0^2\cdot\frac{6}{36}+1^2\cdot\frac{10}{36}+2^2\cdot\frac{8}{36}+3^2\cdot\frac{6}{36}+4^2\cdot\frac{4}{36}+5^2\cdot\frac{2}{36}-\left(\frac{70}{36}\right)^2$$

$$V(x)=\frac{210}{36}-\frac{1225}{324}=\frac{665}{324}$$

$\therefore \quad V(x)=2{,}052$

Biografía

Fibonacci

Leonardo de Pisa (1170 - 1241), más conocido por Fibonacci, que significa "hijo de Bonaccio", coetáneo de Ricardo Corazón de León, fue sin duda el más grande entre los matemáticos europeos de la Edad Media. Se aficionó a las matemáticas siendo muy joven, tras un curso de aritmética posicional hindú que su padre, Bonaccio, director de la oficina de aduanas en una factoría mercantil italiana asentada en Bougie, Argelia, le hizo seguir.

La más conocida de sus obras, *Liber abaci* (1202), es un amplio tratado del sistema de numeración indoarábigo en el que presenta los signos hindúes y el 0 (*quod arabice zephirum appellatur*), y el método de la *regula falsi* para ecuaciones de primer grado, más sus razonamientos no causaron demasiada impresión a los mercaderes italianos de la época. Con el tiempo, su libro llegó a ser, empero, la obra de máxima influencia entre todas las que contribuyeron a introducir en Occidente la notación indoarábiga.

En *De quadratis numeris* (1225), que se perdió, y apareció en 1853 en la Biblioteca Ambrosiana de Milán, cuando muchos pensaban que sus resultados estaban copiados de Diofanto, supera a este y a los árabes y solo es superado por Fermat, en el siglo XVII.

No deja de ser irónico que Leonardo, cuyos aportes a la matemática fueron de tanta importancia, sea hoy conocido sobre todo a causa de un matemático francés del siglo pasado, Edouard Lucas, interesado por la teoría de números, quien encadenó el nombre de Fibonacci a una sucesión numérica que forma parte de un problema trivial del *Liber abaci*.

La sucesión de Fibonacci (1, 1, 2, 3, 5, 8, 11, ... cada término es la suma de los dos anteriores $F_n=F_{n-1}+F_{n-2}$) ha tenido intrigados a los matemáticos durante siglos, en parte a causa de su tendencia a presentarse en los lugares más inopinados, pero sobre todo, porque incluso un principiante en teorías de números que solo conozca la aritmética elemental, puede aspirar a investigarla y descubrir curiosos teoremas inéditos, de los que parece haber variedad inagotable.

El interés por estas sucesiones ha sido avivado por desarrollos en programación de ordenadores, ya que tiene aplicación en clasificación de datos, recuperación de informaciones, generación de números aleatorios, e incluso en métodos rápidos de cálculo aproximado de valores máximos o mínimos de funciones complicadas, en casos donde no se conoce la derivada.

Adaptado de "Fibonacci". En <https://historiaybiografias.com>.

Problemas resueltos

Problema 1

Se pulsan cuatro teclas numéricas de una calculadora y se forma un número de cuatro cifras. Calcule la probabilidad de que dicho número sea capicúa.

Resolución

Veamos la cantidad total de numerales de cuatro cifras que se pueden formar.

Tenemos

$$\Omega=\{1000;\ 1001;\ 1002;\ ...;\ 9999\}$$

además,

$$n(\Omega)=9999-999=9000$$

Sea el evento

D: número capicúa de cuatro cifras.

Veamos cuántos elementos posee este evento.
Sea $\overline{abba}$ un capicúa de cuatro cifras.

Tenemos

$$\overline{a\ b\ b\ a}$$

$$\downarrow\ \downarrow$$

$9\times10=90$ números

entonces

$$n(D)=90$$

$$\therefore\ P[D]=\frac{n(D)}{n(\Omega)}=\frac{90}{9000}=\frac{1}{100}=0{,}1$$

Problema 2

Se tiene un dado cargado de tal manera que la probabilidad de sacar 2 es el doble que la de obtener 1; la de sacar 3, el triple de la de obtener 1; y así sucesivamente. Calcule la probabilidad de obtener un número par.

Resolución

Según el enunciado podemos elaborar la siguiente tabla:

Resultado	Probabilidad
1	p
2	$2p$
3	$3p$
4	$4p$
5	$5p$
6	$6p$
	$21p$

De la tabla tenemos

$$P[\text{sea par}]=\frac{2p+4p+6p}{21p}=\frac{12p}{21p}=\frac{4}{7}$$

Otra forma

Resolvemos mediante la propiedad de dos eventos excluyentes.
La suma de todas las probabilidades para este evento de lanzar un dado sería 1, es decir,

$$p+2p+3p+4p+5p+6p=21p=1\ \rightarrow\ p=\frac{1}{21}$$

Nos piden la probabilidad de que al lanzar un dado este tenga puntaje par.
Luego,

$$P[\text{par}]=P[2]+P[4]+P[6]$$

$$\therefore\ P[\text{par}]=\frac{2}{21}+\frac{4}{21}+\frac{6}{21}=\frac{4}{7}$$

Problema 3

Iván, Valery y Mariana son tres niños de los cuales se desea saber cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellos cumplan años el mismo día, si no se trata de un año bisiesto.

Resolución

Vamos a resolver este problema por complemento. Consideremos el evento

A: todos cumplen años en días diferentes

Luego,

A^C: al menos dos de ellos cumplen años el mismo día.

$$P[A]=\frac{365\times364\times363}{365\times365\times365}=0{,}991$$

La explicación sería que para los casos totales cualquiera de los niños tiene 365 posibles días para su cumpleaños. Por condición decimos que nacieron en días diferentes; luego, para el primer niño habrá 365 posibilidades, para el segundo 364 posibilidades y para el tercero 363 posibilidades.

En el problema nos piden

$$P[A^C]=1-P[A]$$

$$\therefore\ P[A^C]=0{,}009$$

Del resultado podemos concluir que es poco probable que al menos dos de ellos cumplan años el mismo día.

Problema 4

Si se sabe que

$P[A]=0{,}6;\ P[B]=0{,}7$ y

$P[A\cup B]-P[A\cap B]=0{,}3$

calcule

I. $P[A\cup B]$

II. $P[A\cap B]$

Resolución

I. Sabemos que

$$P[A\cup B]=P[A]+P[B]-P[A\cap B]$$

Luego, de los datos tendremos

$$P[A\cup B]=0{,}6+0{,}7-P[A\cap B]$$

Mas

$$\left.\begin{array}{l}P[A\cup B]+P(A\cap B)=1{,}3\\ P[A\cup B]-P(A\cap B)=0{,}3\end{array}\right\}(+)$$

$$2P[A\cup B]=1{,}6$$

$$\therefore\ P[A\cup B]=0{,}8$$

II. Reemplazamos.

$$0{,}8+P[A\cap B]=1{,}3$$

$$\therefore\ P[A\cap B]=0{,}5$$

Problema 5

Un comerciante guarda en su bolsillo monedas de S/5; S/2 y S/1 por un monto de S/33. Calcule la probabilidad de que obtenga de su bolsillo 2 monedas por un valor total de S/4 si en total hay 12 monedas y 4 de ellas son de S/5.

Resolución

Sea el total distribuido así

a monedas de S/5

b monedas de S/2

c monedas de S/1

Además,

$a+b+c=12$

$5a+2b+c=$S/33

Por dato

$a=4$

$2b+c=13$

Además,

$b+c=8$

Reemplazamos.

$$\underset{5}{b}+\underbrace{b+c}_{8}=13$$

Entonces se observa

$b=5\ \wedge\ c=3$

Luego se tendría

Valor:	S/5	S/2	S/1
Cantidad de monedas:	4	5	3

Sean

A: la 1.ª moneda de S/2

B: la 2.ª moneda de S/2

Nos piden

$$P[A \cap B] = P[A] \times P[B/A]$$

$$P[A \cap B] = \frac{5}{12} \times \frac{4}{11}$$

$$\therefore\ P[A \cap B] = \frac{5}{33}$$

Problema 6

La probabilidad que tiene A de ganar a B en una partida de ajedrez es igual a 1/3. ¿Cuál es la probabilidad que tiene A de ganar, por lo menos, una de tres partidas?

Resolución

Por complemento

$$P[\text{gane } A] = \frac{1}{3};\quad P[\text{no gane } A] = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Luego,

$$P[\text{gane } A \text{ por lo menos } 1] + P[\text{no gane ninguna}] = 1$$

$$P[\text{gane } A \text{ por lo menos } 1] + \underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\text{no gana la 1.ª}}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\text{no gana la 2.ª}}\underbrace{\left(\frac{2}{3}\right)}_{\text{no gana la 3.ª}} = 1$$

$$\therefore\ P[\text{gane A por lo menos } 1] = 1 - \frac{8}{27} = \frac{19}{27}$$

Problema 7

En una caja hay 10 focos de los cuales 4 están en buen estado una persona toma al azar 3 focos. Calcule la probabilidad de que por lo menos uno este en buen estado.

Resolución

Sea A el evento

$$n(A) = C_1^4 C_2^6 + C_2^4 C_1^6 + C_3^4 = 100$$

Se quiere tomar 3 focos de 10, luego el número de casos totales es

$$n(A) = C_3^{10} = 120$$

Calculamos la probabilidad pedida.

$$\therefore\ P[A] = \frac{100}{120} = \frac{5}{6}$$

Problema 8

De seis números positivos y ocho números negativos, se eligen cuatro números al azar (sin sustitución) y se multiplican. ¿Cuál es la probabilidad de que el producto sea un número positivo?

Resolución

Calculamos el espacio muestral

$$n(\Omega) = C_4^{14}$$

Además, sea el evento

$A = \{$el producto de los números es positivo$\}$

Ocurre A solo cuando se obtiene lo siguiente:

- 4 números positivos: C_4^6
- 4 números negativos: C_4^8
- 2 números positivos y 2 negativos: $C_2^6 \times C_2^8$

Luego,

$$n(A) = C_4^6 + C_4^8 + C_2^6 \times C_2^8$$

Finalmente, nos piden

$$P[A] = \frac{C_4^6 + C_4^8 + C_2^6 \times C_2^8}{C_4^{14}} = \frac{505}{1001} = 0{,}5045$$

Problema 9

En un concurso participan 8 alumnos y 9 alumnas. Si deben de haber 2 ganadores, ¿cuál es la probabilidad de que los ganadores sean una pareja mixta?

Resolución

Se debe formar un grupo mixto (un hombre y una mujer)

N.º de casos favorables $= C_1^8 \cdot C_1^9 = 72$

Debemos escoger 2 personas de un total de 17.

N.º casos totales $= C_2^{17} = 136$

Sea el evento A.

Calculamos la probabilidad pedida.

$$\therefore\ P[A] = \frac{72}{136} = \frac{9}{17}$$

Problema 10

La probabilidad de que haya un tsunami en Asia es 0,8 y la probabilidad de que haya un tsunami en Perú, dado que hubo uno en Asia, es 0,4. Calcule la probabilidad de que sucedan ambos eventos.

Resolución

Sean los eventos

A: hay un tsunami en Perú

B: hay un tsunami en Asia

$P[A]=0{,}8$

$P[A/B]=0{,}4$

Sabemos que

$$P[A/B]=\frac{P[A\cap B]}{P[B]}$$

$$P[A\cap B]=0{,}8\times 0{,}4$$

$$\therefore\ P[A\cap B]=0{,}32$$

Problema 11

De un grupo de estudiantes, la probabilidad de no llevar Matemática es 0,49 y la probabilidad de no llevar Física es 0,53. Si la probabilidad de no llevar Matemática ni Física es 0,27, ¿cuál es la probabilidad de llevar solo uno de los cursos?

Resolución

Sean los eventos

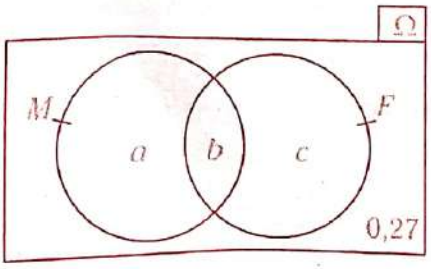
M: llevar Matemática

F: llevar Física

$P[M']=0{,}49 \rightarrow P[M]=0{,}51$

$P[F']=0{,}53 \rightarrow P[F]=0{,}47$

$P[M'\cap F']=0{,}27$



$$\underbrace{P(\Omega)}_{1}=\underbrace{P[M'\cap F']}_{0{,}27}+P[M\cup F]$$

Además,

$P[F]=b+c=0{,}47$ y $P[M]=a+b=0{,}51$

$P[M\cup F]=a+b+c=0{,}73$

Resolvemos.

$a=0{,}26;\ b=0{,}25;\ c=0{,}22$

Nos piden $a+c$.

$\therefore\ a+c=0{,}48$

Problema 12

Se tienen 10 tarjetas numeradas del 1 a 10. Si se extraen aleatoriamente tres de estas tarjetas, calcule la probabilidad de que los números de las tarjetas sean crecientes consecutivos, impares o pares.

Resolución

El total de formas de extraer tres tarjetas es

$C_3^{10}=120$

Sean los siguientes eventos:

A: resulten números consecutivos crecientes

$\{(1;2;3),(2;3;4),(3;4;5),\ldots,(8;9;10)\}$

B: resulten impares 1; 3; 5; 7; 9

C: resulten pares 2; 4; 6; 8; 10

$$P[A]=\frac{8}{120};\quad P[B]=\frac{10}{120};\quad P[C]\frac{10}{120}$$

Como A, B y C son excluyentes

$\rightarrow\ P[A\cup B\cup C]=P[A]+P[B]+P[C]$

$$\therefore\ P[A\cup B\cup C]=\frac{7}{30}$$

Problema 13

Al extraer una carta de una baraja usual, ¿cuál es la probabilidad de obtener un 4 o un 6?

Resolución

Una baraja usual tiene 52 cartas

- 13 tréboles
- 13 corazones
- 13 diamantes
- 13 espadas

Su numeración es del 1 al 13.
El número de cartas numeradas con 4 es 4.
El número de cartas numeradas con 6 es 4.

$$\therefore \quad \text{probabilidad} = \frac{4+4}{52} = \frac{8}{52} = \frac{2}{13}$$

Problema 14

Se extraen 2 cartas de una baraja que contiene 52 cartas. ¿Cuál es la probabilidad de que ambas cartas sean reyes?

Resolución

Sean los sucesos

A: La primera carta es rey $\rightarrow P[A] = \frac{4}{52}$

B: La segunda carta es un rey $\rightarrow P[B] = \frac{3}{51}$

Se observa que A y B son eventos dependientes.

$$P[A \cap B] = P[A] \times P[B/A]$$

$$P[A \cap B] = \frac{4}{52} \times \frac{3}{51}$$

Luego tenemos que

$$P[A \cap B] = \frac{1}{13} \times \frac{1}{17}$$

Como A y B son eventos independientes

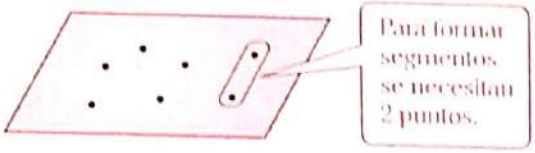
$$\therefore \quad P[A \cap B] = \frac{1}{221}$$

Problema 15

En un plano existen n puntos (no hay más de dos colineales), con los cuales se forman segmentos, de tal manera que el número de estos sea igual a $5n$. Calcule el valor de n.

Resolución

Graficamos.



Por dato sabemos que

$$\text{n.º de segmentos} = C_2^n$$

Por condición

$$C_2^n = 5n$$

$$\frac{n!}{2!(n-2)!} = 5n$$

$$\cancel{n}(n-1) = 2 \cdot 5 \cdot \cancel{n}$$

$$\therefore \quad n = 11$$

Problema 16

Una bolsa contiene canicas de colores: 5 blancas, 7 negras y 4 rojas. Si todas son de la misma forma, calcule la probabilidad de que al extraer 3 canicas, las 3 sean blancas.

Resolución

Número de casos en que se pueden escoger 3 canicas de un total de 16.

$$\text{n.º de casos totales} = C_3^{16}$$

Números de casos en que se puede escoger 3 canicas blancas de un total de 5.

$$\text{nº de casos favorables} = C_3^5$$

$$\therefore \quad \text{probabilidad} = \frac{C_3^5}{C_3^{16}} = \frac{1}{56}$$

Problema 17

Se elige un punto del cuadrado con vértices opuestos (0; 0) y (1; 1). Sea A el evento: la suma de las coordenadas del punto es menor que 3/4. Halle la probabilidad de A.

Resolución

El experimento aleatorio es elegir un punto del cuadrado con vértices opuestos (0; 0) y (1; 1).

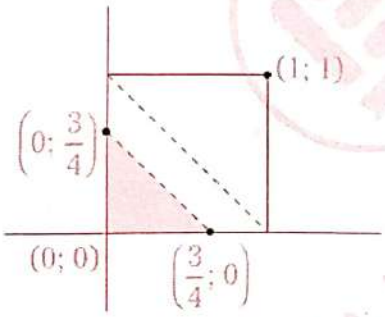
Entonces

$$\Omega=\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 / 0 \leq x \leq 1 \text{ y } 0 \leq y \leq 1\}$$

Sea el evento A; además, la suma de las coordenadas del punto elegido es menor que 3/4.

$$A=\{(x, y) \in \Omega / x+y < 3/4\}$$

Gráficamente



Además,

$\mathbb{S}_\Omega$: área del cuadrado: $1 \times 1=1$

$\mathbb{S}_A$: área del triángulo sombreado

Por lo tanto,

$$P(A)=\frac{\mathbb{S}_A}{\mathbb{S}_\Omega}=\frac{\left(\frac{3}{4}\right)\left(\frac{3}{4}\right)}{2}=\frac{9}{32}$$

Problema 18

Una urna contiene cuatro fichas numeradas con 1; 2; 3; 4. De ellas se extraen dos fichas sin reposición. Si x es la variable aleatoria que representa la suma de los cuadrados de los dos números obtenidos, calcule $E[x]$.

Resolución

A continuación se tienen los posibles resultados.

	1	2	3	4
1	○	5	10	17
2	5	○	13	20
3	10	13	○	25
4	17	20	25	○

Los valores diferentes de x son 6.

Luego se observa lo siguiente:

x	5	10	13	17	20	25
$P(x)$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$	$\frac{2}{12}$

Como nos piden

$$E[x]=\sum_{i=1}^{6} x_i \cdot P[x_i]$$

$$E[x]=5\times\frac{2}{12}+10\times\frac{2}{12}+13\times\frac{2}{12}+17\times\frac{2}{12}+20\times\frac{2}{12}+25\times\frac{2}{12}$$

$$E[x]=\frac{1}{6}[5+10+13+17+20+25]$$

$\therefore \quad E[x]=15$

Problema 19

Se tiene una moneda trucada de tal manera que la probabilidad de obtener cara y sello son entre sí como 3 es a 4. Si se lanza la moneda 3 veces consecutivas, calcule la probabilidad de obtener dos caras.

Resolución

Por condición, respecto a la moneda trucada tenemos lo siguiente:

$$P[C]=\frac{3}{7} \qquad P[S]=\frac{4}{7}$$

Se tiene el experimento

E: se lanza la moneda 3 veces consecutivas.

Sea el evento

A: obtener 2 caras y 1 sello

$$\therefore\ P[A]=\underset{\uparrow\ P[C]}{\frac{3}{7}}\times\underset{\uparrow\ P[C]}{\frac{3}{7}}\times\underset{\uparrow\ P[C]}{\frac{4}{7}}\times\underset{\begin{matrix}CCS\\CSC\\SCC\end{matrix}}{3}=\frac{108}{343}$$

Problema 20

En una competencia de tiro se sabe que la probabilidad de que acierte A es 2/5, la de B es 5/7 y la de C es 1/2. Si los 3 disparan, ¿cuál es la probabilidad de que no acierte alguno de ellos tres? Considere que los eventos se llevan a cabo en forma independiente.

Resolución

Por dato se tiene lo siguiente:

Acierte	No acierte
$P[A]=\frac{2}{5}$	$P[A']=\frac{3}{5}$
$P[B]=\frac{5}{7}$	$P[B']=\frac{2}{7}$
$P[C]=\frac{1}{2}$	$P[C']=\frac{1}{2}$

Nos piden que no acierten alguno de ellos, pero son eventos independientes.

$$P[A'\cap B'\cap C']=P[A']\times P[B']\times P[C']$$

$$P[A'\cap B'\cap C']=\frac{3}{5}\times\frac{2}{7}\times\frac{1}{2}$$

$$\therefore\ P[A'\cap B'\cap C']=\frac{3}{35}$$

Problema 21

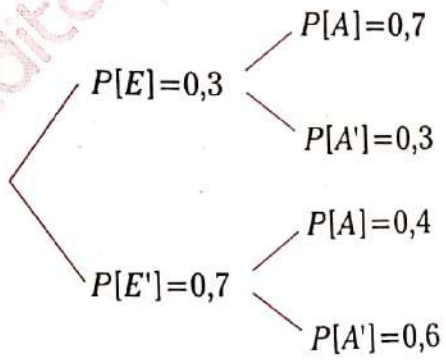
La probabilidad de que Javier estudie para su examen es 0,3. Si estudia, la probabilidad de que apruebe es 0,7; sin embargo, si no estudia, la probabilidad de que apruebe es 0,4. Si Javier aprobó el examen, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado?

Resolución

Respecto a un examen de Javier

- $P[E]$: probabilidad de que estudie
- $P[A]$: probabilidad de que apruebe

Por dato sabemos que



Nos piden

$$P[E/A]=\frac{P[E\cap A]}{P[A]}$$

$$P[E/A]=\frac{(0,3)(0,7)}{(0,3)(0,7)+(0,7)(0,4)}$$

$$P[E/A]=\frac{0,21}{0,49}$$

$$\therefore\ P[E/A]=\frac{3}{7}$$

Problema 22

Se tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	0	2	3	5
P[x]	$\frac{k}{10}$	$\frac{3k-3}{20}$	$\frac{3k}{20}$	$\frac{4k-1}{20}$

Calcule el valor de $P[0<x<5]$.

Resolución

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} P[x_i]=1$$

Del cuadro se tiene

$$\frac{k}{10}+\frac{3k-3}{20}+\frac{3k}{20}+\frac{4k-1}{20}=1$$

$$\frac{2k+(3k-3)+3k+(4k-1)}{20}=1$$

$$12k-4=20$$

$$\rightarrow k=2$$

Finalmente,

$$P[0<x<5]=P[x=2]+P[x=3]$$

$$P[0<x<5]=\frac{3}{20}+\frac{6}{20}$$

$$\therefore\ P[0<x<5]=\frac{9}{20}$$

Problema 23

Se tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	2	4	6	9
P[x]	$2n$	$3m$	$3n$	$2m$

donde x es la variable aleatoria discreta. Si la esperanza matemática es 5,36, calcule la suma de los valores de x que tienen menor y mayor probabilidad de ocurrencia.

Resolución

Sabemos que

$$\sum_{i=1}^{n} P[x_i]=1$$

Del cuadro se tiene

$$2n+3m+3n+2m=1$$

$$5n+5m=1 \qquad \text{(I)}$$

Por dato

$$E[x]=5{,}36$$

$$\rightarrow\ 2(2n)+4(3m)+6(3n)+9(2m)=5{,}36$$

$$22n+30m=5{,}36 \qquad \text{(II)}$$

Resolvemos.

$$\begin{array}{rl} (\text{I})\times 6: & 30n+30m=6 \\ \text{II}: & 22n+30m=5{,}36 \\ \hline & 8n=0{,}64 \\ & n=0{,}08 \end{array} \quad (-)$$

Luego, reemplazamos el valor de n en (I).

$$\rightarrow\ m=0{,}12$$

Reemplazando los valores, el cuadro de distribución de probabilidad es el siguiente:

x	2	4	6	9
P[x]	0,16	0,36	0,24	0,24

Nos piden la suma de los valores de x que tienen menor y mayor probabilidad

$$\rightarrow \left(\begin{array}{c}\text{menor}\\ \text{probabilidad}\end{array}\right) \text{ y } \left(\begin{array}{c}\text{mayor}\\ \text{probabilidad}\end{array}\right)$$

$$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$$

$$x=2 \qquad\qquad x=4$$

$$\therefore\ 2+4=6$$

Test

1. En una aula hay 10 varones y 15 mujeres. Si se extrae una persona de esta aula, ¿cuál es la probabilidad de que dicha persona sea varón?

A) $\frac{3}{5}$ B) $\frac{1}{2}$ C) $\frac{3}{4}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{4}{5}$

2. Si se lanza un dado, calcule la probabilidad de que se obtenga un número impar o múltiplo de 3.

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{3}$ C) $\frac{1}{3}$
D) $\frac{2}{5}$ E) $\frac{1}{6}$

3. Si se lanza una moneda tres veces, ¿cuál es la probabilidad de obtener cara al menos una vez?

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{7}{8}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{8}$

4. Se escribe al azar un número de dos cifras. ¿Cuál es la probabilidad de que ese número sea múltiplo de cinco?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{1}{5}$
D) $\frac{4}{5}$ E) $\frac{1}{2}$

5. Al lanzar dos dados, ¿cuál es la probabilidad de que la suma de los puntos de sus caras superiores sea 8?

A) $\frac{1}{6}$ B) $\frac{1}{36}$ C) $\frac{1}{9}$
D) $\frac{1}{12}$ E) $\frac{5}{36}$

6. Al lanzar un dado 2 veces consecutivas, ¿qué probabilidad hay de obtener primero un 3 y luego un número par?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{2}{5}$ C) $\frac{12}{11}$
D) $\frac{7}{8}$ E) $\frac{1}{12}$

7. En una urna hay 4 fichas de color azul y 6 fichas de color celeste. ¿Cuál es la probabilidad de que, al extraer una ficha, esta sea de color azul?

A) $\frac{1}{2}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{2}{5}$
D) $\frac{3}{4}$ E) $\frac{5}{6}$

8. Seis amigos se sientan alrededor de una mesa. ¿Cuál es la probabilidad de que 3 amigos en particular siempre estén juntos?

A) 0,40 B) 0,50 C) 0,20
D) 0,30 E) 0,25

9. Dos sucesos tienen probabilidades de 0,5 y 0,6. Si los sucesos son independientes, ¿cuál es la probabilidad de que no suceda ninguno de los dos?

A) 0,1 B) 0,2 C) 0,3
D) 0,7 E) 0,8

10. Si x denota el número de caras obtenidas al lanzar una moneda 2 veces, calcule su esperanza matemática.

A) 0,5 B) 0,75 C) 1
D) 1,25 E) 1,50

Claves

1 D 2 B 3 B 4 C 5 E 6 E 7 C 8 D 9 B 10 C

Problemas propuestos

Nivel básico

1. Una persona entra a una farmacia. La probabilidad de que compre Desenfriol es 0,6, de que compre Mejoral es 0,5 y de que compre ambos medicamentos es 0,3. ¿Cuál es la probabilidad de que compre Desenfriol o Mejoral?

A) 0,72 B) 0,85 C) 0,75
D) 0,80 E) 0,90

2. Un médico estimó la probabilidad de éxito de curación para tres pacientes en 0,8; 0,6 y 0,5, respectivamente. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos uno de dichos pacientes tenga éxito en su curación?

A) 0,96 B) 0,91 C) 0,84
D) 0,98 E) 0,92

3. La probabilidad de que Óscar ingrese a la UNI es 0,3 y de que ingrese a la UNMSM es 0,7. Si la probabilidad de que ingrese al menos a una de estas universidades es 0,8, halle la probabilidad de que ingrese a las dos universidades mencionadas.

A) 0,23 B) 0,12 C) 0,15
D) 0,10 E) 0,20

4. En una fiesta, a la que asistieron 72 personas, resulta que 56 beben, 42 fuman y 8 no fuman ni beben. Si se escoge una persona al azar, ¿cuál es la probabilidad de que fume pero no beba?

A) 4/9 B) 2/11 C) 1/9
D) 2/9 E) 11/36

5. En un cajón hay cuatro fluorescentes defectuosos y seis buenos. Se extraen dos a la vez y se comprueba que uno de ellos está en buen estado. ¿Cuál es la probabilidad de que el otro fluorescente también se encuentre en buen estado?

A) 4/9 B) 7/9 C) 1/9
D) 2/9 E) 5/9

6. La probabilidad de que ocurra un accidente en 1 km de una carretera es 1/3. ¿Cuál es la probabilidad de que ocurra al menos un accidente en 3 km de esa carretera?

A) 8/13 B) 5/13 C) 6/27
D) 2/19 E) 19/27

7. En una reunión, el 60% lo representan los varones y el 6% de las mujeres son solteras. Indique la probabilidad de que al escoger una persona esta sea soltera, dado que es mujer.

A) 2/5 B) 3/50 C) 1/10
D) 2/15 E) 4/15

8. Entre los números 1; 2; ...; 50, se escoge un número al azar. ¿Cuál es la probabilidad de que el número escogido sea divisible por 6 o por 8?

A) 0,21 B) 0,22 C) 0,23
D) 0,24 E) 0,11

9. De una urna que contiene 3 bolas blancas, 4 verdes y 3 rojas, se extraen aleatoriamente 2 bolas. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguna de las bolas sea de color rojo?

A) 2/15 B) 1/15 C) 1/5
D) 14/15 E) 7/15

10. De una baraja de cartas se extrae al azar tres cartas. Calcule la probabilidad de que una sea de corazones y otra sea de espadas.

A) $\frac{13}{102}$ B) $\frac{13}{101}$ C) $\frac{169}{850}$
D) $\frac{169}{425}$ E) $\frac{3}{101}$

11. Se tiene un dado cargado con doble posibilidad en las caras de puntajes impar. ¿Cuál es la probabilidad de que se obtenga un valor par o mayor que 3?

A) $\frac{5}{9}$ B) $\frac{4}{9}$ C) $\frac{2}{9}$
D) $\frac{7}{9}$ E) $\frac{1}{3}$

12. Si se lanzan tres monedas y un dado, ¿cuál es la probabilidad de obtener exactamente dos caras con las monedas y un puntaje par en el dado?

A) 5/16 B) 2/3 C) 1/2
D) 3/16 E) 7/16

13. Se tiene un círculo de radio 8 cm. Si ubicamos un punto aleatoriamente, ¿cuál es la probabilidad de que este punto esté más cerca o a igual distancia del centro que de la circunferencia?

A) 0,25 B) 0,125 C) 0,34
D) 0,85 E) 0,35

14. De un grupo de personas se observa que de los varones, 40 son peruanos y 60 son extranjeros. De las mujeres se observa que 50 son peruanas y 20 son extranjeras. Calcule la probabilidad de que al elegir una persona, esta sea de nacionalidad peruana.

A) $\frac{3}{17}$ B) $\frac{7}{17}$ C) $\frac{9}{17}$
D) $\frac{11}{19}$ E) $\frac{17}{19}$

15. Con 7 ingenieros y 4 médicos se quiere formar comités de 6 miembros. ¿Cuál es la probabilidad de que el comité incluya exactamente 2 médicos?

A) $0,\widehat{43}$ B) $0,\widehat{45}$ C) $0,\widehat{47}$
D) $0,\widehat{48}$ E) $0,\widehat{49}$

Nivel intermedio

16. En una caja hay 12 tornillos, de los cuales 5 están defectuosos. Si se extraen, sin reposición, 2 tornillos, calcule la probabilidad de que por lo menos uno resulte defectuoso.

A) 17/33 B) 21/66 C) 14/35
D) 15/22 E) 19/22

17. Tres máquinas, *A*, *B* y *C*, producen un mismo artículo y fabrican el 35%; 25% y 40% de la producción total, respectivamente. Si de los artículos producidos son defectuosos el 5%, 4% y 2%, respectivamente, ¿cuál es la probabilidad de que un artículo defectuoso provenga de la máquina *A*?

A) 0,0250 B) 0,0175 C) 0,0155
D) 0,1050 E) 0,0018

18. En una panadería se sabe que por cada 100 panetones que se preparan, 36 no tienen pasas. ¿Cuál es la probabilidad de que al escoger 5 panetones se obtengan 3 panetones con pasas y 2 panetones sin pasas?

A) 0,349 B) 0,028 C) 0,276
D) 0,034 E) 0,316

19. Hay 10 llaves, de las cuales solo 2 hacen arrancar un automóvil. Si en un juego que sortea dicho automóvil un participante tiene tres opciones para elegir las llaves, ¿cuál es la probabilidad de que el participante logre encender el auto en el último intento?

A) $0,1\widehat{8}$ B) $0,2\widehat{3}$ C) 0,25
D) 0,2 E) $0,1\widehat{5}$

20. Se desea elegir un comité formado por siete alumnos y entre los participantes se dispone de cinco alumnos del 4.° año; cuatro del 2.° año y tres del 3.er año. ¿Cuál es la probabilidad de que sean sorteados dos alumnos del 2.° año, tres del 4.° año y dos del 3.er año?

A) 3/11 B) 5/22 C) 7/22
D) 5/11 E) 13/22

21. La relación entre las cantidades de camiones y automóviles que pasan por una carretera y se detienen donde hay un grifo surtidor de combustible es de 3 a 2, respectivamente. La probabilidad de que se abastezca de combustible un camión es 0,1 y para el automóvil esta probabilidad es igual a 0,2. Si al surtidor llega un vehículo para abastecerse, ¿cuál es la probabilidad que este sea camión?

A) 1/10 B) 7/50 C) 3/7
D) 14/25 E) 3/50

22. Se escoge aleatoriamente un número de 10 cifras cuya suma de cifras es 88. Calcule la probabilidad de que dicho número sea par.

A) 7/50 B) 9/55 C) 6/65
D) 8/55 E) 9/50

23. En una fábrica, de los 20 neumáticos almacenados, 3 son defectuosos. Si se selecciona aleatoriamente 4 de ellos, ¿cuál es la probabilidad de que solo haya uno defectuoso?

A) 2/19 B) 9/20 C) 8/19
D) 11/20 E) 29/50

24. Tito ha dibujado un círculo sobre el piso. Luego duplica el radio y dibuja un círculo concéntrico. ¿Cuál es la probabilidad de que al arrojar una canica dentro de los círculos esta no caiga en el círculo pequeño?

A) 0,75 B) 0,25 C) 0,40
D) 0,50 E) 0,125

25. Señale la secuencia correcta de verdad (V) o falsedad (F) de las afirmaciones.

I. Si A y B son eventos independientes y $P[A \cap B]=P[B]-0,2$; entonces $P[B \cap A^C]$ es 0,2
II. Si $2P[A]+P[A^C]=1,3$; entonces $P[A]=0,3$
III. Si A y B son eventos excluyentes y $P[A \cup B]=P[A]+0,3$; entonces $P[B]+P[A \cap B]=0,3$
IV. $P[A \cup B]=P[A]+P[B]$

A) VVVV B) VVVF C) VFVV
D) VVFF E) FVVV

26. Un experimento consiste en lanzar dos dados. Si x es la suma impar que se obtiene al lanzar los dados, halle la esperanza matemática de x.

A) 3,5 B) 5 C) 4,5
D) 7 E) 9

27. Se tienen dos urnas, de las cuales en la primera hay 4 bolas verdes y 3 rojas, mientras que en la otra hay 2 verdes y 5 azules. Si se extrae una bola al azar, ¿cuál es la probabilidad de que sea de la primera urna, dado que fue verde?

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{3}{7}$ C) $\frac{2}{3}$
D) $\frac{5}{7}$ E) $\frac{4}{7}$

28. La variable aleatoria x tiene la siguiente distribución de probabilidad:

x	3	5	8	9	10
P(x)	a	$a+0{,}05$	$0{,}2-a$	$5a$	$9a$

Calcule la esperanza matemática de x.

A) 7 B) 7,2 C) 8
D) 8,6 E) 8,7

29. Una rifa consta de 2000 boletos. En esta rifa, 1 boleto se premia con 1000 soles, 2 boletos se premian con 500 soles, 5 boletos se premian con 200 soles, 100 boletos se premian con 10 soles y los demás boletos no se premian. Calcule la probabilidad de ganar a lo más 200 soles.

A) 0,0025 B) 0,250 C) 0,0525
D) 0,125 E) 0,0425

30. Se desea formar comisiones integradas por un chico y una chica; y se tienen 5 chicos y 8 chicas. Si cierto chico rehúsa trabajar con 2 chicas en particular, ¿cuál es la probabilidad de que ocurra lo mencionado?

A) $\frac{17}{40}$ B) $\frac{18}{40}$ C) $\frac{19}{39}$
D) $\frac{15}{38}$ E) $\frac{16}{39}$

Nivel avanzado

31. En una fábrica de helados hay 5 máquinas y una produce helados defectuosos; además, la producción de cada máquina es de 300 unidades por día. Cuando salen de cada máquina, los helados son envueltos y colocados en cajas de 10 unidades cada una. Al sacar un helado de una caja, ¿cuál es la probabilidad de que sea defectuoso?

A) 1/1 500 B) 1/500 C) 1/25
D) 1/5 E) 4/5

32. La probabilidad de que un hombre esté vivo dentro de 10 años es 1/4 y la probabilidad de que su esposa esté viva dentro de 10 años es 1/3. Calcule la probabilidad de que solamente la esposa esté viva dentro de 10 años.

A) 3/12 B) 5/12 C) 3/11
D) 4/11 E) 1/5

33. Tres bolas son aleatoriamente seleccionadas, sin reemplazamiento, de una urna que contiene 20 bolas numeradas del 1 al 20. Si Fabrizio apuesta que al menos una de las bolas seleccionadas tiene un número mayor o igual que 17, ¿cuál es la probabilidad de que gane la apuesta?

A) 0,508 B) 0,412 C) 0,410
D) 0,322 E) 0,312

34. Se tienen los números de tres cifras del sistema ternario y se elige al azar uno de ellos. Sea la variable aleatoria x la suma de cifras del número elegido al azar. Calcule el valor esperado de x.

A) $\frac{35}{4}$ B) $\frac{35}{10}$ C) $\frac{70}{11}$
D) $\frac{101}{18}$ E) $\frac{31}{11}$

35. Un experimento consiste en disponer en forma aleatoria los digitos 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9, uno a continuación del otro. Calcule la probabilidad de que el 3 aparezca junto al 4, en ese orden.

A) $\frac{1}{8}$ B) $\frac{1}{6}$ C) $\frac{1}{7}$
D) $\frac{1}{4}$ E) $\frac{1}{5}$

36. Un juego de azar consiste en lanzar un dado y que el jugador puede ganar S/7 si obtiene al menos 5 puntos, también puede perder S/2 en caso contrario. ¿Cuánto espera ganar el jugador en dicho juego?

A) S/1 B) S/2 C) S/3
D) S/4 E) S/5

37. En una fábrica hay 2 procesos: A y B. En el proceso A, hay 2 % de productos defectuosos, y en B hay 25 %. Se evalúan 300 productos, 200 del proceso A y 100 de B. Calcule la probabilidad de que, al extraer uno de los productos, este sea del proceso A, si resultó defectuoso.

A) $\frac{1}{3}$ B) $\frac{2}{15}$ C) $\frac{5}{12}$
D) $\frac{1}{5}$ E) $\frac{2}{27}$

38. Un cazador consigue en promedio 4 blancos en 5 disparos. ¿Cuál es la probabilidad de que realice exactamente 9 blancos con 10 disparos?

A) $2\left(\frac{4}{5}\right)$ B) $5\left(\frac{1}{4}\right)^9$ C) $\left(\frac{4}{5}\right)^9$
D) $\frac{4^9}{5^{10}}$ E) $\frac{1}{4^9}$

39. Dada la función de probabilidad

$$P(x)=\begin{cases}\frac{1}{4}; \text{ para } x: 2; 4; 8; 16\\ 0; \text{ para otros casos}\end{cases}$$

calcule $E(x)$.

A) $\frac{15}{4}$ B) $\frac{16}{3}$ C) $\frac{15}{2}$
D) 5 E) 6

40. Una variable aleatoria discreta x toma valores enteros entre 0 y 6. Su función de probabilidad está dada por $f(x)=kx$. Calcule la probabilidad de que x esté entre 2 y 5.

A) $\frac{14}{15}$ B) $\frac{3}{5}$ C) $\frac{8}{15}$
D) $\frac{2}{3}$ E) $\frac{7}{15}$

41. Calcule el valor de K para que la función

$$f(k)=K\left(\frac{1}{4}\right)^x;\ x: 1; 2; 3; \ldots$$

sea una función de probabilidad.

A) 2 B) 3 C) 4
D) 5 E) 6

42. Una caja contiene 5 tuercas defectuosas y 5 tuercas no defectuosas. Se extraen 2 tuercas aleatoriamente sin reposición. Sea x el número de tuercas defectuosas que se obtienen en la extracción, calcule el valor esperado de x.

A) 0,5 B) 1 C) 0,9
D) 0,72 E) 1,25

CLAVES
Problemas propuestos

CAPÍTULO II
Lógica proposicional

1	A	7	C	13	E	19	E	25	E	31	C	37	E
2	B	8	B	14	A	20	E	26	E	32	A	38	C
3	C	9	E	15	A	21	A	27	B	33	C	39	B
4	B	10	E	16	B	22	B	28	D	34	E		
5	D	11	B	17	B	23	C	29	E	35	A		
6	D	12	E	18	A	24	A	30	E	36	A		

CAPÍTULO III
Teoría de conjuntos

1	D	5	C	9	A	13	D	17	C	21	A	25	E	29	C
2	A	6	E	10	B	14	C	18	B	22	C	26	B	30	A
3	D	7	D	11	B	15	A	19	E	23	A	27	C		
4	E	8	A	12	C	16	D	20	C	24	D	28	B		

CAPÍTULO IV
Numeración

1	D	8	E	15	C	22	E	29	C	36	C	43	A	50	D
2	B	9	C	16	C	23	B	30	A	37	B	44	C	51	B
3	A	10	C	17	C	24	A	31	D	38	C	45	B		
4	E	11	B	18	D	25	A	32	B	39	C	46	C		
5	C	12	A	19	C	26	D	33	E	40	C	47	A		
6	C	13	E	20	B	27	E	34	D	41	E	48	A		
7	B	14	A	21	B	28	B	35	B	42	E	49	D		

CAPÍTULO V
Operaciones básicas en el conjunto Z^+

1	D	9	E	17	E	25	E	33	A	41	D	49	C
2	E	10	B	18	B	26	A	34	C	42	C	50	D
3	B	11	D	19	D	27	B	35	C	43	A		
4	B	12	E	20	C	28	B	36	B	44	A		
5	C	13	D	21	C	29	C	37	C	45	B		
6	C	14	A	22	A	30	A	38	D	46	B		
7	A	15	B	23	B	31	D	39	C	47	B		
8	A	16	D	24	E	32	C	40	B	48	A		

CAPÍTULO VI
Sucesiones y Series

1	E	7	D	13	E	19	C	25	A	31	B	37	C
2	B	8	C	14	A	20	E	26	B	32	D	38	E
3	D	9	B	15	B	21	E	27	D	33	B	39	A
4	C	10	C	16	E	22	C	28	D	34	A	40	B
5	C	11	A	17	E	23	C	29	A	35	B	41	D
6	D	12	C	18	D	24	D	30	D	36	B	42	D

CAPÍTULO VII
Teoría de divisibilidad

1	B	9	C	17	E	25	D	33	B	41	A	49	E
2	E	10	C	18	C	26	A	34	C	42	D	50	C
3	C	11	E	19	C	27	C	35	C	43	D		
4	D	12	B	20	C	28	D	36	C	44	B		
5	D	13	B	21	A	29	A	37	D	45	D		
6	C	14	D	22	C	30	C	38	E	46	D		
7	C	15	D	23	D	31	B	39	B	47	A		
8	C	16	E	24	E	32	D	40	E	48	A		

CAPÍTULO VIII
Estudio de los divisores enteros positivos de un número

1	D	8	D	15	B	22	C	29	B	36	A	43	E	50	A
2	E	9	C	16	C	23	D	30	D	37	D	44	C	51	D
3	B	10	C	17	E	24	A	31	D	38	E	45	B	52	E
4	B	11	C	18	D	25	B	32	B	39	B	46	D	53	C
5	E	12	D	19	D	26	C	33	E	40	D	47	E		
6	C	13	E	20	C	27	C	34	D	41	C	48	B		
7	C	14	B	21	B	28	E	35	B	42	E	49	B		

CAPÍTULO IX
Máximo común divisor y mínimo común múltiplo

1	C	8	E	15	E	22	A	29	A	36	D	43	E
2	B	9	B	16	E	23	A	30	C	37	C	44	A
3	B	10	B	17	A	24	E	31	D	38	B	45	B
4	D	11	B	18	B	25	A	32	E	39	B	46	C
5	B	12	B	19	E	26	B	33	A	40	C	47	C
6	B	13	B	20	E	27	B	34	B	41	A		
7	B	14	E	21	D	28	A	35	A	42	B		

CAPÍTULO X
Potenciación y Radicación en Z^+

1	B	7	E	13	A	19	A	25	A	31	D	37	D	43	B
2	B	8	A	14	A	20	A	26	E	32	B	38	B	44	D
3	E	9	C	15	C	21	B	27	D	33	C	39	D	45	A
4	B	10	A	16	B	22	E	28	B	34	A	40	D		
5	B	11	B	17	D	23	C	29	D	35	D	41	D		
6	D	12	A	18	A	24	D	30	D	36	D	42	B		

CAPÍTULO XI
Números racionales

1	D	6	A	11	A	16	B	21	C	26	D	31	A	36	D
2	E	7	D	12	A	17	E	22	C	27	C	32	E	37	C
3	B	8	B	13	B	18	D	23	D	28	E	33	B	38	C
4	E	9	E	14	C	19	B	24	B	29	C	34	C		
5	C	10	E	15	E	20	C	25	C	30	C	35	D		

CAPÍTULO XII

Razones y Proporciones

1	E	7	D	13	E	19	B	25	E	31	B	37	B
2	C	8	D	14	C	20	D	26	D	32	C	38	B
3	D	9	B	15	B	21	D	27	E	33	C	39	D
4	E	10	B	16	B	22	C	28	C	34	D	40	D
5	C	11	A	17	C	23	E	29	D	35	D		
6	E	12	E	18	D	24	C	30	E	36	C		

CAPÍTULO XIII

Magnitudes proporcionales

1	C	6	C	11	E	16	A	21	E	26	C	31	A	36	D
2	A	7	E	12	B	17	A	22	B	27	D	32	C		
3	C	8	A	13	D	18	A	23	C	28	B	33	E		
4	B	9	D	14	B	19	C	24	D	29	B	34	C		
5	C	10	D	15	C	20	D	25	B	30	D	35	E		

CAPÍTULO XIV

Tanto por cuanto

1	A	6	A	11	B	16	B	21	D	26	B	31	E
2	B	7	B	12	D	17	D	22	B	27	D	32	C
3	B	8	E	13	E	18	C	23	C	28	A	33	C
4	A	9	C	14	E	19	B	24	B	29	D	34	C
5	E	10	B	15	E	20	D	25	D	30	E	35	B

CAPÍTULO XV

Regla de interés

1	D	7	E	13	A	19	A	25	B	31	C	37	A
2	E	8	C	14	B	20	C	26	B	32	D	38	B
3	B	9	C	15	D	21	D	27	C	33	C	39	D
4	D	10	A	16	B	22	C	28	A	34	C	40	E
5	D	11	D	17	B	23	D	29	E	35	C		
6	D	12	B	18	D	24	E	30	A	36	C		

CAPÍTULO XVI

Regla de descuento

1	A	8	C	15	C	22	B	29	D	36	C	43	E
2	B	9	D	16	B	23	B	30	C	37	A	44	D
3	D	10	C	17	A	24	B	31	A	38	A		
4	C	11	C	18	C	25	A	32	A	39	B		
5	E	12	E	19	A	26	B	33	E	40	C		
6	C	13	C	20	B	27	D	34	C	41	D		
7	B	14	D	21	A	28	D	35	E	42	A		

CAPÍTULO XVII

Promedios

1	D	7	C	13	A	19	B	25	C	31	B	37	E
2	E	8	C	14	B	20	B	26	B	32	E	38	D
3	C	9	E	15	D	21	D	27	C	33	A	39	C
4	C	10	E	16	B	22	B	28	A	34	D	40	C
5	C	11	E	17	D	23	D	29	D	35	A		
6	C	12	D	18	A	24	E	30	E	36	B		

CAPÍTULO XVIII

Regla de mezcla

1	C	7	A	13	E	19	A	25	A	31	E	37	D
2	D	8	D	14	C	20	C	26	A	32	A	38	C
3	D	9	E	15	C	21	B	27	B	33	C	39	B
4	A	10	E	16	E	22	B	28	C	34	E		
5	E	11	C	17	D	23	C	29	A	35	E		
6	D	12	A	18	C	24	C	30	B	36	D		

CAPÍTULO XIX

Introducción a la estadística

1	E	5	D	9	E	13	C	17	C	21	C	25	B
2	D	6	D	10	B	14	A	18	E	22	E	26	E
3	B	7	B	11	B	15	B	19	A	23	E	27	A
4	C	8	C	12	C	16	A	20	B	24	C		

CAPÍTULO XX

Análisis combinatorio

1	A	7	D	13	E	19	C	25	D	31	B	37	B
2	D	8	E	14	A	20	D	26	E	32	E	38	B
3	B	9	A	15	C	21	E	27	D	33	A	39	C
4	D	10	A	16	B	22	B	28	C	34	E	40	B
5	C	11	B	17	D	23	C	29	B	35	C	41	A
6	A	12	E	18	E	24	C	30	E	36	B	42	C

CAPÍTULO XXI

Introducción a la probabilidad

1	D	7	B	13	A	19	E	25	B	31	D	37	E
2	A	8	D	14	C	20	B	26	D	32	A	38	D
3	E	9	E	15	B	21	D	27	C	33	A	39	C
4	C	10	C	16	D	22	B	28	D	34	B	40	E
5	E	11	A	17	B	23	C	29	C	35	A	41	B
6	E	12	D	18	A	24	A	30	C	36	A	42	D

Bibliografía

ACEYTUNO Y MONTERO, Pascual. *Análisis matemático elemental. Aritmética*. Madrid: Editorial Dossat, 1958.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Aritmética. Análisis del número y sus aplicaciones*. Lima: Lumbreras Editores, 2008.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Compendio académico de aritmética*. Lima: Lumbreras Editores, 2003.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Problemas selectos*. Lima: Lumbreras Editores, 2008.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Serie de problemas selectos*. Lima: Lumbreras Editores, 2003.

ASOCIACIÓN FONDO DE INVESTIGADORES Y EDITORES. *Solucionario UNI: exámenes de admisión 1995-2005*. Lima: Lumbreras. Editores. 2005.

AYRES, Frank. *Matemática financiera*. México D. F.: Editorial Mc Graw-Hill, 2009.

CADAVID, Héctor. *Matemáticas financieras: método fácil de aprender*. Lima: Yopublico, 2018.

CARENA, Marilina. *Manual de matemática preuniversitaria*. Santa Fe: Ediciones UNL, 2019

CORBALÁN, Fernando. *La proporción áurea: el lenguaje matemático de la belleza*. Barcelona: National Geographic, 2016.

ESQUECHE, Juan. *Numeración: teoría y práctica*. Lima: Lumbreras Editores, 2012.

GENTILE, Enzo. *Aritmética elemental*. Washington D.C.: OEA, 1985.

GÓMEZ, Joan. *Matemáticos, espías y piratas informáticos: codificación y criptografía*. Córdoba: National Geographic, 2016.

GRACIÁN, Enrique. *Los números primos. Un largo camino al infinito*. Córdoba: National Geographic, 2014.

HALMOS, Paul R. *Teoría intuitiva de conjuntos*. México D.F.: Compañía Editorial Continental, 1966.

HUAYANAY, Carmen. *Sucesiones aritméticas y series*. Lima: Lumbreras Editores, 2015.

JIMÉNEZ, Luis; GORDILLO, Jorge y Gustavo RUBIANO. *Teoría de números para principiantes*. Bogotá: Universidad Nacional de Colombia, 2004.

LINCOYÁN, Govinden. *Matemáticas financieras*. Indiana: Editorial Mc Graw-Hill, 1990.

MITACC, Máximo. *Tópicos de estadística descriptiva y probabilidad*. Lima: Editorial Thales, 1996.

MOYA, Rufino y Gregorio SARAVIA. *Probabilidad e inferencia estadística*. Lima: Editorial San Marcos, 2013.

PERALTA, Javier. "Las fracciones continuas y las series de Leibniz y de Euler para el cálculo de π". En *Revista de la Academia Canaria de Ciencias*. Vol. 11, n.º 1-2, 1999.

PETTOFREZZO, Anthony y Donald BYRKIT. *Introducción a la teoría de los números*. Nueva Jersey: Prentice-Hall International, 1970.

RAMÍREZ, Carlos; GARCÍA, Milton; PANTOJA, Cristo y Ariel ZAMBRANO. *Fundamentos de matemáticas financieras*. Cartagena de Indias: Universidad Libre, 2009.

RÍBNIKOV, K. *Historia de las matemáticas*. Moscú: Editorial Mir, 1987.

SEBASTIANI, Felipe. *Diccionario de matemática*. Lima: Editorial Escuela Nueva, 2003.

TIPE, Jorge. *IV Olimpiada Nacional Escolar de Matemática*. Lima: Lumbreras Editores, 2007.

VARONA, Juan. *Recorridos por la teoría de números*. Madrid: Ediciones Electolibris, 2019.

VIEDMA, Juan. *Lecciones de aritmética*. Cali: Norma, 1976.

Publicaciones online

BRESANI, Carlos; BURNS, Alan; ESCALANTE, Pablo y Giancarlo MEDROA. *Matemática financiera: teoría y ejercicios*. En <http://repositorio.ulima.edu.pe/bitstream/handle/ulima/5910/Matematica%20financiera.pdf?sequence=1&isAllowed=y>.

DU SAUTOY, Marcus. "George Cantor, el matemático que descubrió que hay muchos infinitos y no todos son del mismo tamaño". En <https://www.bbc.com/mundo/noticias-45300219>. (Consulta: mayo 2019).

HUERTAS, Antonia y María MANZANO. *Teoría de conjuntos*. En <https://webs.ucm.es/info/pslogica/teoriaconjuntos.pdf>. (Consulta: mayo 2019).

MORA, Walter. *Introducción a la teoría de números: ejemplos y algoritmos*. En <https://tecdigital.tec.ac.cr/revistamatematica/Libros/WMora_TeoriaNumeros/W_Mora_TeoriaNumeros.pdf>.

MORALES, Miguel. "Cantor, el Aleph y los distintos infinitos". En <https://elpais.com/elpais/2017/07/26/el_aleph/1501085305_943289.html>. (Consulta: mayo 2019).

WANER, Stefan y Steven COSTENOBLE. "Introducción a lógica. El condicional y el bicondicional". En <https://www.zweigmedia.com/MundoReal/logic/logic3.html>. (Consulta: diciembre 2019).

Referencias Web

Exámenes de admisión UNFV. En <https://matematicaj.blogspot.com/2017/04/examen-admision-villareal-universidad.html>. (Consulta: mayo 2019).

Solucionarios de exámenes de Admisión UNI. En <http://academiacesarvallejo.edu.pe/solucionarios/>. (Consulta: diciembre 2019).

Solucionarios de exámenes de Admisión UNMSM. En <http://aduni.edu.pe/solucionarios/>. (Consulta: diciembre 2019).

Datos matemáticos importantes. En <http://www.vaxasoftware.com/doc_edu/mat.html>.

AGRADECIMIENTOS

Afined desea agradecer al equipo que participó en la presente publicación.

- **Cuidado de la edición:** Morales Llanos, Eliana Melani y Callapiña Galvez, Ronald
- **Diagramación:** Grados Alatrista, César
- **Diseño de portada:** Saavedra Pisconte, Alex y Papa Trejo, Hugo
- **Ilustración y retoque fotográfico:** Vega Gonzales, Napoleón

Aritmética

Análisis razonado del número y sus aplicaciones

El origen de la aritmética se encuentra [illegible] necesidades que ha tenido que satisfacer el hombre desde [illegible] de la humanidad, quien para representar cantidades tu[illegible] utilizar instrumentos rudimentarios como huesos, palos o pie[illegible]lladas y escarbadas con muescas, dando inicio a los primeros sistemas de conteo y representación, los cuales se irán formalizando a través del tiempo con el desarrollo del conocimiento para finalmente volver a ser aplicados de un modo razonado.

Aritmética: análisis razonado del número y sus aplicaciones es un libro que guiará al estudiante en su conocimiento sobre esta rama de las matemáticas que viene a ser la base para el entendimiento y aplicación de las otras. A partir de un desarrollo didáctico de los principales conceptos teóricos relacionados con la lógica proposicional, la teoría de conjuntos y la teoría de números, el estudiante irá formando sus cimientos matemáticos para el posterior aprendizaje de los temas vinculados a una aplicación más directa de la aritmética en situaciones de la vida cotidiana, como lo son proporcionalidad, aritmética comercial, estadística, entre otros. De este modo se muestra al estudiante que la aritmética no son fórmulas abstractas desvinculadas de la realidad, sino que tienen su origen en ella.

lumbreras.editores
www.elumbreras.com.pe

ISBN: 978-612-307-949-9
9 786123 079499

00018694